

# 非局部特征方向图像插值方法研究

詹毅<sup>1</sup>, 李梦<sup>2</sup>

(1. 重庆工商大学数学与统计学院, 重庆 400067; 2. 重庆文理学院群与图的理论及应用重点实验室, 重庆 402160)

**摘 要:** 提出了一种非局部的特征方向图像插值方法, 有效地保持了插值图像轮廓的光滑, 抑制了图像边缘的模糊. 这种方法把非局部 Hessian 矩阵的特征向量视为图像特征方向, 使图像能量泛函沿这个方向进行扩散, 其扩散强度由图像局部 Hessian 矩阵特征值参与控制. 它克服了传统方法以梯度方向指示图像特征方向的局部性, 使图像能量泛函沿正确方向扩散, 避免了对图像特征的模糊. 数值实验结果显示, 该方法既能很好地重建插值图像的边缘, 又不会在插值图像中产生伪影或图像边缘失真.

**关键词:** 非局部梯度; 非局部曲率; 总变差; 变分方法; 图像插值

**中图分类号:** TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2016)05-1064-07

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2016.05.008

## Research on Image Interpolation with Non-local Feature Directions

ZHAN Yi<sup>1</sup>, LI Meng<sup>2</sup>

(1. College of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;

2. Key Laboratory of Group & Graph Theories and Applications, Chongqing University of Arts and Sciences, Chongqing 402160, China)

**Abstract:** A method of image interpolation with non-local feature directions is proposed. This method respects the smooth of the contour profile of interpolated image and retrains blur edges. The eigenvector of the non-local Hessian matrix is considered as the image feature direction. The diffusion of image energy functional is controlled by the eigenvalue of image local Hessian along the direction. It overcomes the local limit of gradient pointing image feature and drives image energy functional to diffuse along corrected direction. Thus the blur of image feature is avoided. Numerical experiments on real images show that images interpolated by the proposed method have better interpolated edges and are almost artifact-free.

**Key words:** non-local gradient; non-local curvature; total variation; variational methods; image interpolation

## 1 引言

图像插值技术在现实生活的各个领域应用广阔, 一直以来在理论研究和工程实践中都有着广泛地研究, 其目的是从一幅低分辨率图像通过算法产生相应的高分辨率图像. 有的文献也称其为(单幅图像)超分辨率重建. 低分辨率图像和高分辨率图像之间的关系可以描述为

$$f = Hu \quad (1)$$

其中  $u$  表示高分辨率图像,  $f$  表示低分辨率图像, 而矩阵  $H$  用来模拟图像获取过程中滤波和下采样过程. 事实上, 由于矩阵  $H$  的零空间非零使得方程(1)是一个不适定逆问题(ill-posed inverse problem), 这种问题通常在正则框架下求解.

由于总变差(Total Variation, TV)正则图像重建

过程中保持图像边缘的不连续性, 因而上述问题的解在有界变差函数空间中得到深入的研究. 可以从物理学的观点来解释 TV 正则模型: 能量扩散被限制在只沿着图像梯度正交的方向进行. 在 TV 正则框架下, 方程(1)可以归结为如下的最优化问题

$$\min_u \int_{\Omega} \|\nabla u(x)\| dx, \quad \text{s. t.} \quad f = Hu \quad (2)$$

式(2)和它对应的能量泛函大多用来实现图像插值、图像超分辨率重建<sup>[1,2]</sup>等. 但是基于 TV 正则的能量扩散问题的解是分段常数的, 在图像平坦区域容易产生阶梯现象, 这种现象已经在图像去噪问题中被学者所认识<sup>[3]</sup>. 除了块状的解结构, 在插值图像中也会产生伪边缘.

TV 模型从形式上来说是 Rudin 等人<sup>[4]</sup>提出的如下最小化问题(简称 ROF 模型)的一个特例( $\sigma=0$ )

$$\min_u \int_{\Omega} \|\nabla u(x)\| dx, \quad \text{s. t.} \quad \|f - Hu\|^2 \leq \sigma^2 \quad (3)$$

是一种有效的图像恢复模型. 许多文献提出不同的算法求解上面的最优化问题.

ROF 方法以及与之相似的正则化方法通过惩罚导数来实现,从本质上来说是一种局部的方法. 它只是惩罚图像某个像素点处的灰度值和这点的导数<sup>[5]</sup>,而且在这些模型中用来指示图像特征方向的梯度本身也是一个局部算子<sup>[6]</sup>. 图像梯度包含的信息只局限于一点及它的直接邻域中,而图像边缘曲线本身并不是局部. 正如在文献[7,8]中所指出的那样,这种方法有时会在结果图像中产生块状结构,阶梯边缘,伪边缘等现象,从而误导人们或计算机接收真实图像中并没有的,错误的特征.

为了更好的尊重图像边缘,非局部正则的研究得到发展<sup>[5,9-12]</sup>. Kindermann 等人<sup>[5]</sup>以非局部泛函作为正则项,首次提出非局部均值邻域滤波. 徐焕宇等<sup>[9]</sup>把自适应构造字典的稀疏表示与非局部 TV 结合起来,提出一种基于投影的非局部正则化图像复原方法. Fei Zhou, Shu-Tao Xia, 和 Qingmin Liao<sup>[10]</sup>在 2014 年考虑了像素的时空非局部性,基于块相似性进行加权提出多曲面拟合超分辨率重建. Shuo Yang, Jian-Xun Li<sup>[11]</sup>等人 2015 年结合非局部块结构距离和局部像素距离提出空间不变形态学结构元用于图像恢复. Jian Ji, Ke-Lu Wang<sup>[12]</sup>在 2014 年运用改进的非局部方法获取非局部空间信息减小噪声对 SAR 图像分割的影响. Gilboa 和 Osher<sup>[13]</sup>提出了一个非局部的能量泛函,这种能量泛函能够更好地处理图像中的纹理和重复结构. Peyré 等人<sup>[14]</sup>把 TV 运用到非局部图(nonlocal graph)上,实现对线性逆问题的正则化. Elmoataz<sup>[15]</sup>等人提出了一个由具有拓扑性质的加权图所表示的非局部离散 p-Laplacian 正则. 这些工作可以看作是图像 TV 正则的非局部形式. 在大多数正则框架中,图像被当作是连续域上的连续函数. 因此,图像处理的连续能量泛函通常是由它相应的 Euler-Lagrange 方程或相应的梯度下降流求解. 然而,这些非局部模型中涉及的微分算子的离散化对高维数据或图像往往具有一定的困难<sup>[15]</sup>. 因此,对高维数据和图像如何离散化微分算子是非局部正则的一个重要任务.

本文对图像的非局部加权梯度(高维图像数据)进行研究,提出了一个非局部特征向量方向图像插值方法. 首先,非局部曲率被表示成高阶方向导数的形式,其高阶方向就是图像的非局部加权梯度. 然后,本文分析了图像特征方向与图像的非局部梯度之间的关系. 事实上,这种形式与局部曲率在形式上是一致的,这说明用非局部梯度表示图像特征方向是合理的. 最后,本文

用局部的 Hessian 矩阵的特征值近似计算非局部曲率,从而简化算法的离散化. 无论是从主观的视觉评价,还是从客观的全局性能评价(峰值信噪比),实验结果都验证了本文方法既能很好地重建插值图像的边缘,又不会在插值图像中产生伪影或图像边缘失真.

## 2 图像特征方向的 Hessian 矩阵提取方法

应用于图像去噪,图像分割,图像修补,图像插值领域中的各向异性扩散方法往往采用图像梯度作为图像特征(边缘,线,波纹等)的方向——梯度方向看作是跨越图像特征的方向而与梯度正交的方向看作是沿着图像特征的方向. 然而,这种广泛使用的梯度方向并不能精确指示图像的特征方向. Carmona 和 Zhong<sup>[6]</sup>详细讨论了梯度在指示图像中的边缘,线和波纹三种特征时出现的问题,并提出了提取图像特征方向的 Hessian 方法. 梯度用具有最大模的一阶方向导数所在方向作为跨越图像特征方向,与之不同的是, Hessian 方法以最大的二阶方向导数所在方向作为跨越图像特征的方向,与这个方向正交的方向作为图像特征方向. 二阶方向导数的计算通过 Hessian 矩阵来实现.

在图像  $u$  中一点  $(x, y)$  处的 Hessian 矩阵为

$$G_2 = \begin{bmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{bmatrix} \quad (4)$$

其两个特征值  $\lambda_1, \lambda_2$  由下式给出

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} [u_{xx} + u_{yy} + \sqrt{(u_{xx} - u_{yy})^2 + 4u_{xy}^2}] \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} [u_{xx} + u_{yy} - \sqrt{(u_{xx} - u_{yy})^2 + 4u_{xy}^2}] \end{aligned} \quad (5)$$

记绝对值最大的特征值为  $\lambda_\eta$ , 另一个特征值记为  $\lambda_\xi$ , 相应的特征向量分别记作  $\mathbf{v}_\eta, \mathbf{v}_\xi$ . 显然,  $\lambda_\eta$  的值取决于  $u_{xx} + u_{yy}$  的符号,

$$\lambda_\eta = \begin{cases} \lambda_1, & u_{xx} + u_{yy} > 0 \\ \lambda_2, & u_{xx} + u_{yy} < 0 \\ \lambda_1 \text{ (or } \lambda_2), & u_{xx} + u_{yy} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

特征向量  $\mathbf{v}_\eta$  是所有方向中二阶方向导数最大的方向,这个方向被看作是跨越图像特征的方向,也是图像灰度变化最大的方向;而  $\mathbf{v}_\xi$  是与它正交的方向,被看作是沿着图像特征的方向. 沿着方向  $\mathbf{v}_\xi$  的能量扩散可以表示为

$$u_t = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}} \lambda_\xi \quad (7)$$

它能够更好的保持图像的边缘. 然而, Hessian 矩阵反映的是图像中一点及其局部邻域的信息,这种方法从本质上来说仍然是一种局部的模型,并不能很好的刻画图像特征.

## 3 问题的提出

设  $\Omega$  是图像域,  $u(x): \Omega \rightarrow R, x \in \Omega$  是实值函数.

TV (局部) 正则模型(2)对应的 Euler-Lagrange 方程为

$$u_t = \kappa \|\nabla u\| + \alpha H^T (Hu - f) \quad (8)$$

式中的  $\kappa$  是局部梯度意义下的欧拉曲率. 式(8)与 Perona 和 Malik 的各向异性扩散<sup>[16]</sup>密切相关, 它使图像能量沿着图像梯度正交方向而不是梯度方向扩散, 从而避免对插值图像边缘的模糊. 式(8)从几何的观点可以解释为, 图像能量在人工时间  $t$  的演化过程中会保持图像轮廓的位置和强度, 同时沿着图像特征方向光滑以保持图像边缘的清晰度. 但是, 如文献[6]所述, 图像梯度方向  $\nabla u / \|\nabla u\|$  不能精确指示跨越图像特征的方向, 而非局部梯度能充分利用图像自身的空间结构信息同时处理光滑区域与纹理区域, 最大程度地复原图像的原有细微结构. 因此, 非局部 TV 正则模型能充分利用 TV 正则与非局部模型的优点更好地实现图像插值.

在机器学习的背景下 Zhou 和 Scholkopf 定义了图上的梯度和导数<sup>[17]</sup>. Gilboa 和 Osher<sup>[13]</sup>在非局部框架下扩展了非局部导数的定义, 其定义如下

$$\partial_y u(x) = \sqrt{w(x, y)} (u_y - u_x) \quad (9)$$

其中权函数  $w(x, y)$  是一个非负对称的,  $w(x, y) \geq 0$ ,  $w(x, y) = w(y, x)$ . 进一步, 非局部梯度  $\nabla^w u(x)$  定义为所有偏导数构成的向量:

$$\nabla^w u(x) = (\sqrt{w(x, y)} (u_y - u_x))_y \in \mathbb{R}^n, x, y \in \Omega \quad (10)$$

由上面定义的非局部梯度, 图像的非局部 TV 能量泛函可以按如下定义

$$\begin{aligned} J_w(u) &= \int_{\Omega} \|\nabla^w u\| dx \\ &= \int_{\Omega} \sqrt{\int_{\Omega} (u(y) - u(x))^2 w(x, y) dy} dx \end{aligned} \quad (11)$$

根据式(11), 局部 TV 模型(2)的非局部形式可以通过求解在约束条件  $f = Hu$  下的最优化问题

$$\min_u \int_{\Omega} \|\nabla^w u\| dx \quad (12)$$

来实现. 式(12)的欧拉的方程为

$$\kappa_w := \operatorname{div} \left( \frac{\nabla^w u(x)}{\|\nabla^w u(x)\|} \right) = 0 \quad (13)$$

这里  $\kappa_w$  是图像  $u$  的水平线在非局部梯度下的欧拉曲率. 更一般地, 它可以改写为

$$\kappa_w \|\nabla^w u(x)\| = 0 \quad (14)$$

与(8)相类似, 我们也可以希望通过求解式(12)对应的 Euler-Lagrange 方程

$$u_t = \kappa_w \|\nabla^w u(x)\| + \alpha H^T (Hu - f) \quad (15)$$

实现图像插值.

非局部曲率  $\kappa_w$  通常定义为<sup>[13]</sup>

$$\begin{aligned} \kappa_w &= \operatorname{div} \left( \frac{\nabla^w u(x)}{\|\nabla^w u(x)\|} \right) \\ &:= \int_{\Omega} (u(y) - u(x)) w(x, y) \\ &\quad \cdot \left( \frac{1}{\|\nabla^w u(x)\|} + \frac{1}{\|\nabla^w u(y)\|} \right) dy \end{aligned} \quad (16)$$

其中,  $\|\nabla^w u\|(s) := \sqrt{\int_{\Omega} (u(t) - u(s))^2 w(x, y) dt}$ .

可以看出上面的表达式是非常复杂的, 离散化困难, 运算复杂高. 因此, 有效的近似非局部曲率, 提高运算效率是求解非局部 TV 正则的重要任务. 在下一节, 本文将对非局部曲率提出一个新的便于离散化的表达式.

## 4 非局部特征方向 TV 正则图像插值

### 4.1 非局部曲率近似

对图像域  $\Omega$  中一点  $x$ , 我们选取大小为  $m \times m$  ( $m$  是奇数) 的块来计算非局部曲率. 这样, 式(10)中非局部梯度  $\nabla^w u(x)$  是一个包含  $m^2 - 1$  个分量的向量, 我们可以把它看作是二维图像中方向向量的高维表示. 按通常的习惯,  $\nabla^w u(x)$  表示为  $\nabla^w u(x) = (u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n})^T$ ,  $n = m^2 - 1$ , 非局部曲率  $\kappa_w$  可计算如下:

$$\begin{aligned} \kappa_w &= \operatorname{div} \left( \frac{\nabla^w u}{\|\nabla^w u\|} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{u_{x_i}}{\|\nabla^w u\|} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{\|\nabla^w u\|^3} (u_{x_i} \sum_{j=1}^n u_{x_j}^2 - \sum_{j=1}^n u_{x_i} u_{x_j} u_{x_j x_i}) \\ &= \frac{1}{\|\nabla^w u\|^3} (\nabla^w u)^T (\operatorname{tr}(\mathbf{G}_n) \mathbf{E} - \mathbf{G}_n) \nabla^w u \\ &= \frac{1}{\|\nabla^w u\|} \left( \frac{\nabla^w u}{\|\nabla^w u\|} \right)^T (\operatorname{tr}(\mathbf{G}_n) \mathbf{E} - \mathbf{G}_n) \left( \frac{\nabla^w u}{\|\nabla^w u\|} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

其中,  $\mathbf{G}_n$  是图像  $u$  在  $x$  处的 Hessian 矩阵

$$\mathbf{G}_n = \begin{pmatrix} u_{x_1 x_1} & u_{x_1 x_2} & \cdots & u_{x_1 x_n} \\ u_{x_2 x_1} & u_{x_2 x_2} & \cdots & u_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{x_n x_1} & u_{x_n x_2} & \cdots & u_{x_n x_n} \end{pmatrix} \quad (18)$$

$\operatorname{tr}(\mathbf{G}_n)$ ,  $\mathbf{E}$  分别是矩阵  $\mathbf{G}_n$  的迹以及单位阵. 这个非局部欧拉曲率  $\kappa_w$  与 (局部) 欧拉曲率  $\kappa$  相比存在两点缺陷: 缺乏直观的几何意义以及二阶混合偏导数表示与离散化困难, 而二阶混合偏导数  $u_{x_i x_j}$  的表示困难直接导致式(15)求解的困难.

为了得到非局部曲率的有效近似, 可以通过分析 Hessian 矩阵  $\mathbf{G}_n$  的特征值、特征向量与图像特征方向之间的关系入手. 从线性代数的知识, 可以知道: 存在正交阵对角化实对称矩阵  $\mathbf{G}_n$ , 其中对角阵的元是  $\mathbf{G}_n$  的实数特征值, 正交阵的列向量是对应的单位特征向量. 不妨

设  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$  是  $\mathbf{G}_n$  的特征值,  $\mu_y$  是其中绝对值最大的特征值,  $\mathbf{v}_y$  是对应的特征向量. 接下来, 本文通过研究局部 Hessian 矩阵的特征向量与图像特征方向之间的关系导出  $\mathbf{v}_y$  与图像特征方向之间的关系.

传统的 PDE、变分方法以图像梯度作为跨越图像特征的方向, 即  $(u_x, u_y) / \|\nabla u\|$ , 其正交方向为  $(u_y, -u_x) / \|\nabla u\|$ , 容易推出

$$\begin{aligned} u_{\eta\eta} &= \frac{1}{\|\nabla u\|^2} (u_x, u_y) \begin{bmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \\ &= \frac{u_{xx}u_x^2 + 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}u_y^2}{\|\nabla u\|^2} \\ u_{\xi\xi} &= \frac{1}{\|\nabla u\|^2} (u_y, -u_x) \begin{bmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_y \\ -u_x \end{pmatrix} \\ &= \frac{u_{xx}u_y^2 - 2u_{xy}u_xu_y + u_{yy}u_x^2}{\|\nabla u\|^2} \end{aligned} \quad (19)$$

上面说明,  $u_{\xi\xi}$  和  $u_{\eta\eta}$  都是梯度方向上的二阶方向导数, 而且  $u_{\xi\xi}$  就是局部梯度意义下的欧拉曲率  $\kappa$ . 经典 Perona-Malik 方程  $u_t = \text{div}(g(\|\nabla u\|)\nabla u)$  是个各向异性扩散方程, 其展开形式就与这两个二阶方向导数有关:

$$\begin{aligned} u_t &= \left\{ g(\|\nabla u\|) \left[ 1 + \frac{\|\nabla u\| g'(\|\nabla u\|)}{g(\|\nabla u\|)} \right] \right\} u_{\eta\eta} \\ &\quad + g(\|\nabla u\|) u_{\xi\xi} \end{aligned} \quad (20)$$

其一般形式为

$$u_t = au_{\eta\eta} + bu_{\xi\xi} \quad (21)$$

通过设计不同的参数或参数函数  $a, b$  可以控制两个不同方向上的二阶方向导数的大小, 从而在图像能量泛函沿图像梯度方向与其正交方向扩散的过程中实现对扩散强度的控制, 完成图像处理任务.

文献[6]指出 Hessian 矩阵的最大特征值对应的特征向量改善了图像特征方向刻画的准确性. 事实上, 由 Hessian 矩阵  $\mathbf{G}_2$  的最大特征值  $\lambda_\eta$ , 相应的单位特征向量  $\mathbf{v}_\eta$  之间的关系  $\mathbf{G}_2\mathbf{v}_\eta = \lambda_\eta\mathbf{v}_\eta$ , 可得

$$\lambda_\eta = \mathbf{v}_\eta^T \mathbf{G}_2 \mathbf{v}_\eta \quad (22)$$

上式说明, 最大特征值  $\lambda_\eta$  是最大的二阶方向导数, 对应的特征向量  $\mathbf{v}_\eta$  刻画了在这个方向上图像灰度变化最大. 而且与式(21)相同,  $u_t = a\lambda_\eta + b\lambda_\xi$  也保持了各向异性的扩散性能, 它使图像能量泛函分别朝着改善的方向扩散.

与局部的二阶 Hessian 矩阵相比, 非局部 Hessian 矩阵刻画了更多的图像信息, 包括图像特征信息, 其特征向量更能反映图像特征方向; 而且与二阶 Hessian 矩阵情况相同,  $n$  阶 Hessian 矩阵的特征向量  $\mathbf{v}_y$  是所有方向中具有最大二阶方向导数的方向, 也就是说沿着这个方向图像灰度变化最大, 从而可以把它看作是跨越图像特征的方向. 另一方面, 图像非局部梯度本身克服了

局部梯度的局部性, 同样包含了更多的图像特征信息, 图像的非局部梯度  $\nabla^w u(x)$  充分刻画了图像一点处灰度的变化, 隐式地表示了图像的特征方向. 因此, 特征向量  $\mathbf{v}_y$  可以用单位非局部梯度  $\nabla^w u(x) / \|\nabla^w u(x)\|$  来刻画, 即

$$\mathbf{v}_y = \left( \frac{\nabla^w u}{\|\nabla^w u\|} \right)^T \mathbf{G}_n \left( \frac{\nabla^w u}{\|\nabla^w u\|} \right) \quad (23)$$

结合式(15), 式(17), 式(23), 非局部 TV 图像插值模型可以重新改写为

$$u_t = \text{tr}(\mathbf{G}_n) - u_y + \alpha \mathbf{H}^T (\mathbf{H}u - f) \quad (24)$$

但是由于 Hessian 矩阵  $\mathbf{G}_n$  中二阶混合偏导数表示的困难, 直接求解  $\mu_y$  是不可行的, 即使能够表示也会很复杂. 事实上, 在图像插值的过程中我们并不希望图像能量扩散沿着跨越图像特征的方向进行, 而是希望沿着图像特征方向进行. 在方程(24)中, 减掉  $\mu_y$  (最大二阶方向导数) 这一项也说明方程(24)是通过抑制跨越图像特征方向的扩散来实现的, 而抑制的程度通过  $\mu_y$  绝对值的大小来体现. 因此, 如果我们用(6)中局部最大特征值  $\lambda_\eta$  代替  $\mu_y$  并不改变非局部梯度  $\nabla^w u(x) / \|\nabla^w u(x)\|$  指示图像特征方向这一事实, 而它们之间的数值误差只影响上述抑制的程度. 另一方面, 在图像特征处的局部最大特征值  $\lambda_\eta$  与非局部最大特征值  $\mu_y$  之间在量上的差异是很小的, 因此用  $\lambda_\eta$  代替  $\mu_y$  是合理的. 由此, 我们的图像插值模型可以表示为

$$u_t = \text{tr}(\mathbf{G}_n) - \lambda_\eta + \alpha \mathbf{H}^T (\mathbf{H}u - f) \quad (25)$$

方程(25)中非局部正则的特性体现着  $\text{tr}(\mathbf{G}_n)$  中.

## 4.2 模型的离散化与算法描述

下面我们举例说明  $\text{tr}(\mathbf{G}_n)$  中的二阶偏导数  $u_{x_i x_i}$  的离散化. 如图1所示, 图像  $u$  在像素位置  $(i, j)$  处沿着右上  $22.5^\circ$  方向以及  $45^\circ$  方向上的二阶偏导数可按如下方式计算

$$\begin{aligned} u_{x_i x_i} &= \frac{u_{i-2,j+4} - u_{i-1,j+2} - u_{i-1,j+2} - u_{i,j}}{\sqrt{5}}, \\ u_{x_i x_i} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{u_{i-2,j+2} - u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i,j}}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

其他方向上的二阶偏导数可以类似定义.

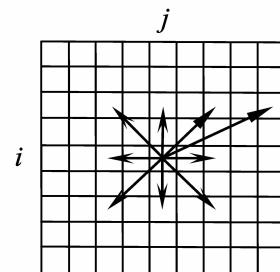


图1 二阶方向导数离散化

记  $h$  和  $\Delta$  为空间和时间步长,  $(x_i; x_j) = (ih; jh)$  是网格点,  $u^n(i; j)$  是函数  $u(n\Delta t; x_i; x_j)$  的近似, 其中  $n \geq 0$ . 方程式(25)的实现步骤如下: 对每个  $n > 0$  (每步的  $u^n$ ),

①用式(26)的方式计算所有的二阶偏导数及  $tr(\mathbf{G}_n)$ .

②用式(5), 式(6)计算  $\lambda_n$ , 其中的二阶偏导数按通常的中心差分计算.

③用如下的式子迭代, 直到方程式(25)达到稳定状态解:

$$\frac{u^{n+1}(i, j) - u^n(i, j)}{\Delta t} = tr(\mathbf{G}_n) - \lambda_n + \alpha \mathbf{H}^T (\mathbf{H}u - f)_{ij} \quad (27)$$

## 5 实验结果

在这一节, 我们用式(27)对自然图像、纹理图像进行插值, 以说明提出算法的有效性. 插值结果显示在图2~图6中, 其中图2、3显示了2倍插值结果, 图4~图6显示了3倍插值结果. 插值输入图像是原始图像用 Matlab 函数 `imresize` 获得, 它包含了经过低通滤波和下采样过程. 这些输入图像用3.2节的算法再恢复到原始图像尺寸大小从而实现插值. 同时, 以 Belahmidi 和 Guichard 提供的方法<sup>[18]</sup> (本文称为 BG 方法) 以及自适应稀疏域正则方法 (ASDSAR)<sup>[19]</sup> 的实验结果作为对比实验. ASDSAR 方法的实验结果由作者提供的软件实现, 软件可从以下网址获得 <http://www4.comp.polyu.edu.hk/~cslzhang/papers.htm>. 实验参数的优选基于观察者对图像边缘是否清晰, 是否有锯齿现象, 在平坦区域或边缘附近是否有振铃现象等的主观评价做出. 在我们所有实验中  $\alpha$  在  $[0.01, 0.05]$  取值以及热扩散 BG 模型中  $k$  取 0.0001 具有较好的视觉效果, 所有实验中时间步长  $\Delta t = 0.15$ . 上述参数的选择变化不大时, 插值结果主观视觉效果和客观评价指标并没有明显的改善.

与其他算法相比较, 本文的算法真实地重构了低分辨率图像中的细微信息, 这正是图像插值问题所希望获得的效果. 在图2、3的纹理图像中, 本文算法重构

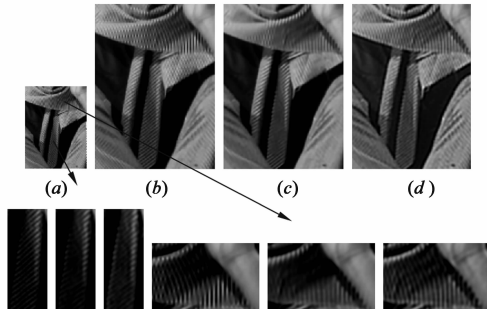


图2 Barbara图像(部分)2倍缩放结果及局部100%显示 (a)LR图像; (b)BG方法; (c)ASDSAR方法; (d)本文方法

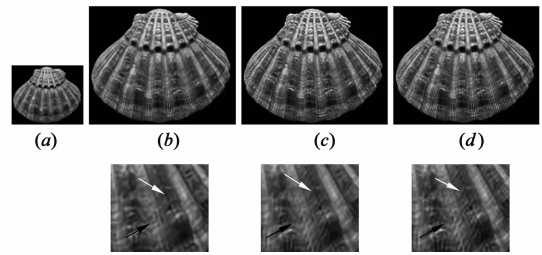


图3 贝壳图像2倍缩放结果及局部100%显示 (a)原始图像; (b)BG方法; (c)ASDSAR方法; (d)本文方法

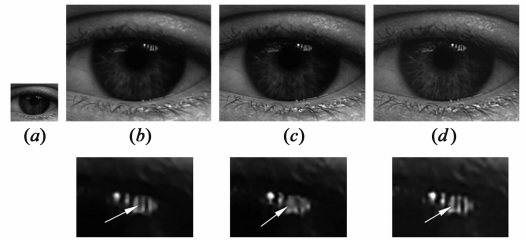


图4 眼睛图像3倍缩放结果及局部100%显示 (a)LR图像; (b)BG方法; (c)ASDSAR方法; (d)本文方法

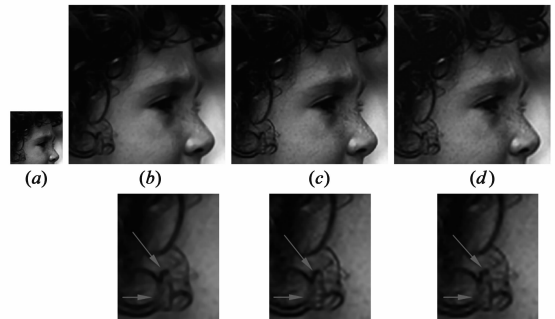


图5 女孩图像3倍缩放结果及局部100%显示 (a)LR图像; (b)BG方法; (c)ASDSAR方法; (d)本文方法

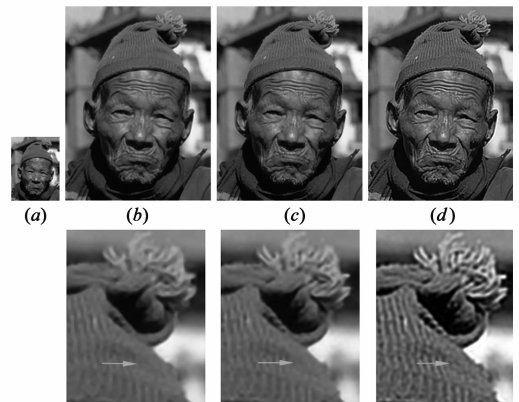


图6 老人图像3倍缩放结果及局部100%显示 (a)LR图像; (b)BG方法; (c)ASDSAR方法; (d)本文方法

的围巾条纹(图像上部)、贝壳纹理看起来比其他算法获得的结果更正确、更清晰清楚. 在图2的领带处 ASD-

SAR 算法不能清晰地重构领带条纹;虽然 BG 算法在领带处的条纹比本文算法产生的条纹更清晰,但是在围巾处 BG 算法产生的条纹出现了失真,而在有些地方 ASDSAR 算法不能重构出条纹.在图 3 中 BG 算法过度光滑了图像纹理,使贝壳中的条纹比较模糊;ASDSAR 算法重构的纹理稍好,但本文算法获得的纹理更清晰一些.在图 4 的人眼中,第三个栅栏在 ASDSAR 算法中几乎看不出来,BG 算法虽然重构出了第三栅栏,但是第三和第四栅栏的模糊是显而易见的,本文算法不仅很好的构造出了全部栅栏而且第一和第二栅栏的视觉感更真实,细节更清楚.在图 5 中可以清楚的看出女孩鬓角的头发在 BG 算法中被过度光滑了,在斜向下的箭头处 ASDSAR 算法把女孩的头发重构成了圆弧形的,出现了失真,真实的形状应该是 BG 算法和本文算法重构的样子.另外,在水平箭头指示的地方 ASDSAR 算法也出现了一定程度的失真.在图 6 中老人帽子顶端的花在 BG 算法和 ASDSAR 算法中都是比较模糊的,本文算法产生了更清晰的花的边缘,而在花下面的绒毛处,BG 算法和 ASDSAR 算法产生的条纹是模糊的,而且在箭头所指处这两个算法都不能重构出条纹来,本文算法不仅获得了条纹而且条纹还比较清晰.

我们用平均结构相似度指标 (MSSIM)<sup>[20]</sup> 来刻画原始参考图像与插值输出图像之间的差异.文献[21]认为 MSSIM 指标比峰值信噪比 (PSNR) 或其他指标更能刻画图像的视觉质量的好坏. MSSIM 指标取之于 [0, 1], 值越大图像的视觉质量越好,其计算原始代码参见 <http://www.cns.nyu.edu/lcv/ssim/> (用缺省的参数). 本文所使用的测试图像有 Barbara 图像, 女孩图像, 眼睛图像, 老人以及鹦鹉图像, 用他们去计算 MSSIM, 从客观指标上对几种算法进行比较. 表 1 显示了几种算法对测试图像计算的 MSSIM, 从表中可以看出本文方法的客观指标在所有实验中都有明显的改善. 这表明本文的非局部模型具有较好的效果.

表 1 不同算法 MSSIM 值比较

method image	BG	ASDSAR	proposed
barbara	0.9088	0.7801	0.9296
girl	0.9431	0.8242	0.9426
eye	0.9248	0.8929	0.9652
old man	0.9489	0.9426	0.9563
Parrot	0.9547	0.9093	0.9631
Beike	0.8542	0.7971	0.9023

## 6 结束语

本文提出了一种结合图像局部信息的非局部特征方向图像插值方法. 这种以图像的非局部梯度方向而不是传统的梯度方向作为图像的特征方向, 克服了传统梯度的局部限制. 它使图像能量泛函沿着图像特征

方向进行扩散从而避免对图像边缘的模糊. 扩散过程中的扩散强度由局部 Hessian 矩阵的特征值控制, 其优点是便于数值算法的离散化. 然而, 非局部方法本身不可避免的存在着算法计算复杂度高的问题, 如何进一步在保持非局部优点的同时简化计算复杂度是广大学者进一步研究的课题, 也是本文今后的工作.

## 参考文献

- [1] 詹毅, 王明辉, 万群, 李梦. TV 图像插值的双方向扩散改进算法[J]. 软件学报, 2009, 20(6): 1694 – 1702.  
Zhan Y, Wang MH, Wan Q, Li M. Modified algorithm with bidirectional diffusion for TV image interpolation[J]. Journal of Software, 2009, 20(6): 1694 – 1702. (in Chinese)
- [2] Ng MK, Shen H, Lam EY, Zhang L. A total variation regularization based super-resolution reconstruction algorithm for digital video [J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2007, 2007: 074585 doi: 10. 1155/2007/74585.
- [3] Ring W. Structural properties of solutions to total variation regularization problems [J]. Math. Model. Numer. Anal. , 2000, 34(4): 799 – 810.
- [4] Rudin LI, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1992, 60(1 – 4): 259 – 268.
- [5] Kindermann S, Osher S, Jones PW. Deblurring and denoising of images by nonlocal functional [J]. SIAM Multi-scale Modeling and Simulation. 2005, 4(4): 1091 – 1115.
- [6] Carmona RA, Zhong S. Adaptive smoothing respecting feature directions [J]. IEEE Trans. Image Processing 1998, 7(3): 353 – 358.
- [7] Wolfgang R. Structural properties of solutions to total variation regularization problems [J]. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 2000, 34 (04): 799 – 810.
- [8] Dobson DC, Santosa F. Recovery of blocky images from noisy and blurred data [J]. SIAM J. Appl. Math. 1996, 56(4): 1181 – 1198.
- [9] 徐焕宇, 孙权森, 李大禹, 宣丽. 基于投影的稀疏表示与非局部正则化图像复原方法 [J]. 电子学报, 2014, 42(7): 1299 – 1304.  
Xu H, Sun Q, Li D Y, Xuan L. Projection based image restoration via sparse representation and nonlocal regularization [J]. Acta Electronica Sinica, 2014, 42(7): 1299 – 1304. (in Chinese)
- [10] F Zhou, S T Xia, Q Liao. Nonlocal pixel selection for multisurface fitting-based super-resolution [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, 2014, 24(12): 2013 – 2017.

- [11] S Yang, J X Li. Nonlocal patch-based method on spatially-variant amoeba morphology for image restoration[J]. *Optik*, 2015, 126(2): 283 – 288.
- [12] J Ji, K L Wang. A robust nonlocal fuzzy clustering algorithm with between-cluster separation measure for SAR image segmentation[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 2014, 7(12): 4929 – 4936.
- [13] Gilboa G, Osher S. Nonlocal operators with applications to image processing[J]. *Multiscale Model. Simul.*, 2008, 7(3): 1005 – 1028.
- [14] Peyré G, Bogleux S, Cohen L. Non-local regularization of inverse problems[A]. In: *ECCV 08: European Conference on Computer Vision*[C]. Springer, Berlin, 2008, 57 – 68.
- [15] Elmoataz A, Lezoray O, Bogleux S. Nonlocal discrete p-Laplacian driven image and manifold processing[J]. *C. R. Mecanique*, 2008, 336(5): 428 – 433.
- [16] Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 1990, 12(7): 629 – 639.
- [17] Zhou D, Scholkopf B. Regularization on Discrete Spaces[M]. *Pattern Recognition Lecture Notes in Computer Science*, 2005, vol. 3663: 361 – 368.
- [18] Belahmidi A, Guichard F. A partial differential Equation approach to image zoom[A]. In *2004 International Conference on Image Processing*[C]. Edited by IEEE, 2004, 1: 649 – 652.
- [19] Dong W, Zhang L, Shi G, Wu X. Image deblurring and super-resolution by adaptive sparse domain selection and adaptive regularization[J]. *IEEE Trans. Image Process.* 2011, 20(7): 1838 – 1857.
- [20] Wang Z, Bovik A, HR S, EP S. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity[J]. *IEEE Trans. Image Process.* 2004, 13(4): 600 – 612.
- [21] Roussos A, Maragos P. Vector-valued image interpolation by an anisotropic diffusion-projection PDE[A]. *1st International Conference on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision, Lecture Notes in Computer Science*[C]. Ischia, Italy, 2007, vol. 4485: 104 – 115.

#### 作者简介



詹毅(通信作者) 男, 1971年出生, 重庆人, 2009年在四川大学计算机学院获得博士学位, 现为重庆工商大学副教授, 主要研究领域为偏微分方程图像恢复, 图像重建, 非局部理论及应用研究。

E-mail: zhanyi@ctbu.edu.cn



李梦 女, 1973年出生, 四川开江人, 2012年在重庆大学数学与统计学院获得博士学位, 现为重庆文理学院副教授, 主要研究领域为偏微分方程及其在图像处理中的应用。

E-mail: limeng7319@163.com