

一种迭代正弦频率估计硬件实现研究

彭晓燕, 甘露, 魏平

(电子科技大学电子工程学院, 四川成都 610054)

摘要: 本文提出了一种基于迭代算法的八通道滤波器组单频正弦信号频率估计方法, 该算法的基本思想是利用频域重叠的多通道滤波器来实现大的频率估计范围, 同时提高单通道内的信噪比; 还对滤波抽取后的数据进行迭代, 这样即使采用运算量最小的不加权线性预测算法也能实现高精度测频, 并采用 FPGA 实现了该算法, 最后数值仿真结果证实所提算法的优异性能。

关键词: 频率估计; 迭代算法; 滤波器组

中图分类号: TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2009) 11-2452-05

Hardware Implementation an Iterative Algorithm for Single-Frequency Estimation

PENG Xiao-yan, GAN Lu, WEI Ping

(Department of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 610054, China)

Abstract: A novel iterative algorithm based on eight channel filter bank to estimate single-frequency is proposed. A highly overlapped filter bank is adopted in the proposed method to extend frequency estimation range and increasing SNR in single channel. By exploiting filter and decimation, the iterative algorithm is applied. Through this way the computational complexity is kept low and estimation is accurate, even adopting the simplest estimation method, Un-Weighted Linear Predictor (UWLP). Furthermore this frequency estimator has been realized by FPGA. The computer simulation result shows the proposed method has good performance.

Key words: frequency estimation; iterative algorithm; filter banks

1 引言

对淹没在噪声中的正弦波信号进行频率估计是信号处理的一个经典课题, 如电子对抗中跳频信号频点检测与估计、突发通信中的多普勒频率估计、数字通信中的载波同步等领域有着广泛的应用。如何快速、精确地估计频率一直以来都是一个备受关注的问题, 比较单频正弦信号测频方法性能主要从测频精度、信噪比门限、测频范围、计算复杂度等方面来考察。通常测频算法只能在一个或是几个方面达到最优, 因而需要根据工程中面临的实际情况来平衡几个方面性能。

典型的高斯白噪声下的正弦信号模型可以表示为

$$x(n) = A \exp(j(\omega_0 n + \phi)) + v(n), \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (1)$$

其中 A 代表幅度, ϕ 代表初始相位, 它们是未知常数; ω_0 为需要估计的载频, 通常考虑归一化频率 $\omega_0 = 2\pi f / f_s$; $\{v(k)\}$ 代表均值为 0, 方差为 σ^2 的复高斯序列, 此时信

噪比 (SNR) 为 A^2 / σ^2 。单频正弦信号估计的最大似然法是基于寻找周期图的峰值^[1], 如下式

$$\hat{\omega}_0 = \arg \max \{ Y(\omega) \} \quad (2)$$

其中

$$Y(\omega) = \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-j\omega n} \right|^2 \quad (3)$$

单频正弦信号频率估计的 CRB (Cramér-Rao bound) 由文献[1]给出

$$\sigma_{CR}^2 = \frac{6}{N(N^2 - 1)A^2} \quad (4)$$

对于式(2)的直接求解由于计算量大非常困难, 一些次优的算法因为能减小频率估计算法的运算量而提出。在 $SNR \gg 1$ 时, Tretter^[2]将输入信号模型近似为

$$x(n) = A \exp(j(\omega_0 n + \phi + u(n))) \quad (5)$$

其中 $u(n)$ 为输入信号中的噪声 $v(n)$ 的实部, 是零均值、方差为 $\sigma^2/2$ 的高斯白噪声。在此基础上, 发展了一系列的基于相位差的频率估计方法。Kay 提出了加权

的相位平均 (Weighted Phase Average) 方法^[3], 在较高信噪比 $SNR > 6\text{dB}$ 时, 估计误差可以达到 CRB. Kay 方法理论上可以计算的频率范围为 $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, 其主要缺点是低信噪比情况下性能较差, 其门限信噪比还会随着待估频率的增大而增大. Kim 等人在 Kay 方法的基础上, 针对 Kay 方法的高信噪比门限问题, 提出了前置矩形滤波器的思路^[4]. 通过这一预处理, 极大地改善了信噪比门限这一问题, 且只增加了少量的计算量, 然而 Kim 方法的不足在于其频率估计范围极大地减小. 当前置滤波器为长度为 M 的矩形滤波器时, 频率估计器可以获得 $10\log_{10}(M)$ 的增益, 但是其频率估计范围仅为 $(-\frac{1}{4M}, \frac{1}{4M})$, 这种方法是以前置滤波器为代价来达到使频率估计方法适应于低信噪比情况.

另一方面, 从最大谱峰搜索这一思路出发 FITZ 首先推导出一种快速测频方法^[5], 如下式,

$$\hat{\omega}_0 = \arg \left\{ \frac{1}{J+1} \sum_{m=1}^J \frac{6m}{J(J+1)(2J+1)} \arg \{ (N-n) \hat{R}_N(m) \} \right\} \quad (6)$$

其中 $\hat{R}_N(m)$ 是接收序列的自相关, J 是与频率估计范围相关的参数. 该方法的特点是具有低的信噪比门限, 解决了 Kay 方法信噪比门限高的主要缺点, 但是, 同 Kim 方法一样, 却增加了计算量和降低了频率估计的范围^[5], 随后, Luise 和 Reggiannin 在此思路下, 推导出了一个新方法^[6].

$$\hat{\omega}_0 = \arg \left\{ \frac{1}{J+1} \sum_{m=1}^J \hat{R}_N(m) \right\} \quad (7)$$

L&R 方法具有与 Fitz 方法相同的特点, 但是其只需要取一次复数相角.

文献[7]提出的 FCFB (Four Channel Filter Bank) 的方法, 利用四通道滤波器组作为前置滤波器, 改善信噪比门限性能, 同时利用多通道特性来实现与 Kay 方法一样的频率估计范围, 但是这种方法在某些频点上估计精度下降较大. 文献[8]提出一种迭代的频率估计方法, 这种方法既能保证测频范围又能实现在低信噪比下工作, 但是这种方法的运算量较大. 本文提出一种基于迭代算法的八通道滤波器组实现单频信号的测频方法. 前置八通道滤波器组大大增加了频率估计范围, 同时也能提高单信道内的信噪比; 通过对滤波抽取后的数据进行迭代, 使得采用最简单的不加权线性预测 (Unweighted Linear Predictor UWLP) 方法来测频, 也能保证估计误差的均方差接近 CRB, 达到性能的最优化; 同时又能大大降低运算量, 并给出了采用 FPGA 的实现方法.

2 测频方法

本文所提出的方法是基于迭代的多通道滤波器组的测频方法, 下面将先描述基本算法, 再给出完整的迭代过程. 第一步, 将待估计信号 $x(n)$ 通过八个数字下

变频器, 其中心频率分别为 $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ 和 $\frac{3}{4}$ 得到 $y_i(n), i=1, \dots, 8$.

$$y_i(n) = x(n) \exp \left\{ j \frac{i-4}{4} n \right\}, \quad i=1, \dots, 8, n=1, \dots, N \quad (8)$$

值得注意的是, 这些下变频器的运算量很小, 只需要一次复数乘法运算即可, 其余部分仅仅需要改变符号和交换实部与虚部来完成.

将下变频器组输出信号 $y_i(n), i=1, \dots, 8$, 均通过一个四阶, 抽头系数为 $(1, 1, 1, 1)$ 的 FIR 滤波器, 并同时完成滤波与抽取,

$$a_i(k) = y_i(4k-3) + y_i(4k-2) + y_i(4k-1) + y_i(4k), \quad i=1, 2, \dots, 8, k=1, 2, \dots, N/4 \quad (9)$$

显然抽取后的输出 $a_i(k), i=1, 2, \dots, 8$ 的数据率比原来的数据率下降了四倍, 因此后面的计算量得以大大降低. 并且由于采用了线性时不变滤波器组, 因此其输出的噪声也都是高斯白噪声, 因而可以构造出统计量 m 来选择出存在信号的那一路.

$$m = \max \{ |a_1(k)|, |a_2(k)|, \dots, |a_8(k)| \} \quad (10)$$

$$\text{其中 } i = \arg \max_{k=1}^{(N/4)-1} |a_i(k+1) a_i^*(k)|, \quad i=1, 2, \dots, 8.$$

对选取出的子路上的信号, 采用 UWLP^[3] 对信号进行频率估计.

$$\hat{\omega}_f = \arg \left\{ \frac{1}{(N/4)-2} \sum_{k=1}^{(N/4)-1} a_m(k+1) a_m^*(k) \right\} \quad (11)$$

类似于文献[8]中的推导可得 $\hat{\omega}_f$ 是关于 ω_f 的一致估计, 且满足估计方差如下式,

$$\text{var}[\hat{\omega}_f] = \frac{\sigma_n^2}{4^2((N/4)^2-1) |C(\omega_f)|^2} \left[1 + \frac{((N/4)-1) \sigma_n^2}{2 |C(\omega_f)|^2} \right] \quad (12)$$

其中 σ_n^2 为滤波器输出噪声方差, 满足 $\sigma_n^2 = 4 \sigma_c^2$. $C(\omega)$ 为四阶矩形滤波器的幅频响应特性,

$$C(\omega) = A e^{j\omega} \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)} \quad (13)$$

值得注意的是该式的成立需要满足两个条件: 待测频率满足在 $[-1/4, 1/4]$ 区间内; 信噪比足够高. 采用四阶矩形滤波器, 大大提高了输出信噪比, 同时滤波器组的方式使得各个通道内满足测频算法的要求, 又能保证算法的整体测频范围可达 $[-1/4, 1/4]$.

算法的迭代过程如图 1:

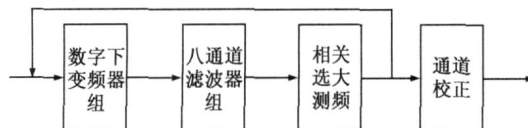


图1 迭代八通道滤波器组测频算法信号处理框图

由图 1 可以看出每次测频中选出的第 m 路信号 $a_m(n)$, 在下次迭代中作为新的输入, 直到满足选出的信号长度小于 4 时, 迭代结束. 之后需要对测频结果进行通道校正, 得到最终的频率估计结果. 具体的校正方法如下,

$$\hat{\omega}_0 = \frac{\hat{\omega}_{jk}^k}{4^k} - \sum_{i=1}^k \frac{m_i - 4}{4^i} \quad (14)$$

其中 $\hat{\omega}_{jk}^k$ 为第 k 次迭代的估计值, $m_i, i = 1, \dots, k$ 表示第 i 次迭代选择的信道编号.

3 性能分析

迭代八通道滤波器组的测频方法的主要计算量在于数字下变频组, 滤波运算, 相关函数计算. 对于长度为 N_i 的信号, 其中数字下变频组仅仅需要一次复数乘法运算, 其余的均可由改变复数的实部, 虚部符号和交换实部与虚部即可完成, 因而只需要 N_i 次复数乘法运算. 由于采用的是矩形滤波器因而其中仅仅涉及加法运算共计 $2N_i$, 其余通路类似于数字下变频器的处理方式可得, 其后的相关函数计算则需要 $8(N_i/4 - 1)$ 次复数乘法, 选择正确的通路需要计算 $8(N_i/4 - 2)$ 次复数加法, 8 次求绝对值运算, 所以每次迭代过程需要共计 $3N_i - 8$ 次复数乘法运算, $4N_i - 16$ 次复数加法. 对于长度为 N 的接收数据共计需要 $0.5\log_2 N - 1$ 次迭代, 且每次迭代数据长度减小为原来的 $1/4$. 因而总的复数乘法次数不会超过 $4N - 8(0.5\log_2 N - 1)$, 复数加法次数不会超过 $\frac{16N}{3} - 16(0.5\log_2 N - 1)$. 表 1 中列出了所提方法与 FCFB 方法计算量的比较, 以及 ILP 方法的计算量比较. 为了公平, 比较表 1 中列出的是 p 阶 FCFB 的运算量^[7], 可以看到 FCFB 方法随着阶数的增加而迅速增大. 当数据点数 $N = 64$ 时, 与 ILP 方法^[8]相比所提算法的运算量也有减小.

表 1 计算复杂度比较表

	复乘	复加	求角
所提方法	$4N - 8(0.5\log_2 N - 1)$	$\frac{16N}{3} - 16(0.5\log_2 N - 1)$	$0.5\log_2 N - 1$
FCFB 方法 ^[7]	$N \cdot 2^p$	$3N \cdot 2^{p-2}N - 2 \cdot 4^p$	$N/2^{p-1}$
ILP 方法 ^[8]	$(N-1)\log_2 N - 3$	$(N-2)\log_2 N - N + 2$	$\log_2 N - 1$

类似于文献[7], [8]中的性能分析我们可得本方法的性能, 当在高信噪比情况下有所提频率估计方法在单通道的估计均方误差为,

$$E[(\hat{\omega}_0 - \omega_0)^2 | i] = \frac{\left(\frac{N}{M_k}\right)^3}{N^3 \left(\frac{\Delta^2}{2}\right) \left(\frac{N}{M_k} - 1\right)^2} \quad (15)$$

其中 $M_k = N/4$, ω_i 为选择的通道的中心频率. 则有

所提方法的估计均方误差

$$E[(\hat{\omega}_0 - \omega_0)^2] = E\left[\sum_{i=1}^8 p(m) \left(\frac{N}{M_k}\right)^3 \right] \quad (16)$$

其中 $p(m)$ 是信道中心频率为 ω_m 的选中概率. 式(13)可与式(4)给出的 CRB 相比得到

$$\frac{E[(\hat{\omega}_0 - \omega_0)^2]}{2 \text{CRB}} = \frac{\sum_{m=1}^8 p(m) \left(\frac{N}{M_k}\right)^3 (N^2 - 1) N}{6N^3 \left(\frac{N}{M_k} - 1\right)} \quad (17)$$

考虑待测频率落入八个通道是等概率分布以及 $M_k = N/4$, 则有估计均方误差与 CRB 相比仅仅恶化 0.34dB.

4 高速硬件实现

从上面的分析可以看到, 算法中的主要运算量集中在取复数相角运算. 目前通常采用查表法以及 CORDIC (Coordinate Rotation Digital Computer)^[9]算法来实现, 但是这两种方法均存在各自的问题, 如查表法虽然能实现高精度快速计算, 但是其硬件资源消耗大, CORDIC 算法能实现较高精度计算, 但是其存在着硬件实现难度大, 计算时间长的缺点. 本文提出了拉格朗日多项式逼近反正切函数的方法来实现复数相角的求解.

在 FPGA 中, 接收数据实部和虚部是分开存储的, 实现取相位运算, 需要用到除法运算和反正切运算.

$$a_n = \arctan(a_m / a_{in}) \quad (18)$$

其中除法运算器可以利用 IP 核来实现, 反正切运算可以利用文献[10]中提出了采用拉格朗日多项式实现函数逼近的方法来实现. 考虑到正切函数的奇函数并且满足下式

$$\tan(z + \pi/4) = (1 + \tan z) / (1 - \tan z) \quad (19)$$

通过如下映射关系:

(a) 若 $z > 1, x = (z - 1) / (z + 1), y = \pi/4 + \arctan x$.

(b) 若 $0 < z < 1, x = z, y = \arctan x$.

(c) 若 $-1 < z < 0, x = -z, y = -\arctan x$.

(d) 若 $x < -1, x = (-z - 1) / (-z + 1),$

$$y = -\pi/4 - \arctan x.$$

则只需要考虑反正切函数定义域为 $[0, 1]$, 大大简化了硬件设计的复杂度, 对此定义域上的函数, 采用 8 段均匀的拉格朗日插值法来实现, 还能进一步的降低逼近误差. 图 2 是按照上述方法用 FPGA 实现取相位运算的原理图, 其中 convert_x 和 convert_y 模块分别是区间映射和反射模块. 在 Cyclone 系列 FPGA EP1C12Q240C8 的硬件平台上实现上述方案, 位宽为 16 位时, 需要 1003 个 LE.

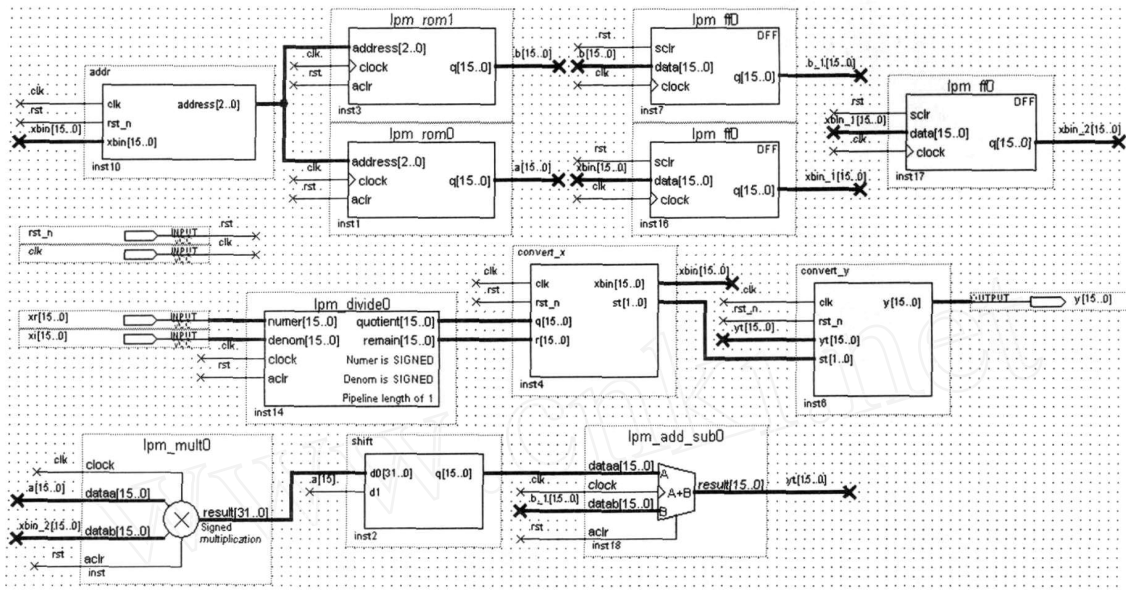


图2 FPGA实现取相位运算原理图

在 Cyclone 系列 FPGA EP1C12Q240C8 的硬件平台上实现所提方法方法的计算需用 1531 个 LE, 系统在 $\log_4(N) + 1$ 个时钟周期后得出频率估计结果, 其中 N 为输入信号长度. 在 EP1C12Q240C8 的平台上, 系统时钟最高为 120MHz, 当输入信号长度为 256 点时, 测频时间为 130. 2ns.

5 计算机仿真结果

本节给出了所提算法的计算机仿真实验结果, 并与 FCFB、ILP 算法的相应结果进行了比较. 图 3 是归一化频率为 $\omega_0 = 0.25$, 数据点数为 $N = 256$ 点时, 利用所提算法估计频率, 得到估计均方误差随着信噪比变的曲线, 可以看出每次迭代后, 估计误差都会得到很大的改善, 第三次迭代后估计精度就很接近于 CRB 界. 图 4

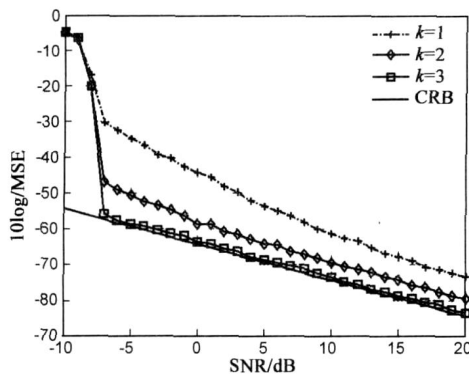


图3 $N=256$ 点, $\omega_0=0.25\pi$

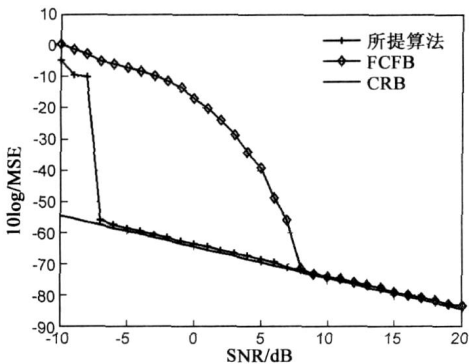
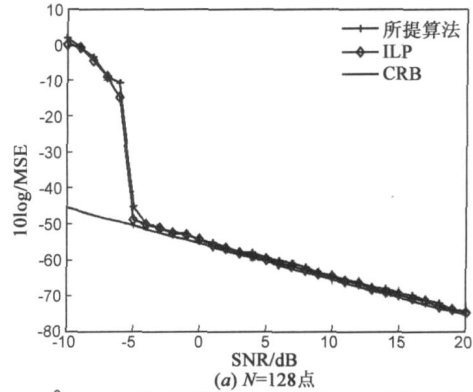


图4 $N=128$ 点, $\omega_0=0.25\pi$

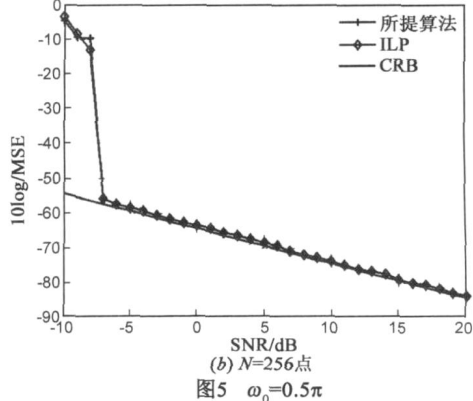


图5 $\omega_0=0.5\pi$

是归一化频率为 $\omega_0 = 0.25$, 数据点数为 $N = 256$ 点时, 所提算法与 FCFB 方法频率估计误差曲线. 从图中可看出本文方法的 SNR 门限值比 FCFB 方法有很大的改善.

图 5(a), (b) 分别是数据点数为 $N = 128$ 和 $N = 256$, 归一化频率为 $\omega_0 = 0.25$, LP 方法与所提方法的测频精度曲线, 由图可见两种方法的测频精度基本一致, 这与理论分析结果是一致的. 由图还可以得到随着数据点数的增加, 所提算法的信噪比门限有较大提高, 而此时所提方法比 LP 方法的计算量小很多.

6 结论

本文提出并用硬件实现了基于迭代算法的八通道滤波器组单频信号测频方法, 可广泛地应用于数字通信、雷达信号处理、电子侦察等领域, 理论分析和仿真实验表明本文提出的新方法比已有的测频方法相比具有测频范围广、能适应低信噪比情况、运算量小等特点, 非常适合于需要高速信号处理的工程应用.

参考文献:

- [1] Rife D, Boorstyn R R. Single-tone parameter estimation from discrete-time observations [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 1974, 20(5): 591 - 598.
- [2] Tretter A. Estimating the frequency of noisy sinusoid by linear regression [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 1985, 31(6): 832 - 835.
- [3] Kay S. A fast and accurate single frequency estimator [J]. IEEE

Trans. ASSP. 1989, 37(11): 1987 - 1990.

- [4] Kim D, Narasimha M J, et al. An improved single frequency estimator [J]. IEEE Signal Processing Letters, 1996, 3(7): 212 - 214.
- [5] Fitz M. Further results in the fast estimation of a single frequency [J]. IEEE Trans. Commun, 1994, 42(2/3/4): 862 - 864
- [6] Luise M, Reggiannini R. Carrier frequency recovery in all-digital modems for burst-mode transmissions [J]. IEEE Trans. Commun, 1995, 43(3): 1169 - 1178.
- [7] Fowler M, Johnson J. Extending the threshold and frequency range for phase based frequency estimation [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 1999, 47(10): 2857 - 2863.
- [8] Brown T, Wang M. An iterative algorithm for single-frequency estimation [J]. IEEE Trans. Signal Processing, 2002, 50(11): 2671 - 2682.
- [9] Volder J E. The CORDIC trigonometric computing technique [J]. IRE Trans. Electronic Computers, 1959, 8(3): 330 - 334.
- [10] Moustalo J. Function approximation using polynomials [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2006, 23(5): 99 - 102.

作者简介:

彭晓燕 女, 1970 年生于四川成都, 电子科技大学讲师, 目前主要从事电子侦察与无线电监测研究.

E-mail: esu_pxy@sina.com

甘露 男, 1974 年生于四川成都, 电子科技大学副教授, 2009 年于电子科技大学取得博士学位, 目前主要从事电子侦察与无线电监测, 阵列信号处理等方面的研究.