

压缩感知回顾与展望

焦李成, 杨淑媛, 刘 芳, 侯 彪

(智能感知与图像理解教育部重点实验室, 西安电子科技大学, 陕西西安 710071)

摘 要: 压缩感知是建立在矩阵分析、统计概率论、拓扑几何、优化与运筹学、泛函分析等基础上的一种全新的信息获取与处理的理论框架. 它基于信号的可压缩性, 通过低维空间、低分辨率、欠 Nyquist 采样数据的非相关观测来实现高维信号的感知. 压缩感知不仅让我们重新审视线性问题, 而且丰富了关于信号恢复的优化策略, 极大的促进了数学理论和工程应用的结合. 目前, 压缩感知的研究正从早期的概念理解、数值仿真、原理验证、系统初步设计等阶段, 转入到理论的进一步深化, 以及实际系统的开发与应用阶段. 本文分析了压缩感知的原理与应用, 综述了压缩感知的最新进展及存在的问题, 指出了进一步研究的方向.

关键词: 压缩感知; 稀疏表示; 压缩观测; 优化恢复

中图分类号: TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2011) 07-1651-12

Development and Prospect of Compressive Sensing

JIAO Li-cheng, YANG Shu-yuan, LIU Fang, HOU Biao

(Key Lab of Intelligent Perception and Image Understanding of Ministry of Education, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

Abstract: Compressive Sensing (CS) is a new developed theoretical framework for information acquisition and processing, which is based on matrix analysis, statistical probability theory, topological geometry, optimization and opsearch, functional analysis and so on. The high-dimensional signals can be recovered from the low-dimensional and sub-Nyquist sampling data based on the compressibility of signals. It not only inspires us to survey the linear problem again, but also enriches the optimization approaches for signal recovery to promote the combination of mathematics with engineering application. Nowadays the researches on compressive sensing have developed from the earlier concept understanding, numerical simulation, principle verification, and primary system designation, to the deeper researches on theory, development and application of practical system. In this paper, we introduce the basic idea of compressive sensing, and the development history, current and future challenges.

Key words: compressive sensing; sparse representation; compressive measurement; optimization recovery

1 引言

众所周知, 在奈奎斯特 (Nyquist) 采样定理为基础的传统数字信号处理框架下, 若要从采样得到的离散信号中无失真地恢复模拟信号, 采样速率必须至少是信号带宽的两倍. 然而, 随着当前信息需求量的日益增加, 信号带宽越来越宽, 在信息获取中对采样速率和处理速度等提出越来越高的要求. 最近由 D Donoho、E Candès 及华裔科学家 T Tao 等人提出的压缩感知 (Compressive Sensing, CS) 理论^[1~5]指出了一条将模拟信号“经济地”转化为数字形式的压缩信号的有效途径: 利用变换空间描述信号, 通过直接采集得到少数“精挑细选”的线性观测数据 (这些数据是包含了信号全部信息的压缩数据), 将信

号的采样转变成信息的采样, 通过解一个优化问题就可以从压缩观测的数据中恢复原始信号. 在该理论下, 信号的采样速率不再取决于信号的带宽, 而是取决于信息在信号中的结构与内容, 因此在满足 (1) 信号的可压缩性, (2) 表示系统与观测系统的不相关性两大条件下, 从低分辨观测中恢复高分辨信号就成为了可能.

压缩感知是建立在矩阵分析、统计概率论、拓扑几何、优化与运筹学、泛函分析与时频分析等基础上的一种新的信号描述与处理的理论框架. CS 理论避开了高速采样, 一旦实践成功, 就意味着信号的采样与处理都可以以非常低的速率进行, 这将显著降低数据存储和传输代价, 以及信号处理时间和计算成本, 给信号处理领域带来新的冲击. 另一方面, 这种压缩观测的思想也给

高维数据分析指出了一条新的途径.因此,CS理论一经提出,就在信息论^[6~8]、医疗成像^[9~15]、光学/遥感成像^[16~21]、无线通信^[22~26]、模式识别^[27~31]、生物传感^[32~35]、雷达探测^[36,37]、地质勘探^[38,39]、天文^[40]、集成电路分析^[41]、超谱图像处理^[42]、图像压缩^[43]、图像超分辨率重建^[44]等领域受到高度关注,并被美国科技评论评为“2007年度十大科技进展”,D Donoho因此还获得了“2008年IEEE IT学会最佳论文奖”.如今CS理论自身也表现出强大的生命力,已发展了分布式CS理论^[45~47]、1-BIT CS理论^[48,49]、Bayesian CS理论^[50~52]、无限维CS理论^[53]、变形CS理论^[54]、谱CS^[55]、边缘CS理论^[56]、Kronecker CS理论^[57]、块CS理论^[58]等.它们不仅为许多应用科学如统计学、信息论、编码理论、计算机科学等带来了新的启发,而且在许多工程领域如低成本数码相机和音频采集设备、节电型图像采集设备、高分辨率地理资源观测、分布式传感器网络、超宽带信号处理等都具有重要的实践意义.尤其是在成像方面如地震勘探成像和核磁共振成像中,基于CS理论的新型传感器已经设计成功,将对昂贵的成像器件的设计产生重要的影响^[9~11].在宽带无线频率信号分析中,基于CS理论的欠Nyquist采样设备的出现,将摆脱目前A/D转换器技术的限制困扰^[59~61].

目前,CS理论与应用研究正在如火如荼地进行:在美国、欧洲等许多国家的知名大学如麻省理工学院、莱斯大学、斯坦福大学、杜克大学等都成立了专门课题组对CS进行研究;2008年,贝尔实验室,Intel,Google等知名公司也开始组织研究CS;2009年,美国空军实验室和杜克大学联合召开了CS研讨会,美国国防先期研究计划署(DARPA)和国家地理空间情报局(NGA)等政府部门成员与数学、信号处理、微波遥感等领域的专家共同探讨了CS应用中的关键问题;第二次以“压缩感知和高维数据分析”为主题的研讨会也将在2011年的7月26~28日在杜克大学召开.在国内,一些高校和科研机构也开始跟踪CS的研究,如清华大学、中科院电子所、西安交通大学和西安电子科技大学等.自从2006年CS的提出,在IEEE的信号处理汇刊、信号处理快报汇刊、信号处理杂志、信息论汇刊等国际知名期刊上开始涌现出上百篇关于CS理论与应用方面的文献.2010年,IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing专门出版了一期关于CS的专刊,促进了CS理论在各个领域应用成果的交流.2011年4月,第一本关于CS的专著《Compressed Sensing: Theory and Applications》出版,不仅系统的介绍了CS的概念,而且汇集了世界各国学者在CS理论和应用上的观点和成功范例.国家自然科学基金委也自2009年资助了多项压缩感知方法的研究,涉及认知无线电、雷达成像、信号稀疏表示、多媒体编码、人

脸识别等领域.

本文将以压缩感知的理论与应用为主线,综述压缩感知基础理论、关键问题以及典型的应用,展望未来的研究方向.

2 压缩感知基础理论

在介绍压缩感知理论之前,需要指出的是:尽管压缩感知理论最初的提出是为了克服传统信号处理中对于奈奎斯特采样要求的限制,但是它与传统采样定理有所不同.首先,传统采样定理关注的对象是无限长的连续信号,而压缩感知理论描述的是有限维观测向量的向量;其次,传统采样理论是通过均匀采样(在很少情况下也采用非均匀采样)获取数据,压缩感知则通过计算信号与一个观测函数之间的内积获得观测数据;再次,传统采样恢复是通过对采样数据的Sinc函数线性内插获得(在不均匀采样下不再是线性内插,而是非线性的插值恢复),压缩感知采用的则是从线性观测数据中通过求解一个高度非线性的优化问题恢复信号的方法.首先介绍压缩感知的数学模型.

2.1 压缩感知的数学模型

若将 N 维实信号 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{N \times 1}$ 在某组正交基 $\{\boldsymbol{\psi}_i\}_{i=1}^N$ ($\boldsymbol{\psi}_i$ 为 N 维列向量)下进行展开,即:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N \theta_i \boldsymbol{\psi}_i \quad (1)$$

其中展开系数 $\theta_i = \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}_i \rangle = \boldsymbol{\psi}_i^T \mathbf{x}$.写成矩阵的形式,可以得到:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\theta} \quad (2)$$

这里 $\boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots, \boldsymbol{\psi}_N] \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 为正交基字典矩阵(满足 $\boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Psi}^T = \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{I}$),展开系数向量 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N]^T$.假设系数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 是 K -稀疏的,即其中非零系数的个数 $K \ll N$,那么采用另一个与正交基字典 $\boldsymbol{\Psi}$ 不相关的观测矩阵 $\boldsymbol{\Phi}: M \times N (M \ll N)$ (这里 $\boldsymbol{\Phi}$ 的每一行可以看作是一个传感器,它与系数相乘,获取了信号的部分信息),对信号 \mathbf{x} 执行一个压缩观测:

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x} \quad (3)$$

就可以得到 M 个线性观测(或投影) $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^M$,这些少量线性投影中则包含了重构信号 \mathbf{x} 的足够信息,如图1所示.

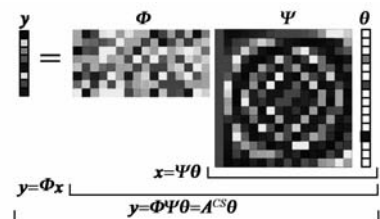


图1 压缩观测向量的矩阵表示

从 \mathbf{y} 中恢复 \mathbf{x} 是一个解线性方程组的问题,但从方程(3)上看,这似乎是不可能的,因为这是一个未知数个数大于方程个数的病态方程,存在无穷多个解.但是,将式(2)带入式(3),记 CS 信息算子 $\mathbf{A}^{\text{CS}} = \Phi\Psi$,可以得到:

$$\mathbf{y} = \Phi\Psi\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}^{\text{CS}}\boldsymbol{\theta} \quad (4)$$

虽然从 \mathbf{y} 中恢复 $\boldsymbol{\theta}$ 也是一个病态问题,但是因为系数 $\boldsymbol{\theta}$ 是稀疏的,这样未知数个数大大减少,使得信号重构成可能.那么在什么情况下式(4)的解是存在的呢?可以证明:只要矩阵 \mathbf{A}^{CS} 中任意 $2K$ 列都是线性独立的,那么至少存在一个 K -稀疏的系数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 满足 $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{\text{CS}}\boldsymbol{\theta}$.换言之,在满足上述要求的情况下,通过求解一个非线性优化问题就能从观测 \mathbf{y} 、观测矩阵 Φ 和字典矩阵 Ψ 中近乎完美的重建信号 \mathbf{x} . 信号压缩感知的过程如图 2 所示:

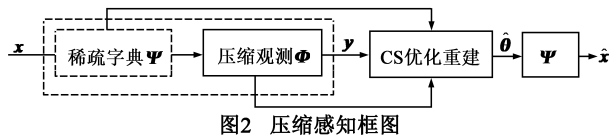


图2 压缩感知框图

2.2 压缩感知的条件

从信号的压缩观测中实现信号的重建是需要满足一定条件的:首先,对于由正交基字典矩阵 Ψ 确定的表示系统,要满足信号在 Ψ 下的稀疏性或可压缩性,即信号需要在变换空间下的展开系数足够的稀疏;其次,假设在表示系统中能够获得 K -稀疏的系数,对于由观测系统 Φ 所确定的 CS 信息算子 \mathbf{A}^{CS} ,需要满足任意 $2K$ 列都是线性无关的.在这两个条件都同时满足时,就可以通过求解如下问题:

$$\begin{cases} \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\boldsymbol{\theta}\|_0 \\ \text{s.t. } \mathbf{y} = \Phi\mathbf{x} = \mathbf{A}^{\text{CS}}\boldsymbol{\theta} \end{cases} \quad (5)$$

获得一个唯一确定的解,即稀疏系数向量 $\boldsymbol{\theta}$,将它与字典相乘,就可以得到信号 $\mathbf{x} = \Psi\boldsymbol{\theta}$.观察式(5)就会发现:

为了求得稀疏系数,需要穷举 $\boldsymbol{\theta}$ 中所有可能的 $\binom{N}{K}$ 个非零项的组合,这是一个 NP-hard 的非凸优化问题.

目前求解该问题主要有两类方法:以匹配追踪 (Matching Pursuit, MP)^[62] 和正交匹配追踪 (Orthogonal Matching Pursuit, OMP)^[63] 为代表的贪婪算法,以及迭代阈值收缩为代表的门限算法^[64].贪婪算法存在的问题是时间代价过高,无法保证收敛到全局最优;而门限算法虽然时间代价低,但对数据噪声十分敏感,解不具有连续性,且不能保证收敛到全局极小.由 Candès 和 Donoho 提出的 l_1 范数下的凸化压缩感知恢复框架是一个里程碑式的工作,它的基本思想是将式(5)的非凸的

优化目标用 l_1 范数来代替^[3]:

$$\begin{cases} \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\boldsymbol{\theta}\|_1 \\ \text{s.t. } \mathbf{y} = \mathbf{A}^{\text{CS}}\boldsymbol{\theta} \end{cases} \quad (6)$$

这就将式(5)的优化问题变成了一个凸优化问题,可以方便地转化为线性规划问题求解,因此称之为凸化的压缩感知框架.

CS 理论提出之初,绝大多数研究都建立在此基础上.在有限等距性质 (Restricted Isometry Property, RIP) 和有限等距常数 (Restricted Isometry Constant, RIC) 框架下^[3,65-67],一些学者证明了 l_1 范数和 l_0 范数的等价条件,2008 年, Candès 给出了有限等距常数需满足的条件^[2]: $\delta_{2S} < 0.414$;2009 年, Foucart and Lai 等人将此界放松: $\delta_{2S} < 0.4531$ ^[65];之后 Cai 等人又证明: $\delta_{2S} < 0.472$ ^[66].2010 年, Cai 等人给出新的 RIC 界: $\delta_S < 0.307$ ^[67].但是,判断一个矩阵是否满足 RIP, 以及其 RIC 的计算都是非常困难的,除 RIP 理论可以衡量某个测量矩阵能处理稀疏信号的能力外, Donoho 还提出了相关性判别理论^[68], Elad 提出了矩阵 Spark 判别理论^[69], Kashin 和 Temnikov 提出了测量算子零空间理论^[70],以及 Donoho 和 Tanner 的 k -neighborly 理论等.相关性判别理论采用矩阵 \mathbf{A}^{CS} 的互相关系数 (mutual coherence coefficient) 衡量压缩重建的条件.互相关系数定义为矩阵任意两个归一化列向量之间的相关系数的最大值,该值介于 0 和 1 之间,取值越小则说明矩阵 \mathbf{A}^{CS} 列之间的相关性越弱,即观测矩阵与字典矩阵之间具有低相关性. Spark 常数定义为矩阵线性相关向量组的最小数目,取值越大则说明矩阵 \mathbf{A}^{CS} 列之间的相关性越弱. Donoho 和 Elad 早在 2003 就指出:对于式(4)的欠定系统,若要通过求解式(5)的非线性优化问题唯一确定地得到一个 K -稀疏的解 $\boldsymbol{\theta}$, 矩阵 \mathbf{A}^{CS} 的 Spark 常数至少要等于 $2K$,但是矩阵 Spark 常数的计算也是一个 NP 难问题.总结来说,关于压缩重建的条件可以通过矩阵 \mathbf{A}^{CS} 的三个定量指标衡量,即互相关系数、Spark 常数和 RIC.在这些理论中,只有 Donoho 提出的相关性判别理论可以较为直观的用来判别某一测量矩阵的形态.

2.3 压缩感知的关键要素

从上述数学模型可知,压缩感知理论的实现包含三个关键要素:稀疏性、非相关观测、非线性优化重建,其中信号的稀疏性是压缩感知的必备条件,非相关观测是压缩感知的关键,非线性优化是压缩感知重建信号的手段.

信号的稀疏性是压缩感知理论的一个重要前提,并且直接影响着信号感知的效率.由统计理论和组合优化理论可知:在满足重构条件时,通过选择合适的观测方式和重建算法,仅需要 $K+1$ 次观测就可将 N 维空

间的 K -稀疏信号精确地重建. 2007 年 Candès 也指出, 对于随机高斯和随机 ± 1 的 Rademacher 观测矩阵, $O(K * \log(N/K))$ 的采样就能将 N 维信号的 K 个最大值以较高的概率稳定重建. 因此, 信号在字典矩阵 Ψ 下的表示越稀疏, 高概率精确重构所需要的观测数目就越少.

压缩感知的关键是观测矩阵的构造. 作为感知的前端, 观测系统要求物理上容易实现, 并且与表示系统所形成的 CS 信息算子矩阵 A^{CS} 具有较小的 RIC. 观测矩阵设计中的两个关键内容就是观测波形和采样方式, 设计的主要原则是: (1) 观测波形在理论上的最优性能, 即 A^{CS} 要具有良好的性质; (2) 观测波形的普适性, 即要满足和一般的字典或表示系统都具有不相关性; (3) 实用性, 包括快速计算、低存储量、硬件易实现等. 目前常采用的测量波形是独立同分布的高斯随机波形、贝努利分布随机波形、Fourier 正交函数系、半 Fourier 矩阵、Chirp 序列、Alltop 序列等. 随机观测矩阵在理论上能满足其最优性, 2006 年, Candès 和 Tao 等证明了: 独立同分布的高斯随机变量形成的观测矩阵与任意正交字典都具有较强的不相关性^[4]. 2011 年, Candès 指出: 在独立同分布的高斯随机变量形成的观测矩阵和任意超完备冗余字典的条件下, 压缩观测信号的精确恢复仍然是有可能的^[71], 因此高斯随机矩阵可成为普适的 CS 观测矩阵. 但是, 在实际实现中, 其计算复杂度较高, 占用的内存较多, 因此不适合大规模应用. 半 Fourier 矩阵计算快速, 但不满足普适性, 即只能用于时域稀疏的信号, 不适用于自然图像等信号. 在采样方式上, 目前主要的有均匀采样、随机采样等.

非线性优化是 CS 重建信号的手段, 也是从低分辨率观测中恢复出高分辨信号所必须付出的软件代价. 如前所述, Candès 和 Donoho 提出的 l_1 范数下的凸化压缩感知恢复是一个里程碑式的工作, 对该框架的研究产生了丰富的关于优化恢复的工具, 极大的促进了数学理论与工程实践的结合. 此外, 有些学者放松了 l_0 范数的稀疏测度, 使用非凸的 $l_p (0 < p < 1)$ 稀疏测度代替, 研究松弛压缩感知框架下的信号恢复^[72~74]. 国内学者徐宗本证明了 $p = 0.5$ 时解的最优性, 并给出了最优解的解析形式^[75].

在下一节中, 我们将详细分析这三个要素, 回顾取得的成果, 指出关键问题, 并结合已做的工作, 指出后续研究的方向.

3 稀疏表示(描述)系统

稀疏表示是信息优化建模的终极目标, 也是信息处理中一个古老而又崭新的课题, 利用稀疏性可以解决信号处理中许多复杂的问题, 各种数学分析和信号

处理的理论为字典的构建提供了许多良好的工具, 如图 3 所示. 稀疏表示的研究兴起于二十世纪九十年代, 在本世纪初得到蓬勃发展, 压缩感知的提出更是为其提供了工程应用的土壤, 极大地丰富了该领域的研究成果.

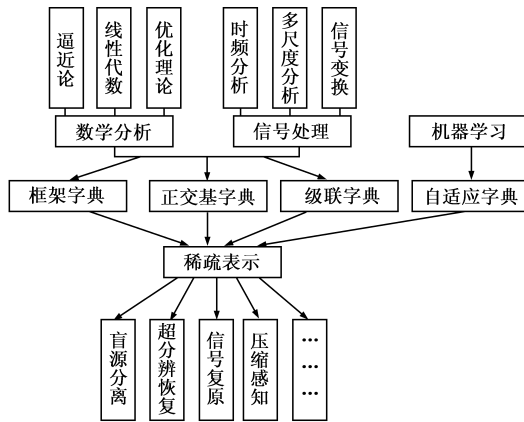


图3 稀疏表示

在压缩感知中, 稀疏表示系统的设计归结为稀疏字典 Ψ 的设计. 从不同的角度, 我们可以将字典进行不同的分类. 例如按照字典中原子是否正交, 可以分为正交基字典和过完备冗余字典, 按照字典中原子的来源又可以分为正交变换字典、框架字典和统计学习获得的字典等. 根据 Ψ 的不同形式, 本节将讨论如下几种情况下的稀疏表示.

3.1 正交基字典

压缩感知提出之初均假设字典为标准正交基字典. 标准正交基字典一般由一个正交变换得到, 如 Fourier 变换、DCT 变换、沃尔什变换、小波变换等, 其特点是构造简单、实现快速、表示过程的复杂度较低. 在信号特征与字典中原子特征一致的时候, 能够得到高效精确的表示. 但是, 对于实际信号来说, 信号的稀疏度是未知的, 极少数信号在上述常见正交基上的投影系数只存在少量非零值, 或者说, 这些固定的正交基不足以灵活的来表示信号如声音或自然图像所具有的复杂未知规则性, 使信号在变换域足够稀疏. 例如, DCT 字典的基函数缺乏时间/空间分辨率, 因而不能有效地提取具有时频局部化特性的信号特征; 小波分析对于多维信号来说并不是最优的, 不能稀疏地捕捉到图像结构的轮廓特征. 因此从字典的构成来说, 由于实际信号之间千差万别, 在不知道信号先验的前提下, 我们希望字典自适应于信号本身所固有的特性或结构. 在正交基字典的定义下, 能否构造自适应的基函数, 以求得信号的最优稀疏表示呢? 当然, 答案是肯定的. Peyré 证明了自适应正交字典的可行性的, 他指出一维信号的非平稳的正交小波包系数, 具有任意 C^α 规则性图像信

号的 Bandelet 系数都具有足够的稀疏性^[76].那么我们就可以在 CS 框架下,根据不同的信号寻找最适合其特征的一个正交基,以代替原有的 Fourier 基、DCT 等,使得信号在它下面具有最稀疏的表示.这种方法的缺点是对于高维信号如图像、视频等,常需要构造规模很大的字典,并且在某些情况下其解析形式不易给出.

3.2 正交基级联字典

对于时频变化范围很广且已知一些稀疏性先验的信号,我们可以采用多组正交基级联的字典.某些实际信号可能会表现出是一些自然现象的混合体,有两种或更多种结构类型同时出现在信号里,但它们之间却完全不同,其中一个都不能有效地模拟另一个,这些混合信号虽然在单一的正交基变换中不能非常有效地表现,但是在多个正交基级联字典下能得到较好效果,其中信号的每一部分都能在相应基字典下得到好的表示.例如,一个含有脉冲和正弦波形的混合信号,在脉冲基函数字典和正弦基函数字典下就能够得到有效的表示.上世纪九十年代初期,有研究人员在实验中发现:如果图像信号 f 在字典 D 中有非常稀疏的表示,并且 D 是由三角函数和冲击函数组成的字典,那么在 1 范数凸化 CS 框架下,这个稀疏表示就可以完全重构.实验的观察结果很快转入一系列的理论证明,首先得到验证的是两个正交基的联合,然后是数个不相干基的联合以及更普遍的准不相干字典,也就是说正交字典级联恰好满足稀疏信号精确重构的条件.因此之后,试图将不同类型正交字典级联起来形成新的冗余字典,以实现图像信号的精确重构引起人们的浓厚兴趣.有学者指出:在 N 维有限空间中,假设两个或者更多个正交基级联组成的字典,若其相干系数为 $\mu = 1/\sqrt{N}$,这个级联字典就被认为是(完全)不相干的,则信号在其上的稀疏表示就满足精确重构条件.除了冲激函数和三角函数级联字典外,常采用的有 $L^2(0,1)$ 上的 Haar 函数和 Walsh 函数组成的级联正交字典, Daubechies 系列小波基 db1-db10 构造的正交基级联字典,小波函数和 Curvelet 函数组成的级联正交字典等^[77,78].通过这种级联,可以丰富字典的内容,能让各类原子互相弥补表示的不足,使稀疏表示更加有效.其缺点是虽然利用具有互补性的多类正交基系统构成了字典,但信号的特性要与字典的特性一致,在不一致的情况下就难以得到满意的结果.此外,当采用不同正交基系统级联成冗余字典之后,需要对字典矩阵的互相关系数做定量的评价,以及在理论上分析其完全重构的性能.

3.3 框架字典

众所周知,对于信号的稀疏表示问题,冗余的字典不仅可以使稀疏表示更加灵活,而且能提高信号表示

的稀疏度.大量的研究表明:超完备冗余字典下的信号稀疏表示更加有效.这样,也可以将 CS 理论中的稀疏表示从正交基扩展到超完备冗余字典.在稀疏表示中很多学者很早就已指出:利用框架理论会带来更好的表示结果.框架理论最早是 Duffin 和 Schaeffer^[79]于 1952 年为解决从非正则样本值重构带限信号时给出,定义如下:在平方可求和空间 $L^2(Z^2)$ 中,若存在两个正的常数 A 和 $B(0 < A \leq B < \infty)$ 使得式(7)对所有 $f(t) \in L^2(R)$ 恒成立:

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} | \langle f, \psi_{mn} \rangle |^2 \leq B \|f\|^2 \quad (7)$$

则函数集合 $\{\psi_{mn}\}$ 组成一框架.正常数 A 和 B 分别表示框架的下边界和上边界,度量了框架的冗余性.

利用框架理论进行稀疏表示的好处就是利用冗余性可以得到更加有效的表示^[80].一方面,框架字典的设计具有较强的理论基础,一些常见的变换如冗余 DCT 变换、二进小波、多小波、小波包等都能够构成冗余的框架.另一方面,框架字典由给定的框架结构决定,改变函数集合 $\{\psi_{mn}\}$ 的参数取值,就可以方便地得到不同的字典原子,丰富的原子会更大可能地符合信号本身所固有的特性.当取极限情况 $A = B$ 时,则称该框架是紧框架.当 $\{\psi_{mn}\}$ 是线性独立时,框架就不是冗余的,变为 Riesz 基.当 $A = B = 1$,则该框架变为正交基.

3.4 字典学习

以上字典均或多或少的需要利用信号的先验信息,原子类型一旦确定就不再变化,当研究的信号发生变化时,所确定的字典不一定再适合.在超完备冗余字典的情况下,为了对很多类型的信号都能得到较好的表示结果,需要自适应的冗余字典.自适应冗余字典设计的思路是通过字典学习算法获得更符合信号内容,特征,或者纹理信息的原则.但是,冗余性会带来字典中原子数目的剧增,而且在冗余字典下自适应求解信号的最佳稀疏逼近是一个 NP 难问题,那么如何设计快速、有效且复杂度低的优化算法,是需要考虑的问题.自适应冗余字典可以随着不同的输入信号做出调整^[81~87],近年来在图像去噪、图像去马赛克、图像修复和识别等领域中均有着成功的应用.字典学习^[81,82]就是从数据中学习稀疏表示下最优表示,使得字典中原子尺度和特性更接近于需要表示的图像信号.为实现上述功能,已涌现出众多的字典学习算法,其中大多数是基于贝叶斯模型的最大似然值和最大后验概率,通过获取图像信号的先验来选择更合适的原子组成自适应字典,获得字典原子.其中被广泛应用的有 MOD 算法^[81], ILS-DLA^[83], RLS-DLA^[84], SLO-DLA^[85], KSVD 算法^[82],以及在此基础上发展起来的多尺度 KSVD 版本, EK-SVD^[86], DK-SVD^[87]等.众多的应用实验结果表明,

KSVD 算法对各种图像处理任务均具有更好的效果.

4 观测系统

源于 Kashin 创立的范函分析和逼近论的压缩感知理论有两个核心内容,一个是稀疏性,由信号本身决定,另外一个就是不相关性,由感知系统和信号共同确定.压缩感知理论联合了观测和稀疏矩阵之间的稀疏观念和不相容观念,通过重构满足未完成的测量集最稀疏可能信号^[73].压缩感知在很大程度上依靠随机观测矩阵,因为它提供了广泛的观测-稀疏矩阵不相容对,给重构也提供了条件,这就产生了 CS 理论.在对信号进行稀疏表示后,接下来要设计与表达系统不相容的感知系统,即观测采样矩阵.

4.1 随机观测

压缩感知理论成立的条件之一就是要求感知矩阵和稀疏矩阵低相关的情况.直觉上,可以看到观测矩阵和稀疏矩阵是不相关的,所以采样加进去的新信息在已知的稀疏矩阵基上并不被表示.目前随机矩阵在观测矩阵中被广泛使用,例如高斯随机矩阵,在很大概率上对于固定的字典矩阵不相关.当 Φ 是高斯随机矩阵时,可以证明 Φ 能以较大概率满足约束等距特性,因此可以通过选择一个其中每一个元素都满足 $N(0, 1/N)$ 的独立正态分布的高斯观测矩阵获得.高斯观测矩阵的优点在于它几乎与任意稀疏信号都不相关,因而所需的观测次数最小.随机观测矩阵属于非适应性的测量,在实际实现中具有复杂度较高,难以在大规模问题中应用的缺点.

4.2 确定性观测

目前,除了如前所述的随机观测矩阵之外,不少学者基于 RIP 理论提出了多种确定性测量矩阵,例如 Chirp 测量矩阵、Alltop 序列形成的测量矩阵、半 Fourier 矩阵、结构 Fourier 矩阵等等.此外,来自于快速算法的 Noiselets 也被证明和正交基字典之间具有低相关的性质.最近有学者指出可以在压缩感知中采用自适应性的观测矩阵^[88]:基于相关性理论,将投影矩阵和观测矩阵的非相关条件可以等价于 Gramma 矩阵:

$$\text{Gram}: (\mathbf{A}^{\text{CS}})^{\text{T}} \mathbf{A}^{\text{CS}} \quad (8)$$

的单位阵逼近问题:

$$\begin{cases} \min_{\Phi} \| (\mathbf{A}^{\text{CS}})^{\text{T}} \mathbf{A}^{\text{CS}} - \mathbf{I} \|_2 \\ \text{s.t. } \mathbf{A}^{\text{CS}} = \Phi \Psi \end{cases} \quad (9)$$

即,首先产生一个随机观测矩阵,然后利用信号的稀疏基的信息,训练学习出一个优化观测矩阵,相比随机观测矩阵,优化之后得到的观测矩阵与字典矩阵之间具有更低的相干性.采用最近 Martin 提出 K-SVD 方法求解式(9)中的优化问题,可以根据字典矩阵优化求解确定

性的观测矩阵,观测矩阵的优化过程如图 4 所示.

将优化观测矩阵用于压缩感知理论应用中,能够提高信号的重构精度或者在相同的重构精度下具有更少的测量数目.

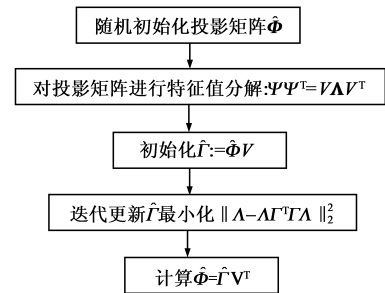


图4 优化观测矩阵的获取方法

4.3 压缩信息获取

正如前面指出的那样,压缩感知理论在有限维矢量空间描述信号,在将其实际应用时必须要考虑其物理实现,即采样方式.目前常采用的压缩观测的实现方法包括随机下采样^[89]、模拟信息转换器(AIC)采样^[90]以及随机滤波器^[91]等.AIC 压缩滤波器设计要经过三个关键步骤:解调、滤波、ADC 低速率采样,如图 5 所示.

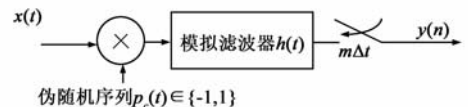


图5 AIC采样模型

由图中可以看出:模拟信号 $x(t)$ 首先经过一个伪随机序列,即 PN 序列 $p_c(t)$,进行调制,然后经过一个模拟低通滤波器 $h(t)$,最后,通过一个传统的低速 AD 转换器进行采样得到观测数据 $y(n)$.利用这样的 AIC 采样模型,就实现了在更少的数据下对信号的描述.

另外一种压缩信息获取的实现方式就是随机滤波器,通过一个单位脉冲响应为随机信号的 FIR 数字滤波器与原始信号进行卷积,然后将卷积后的信号下采样的办法实现,同样适用于稀疏的可压缩的信号,记随机滤波器 h ,原始信号 x ,那么长度为 M 的下采样向量 $y = \mathbf{D}_{\downarrow} (h * x)$,实现结构如图 6(a)所示.这种结构的优点之一在于它可以利用 FFT 快速实现,如图 6(b)所示.

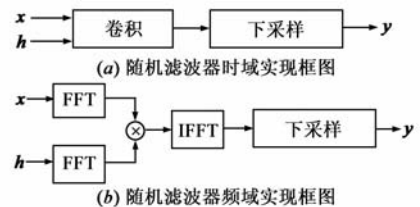


图6 随机滤波器模型

关于压缩感知框架下的压缩信息获取,也有部分学者认为可以在 AD 采样之后进行压缩观测.例如目前已有一些压缩成像设备中,既有一些像单像素相机那样

在 AD 采样之前进行压缩观测的成像设备,也有一些在传统的成像设备基础上再加上一个线性观测器(又称随机反转板、成像码盘等),通过后端的计算平台上求解非线性优化问题,可以获得分辨率更高的影像。

5 压缩感知信号恢复

利用压缩感知理论可以实现从低分辨率观测中恢复出高分辨信号,其付出的代价就是在信号重建时的软件代价。

5.1 l_1 范数下的凸化压缩感知框架

如前所述,由 Candès 和 Donoho 提出的 l_1 范数下的凸化压缩感知恢复框架是一个里程碑式的工作,它的基本思想是将式(5)的非凸的优化目标用式(6)的 l_1 范数来代替^[3]。在该框架下的压缩感知信号恢复得到了许多数学领域的学者的广泛关注,并提出了一系列的方法,包括内点法、GPSR、FPC 等。然而,这存在如下问题。第一, l_1 范数和 l_0 范数优化解等价性的条件不易判断。验证给定矩阵是否满足 RIP 是一个 NP 难问题,目前只有 Candès, Tao^[92,93] 和 Donoho 等借助 Johnson-Lindenstrauss (JL)引理^[94]和随机矩阵理论^[95]证明了满足特定分布的某些随机矩阵,能以较高的概率满足 RIP;第二,虽然 l_1 范数是距离 l_0 范数最近的凸稀疏测度,但只有在很严格的条件下 l_1 范数和 l_0 范数优化的结果才有等价性^[93],一般的实际信号都无法满足;第三,一般情况下 l_1 范数与真实稀疏解的差距过大。 l_1 范数无法区分稀疏系数的位置,所以尽管整体上重构信号在欧氏距离上逼近原信号,但是存在位置混淆的现象,从而容易出现不期望的人工效应;第四,虽然经证明^[3]:在 l_1 范数凸化压缩感知框架下,仅用 $O(K \log(N/K))$ 个独立同分布的高斯观测即能以高概率精确重构稀疏度为 K 的信号,即,高概率重建需要的观测数目需要满足 $M \geq cK, c \approx \log_2(N/K + 1)$, 重构的计算复杂度的量级在 $O(N^3)$,这对于较长信号,其计算复杂度难以忍受。

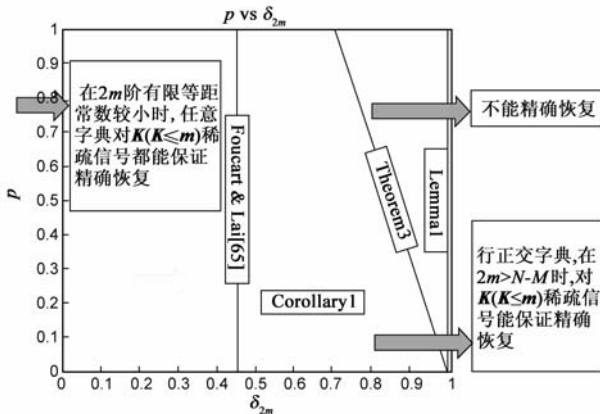


图7 l_p 范数精确重构情况分析

5.2 l_p 范数下的松弛压缩感知框架

一个自然的改进方法是 l_p 范数下的松弛压缩感知框架。A Manduca 等人指出^[96]:尽管没有理论上全局极小点唯一性的保证,实践中很多非凸的重构模型在低采样率下优于 l_1 范数重构模型。R Gibronval 等人^[97]分析了欠定系统的 l_p 范数稀疏重构中的参数 p 和有限等距常数 δ 组成的 $p - \delta$ 平面进行的划分,结果如图 7 所示。虽然获得一些理论结果的指导,但由于有限等距常数指标都是不可计算的,因此在工程应用中欠缺实际意义。

5.3 l_0 范数下的非凸压缩感知框架

从上述分析可以看到:在 l_1 范数下的凸化压缩感知框架和 l_p 范数下的松弛压缩感知框架中,通过对信息算子 $A^{CS} = \Phi\Psi$ 的 RIP 约束,即需要信息算子具有好的有限等距性质,来回避 l_0 范数的求解,导致了 CS 重构中存在理论分析和求解质量上的一些困难和瓶颈问题。直接从 l_0 范数优化入手构建非凸压缩感知框架不失为一种可行的策略,因为一方面, l_0 解具有最稀疏的形式,另一方面,非凸 CS 框架可以缓解 RIP 约束带来的诸多问题,我们称之为 Non-RIP 非凸 CS 框架。图 8 给出了 l_0, l_p 和 l_1 范数优化问题和解的稀疏性对比。

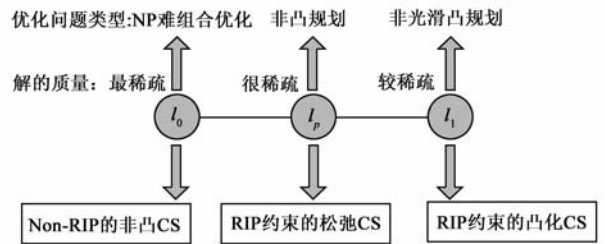


图8 l_0, l_p, l_1 范数优化问题和解的稀疏性对比

和基于 RIP 的凸化和松弛压缩感知相比: Non-RIP 约束的非凸 CS 框架的优化目标直接针对 l_0 范数和信号先验设计;在该框架下,信号的先验可以方便的引入到优化问题模型,观测矩阵不再局限于满足特定分布的随机矩阵,对于不同的矩阵 Φ , Non-RIP 具有一致可恢复(Uniform Recoverability)的能力,因此更适用被噪声污染的工程实践中所获得的信号,这有利于突破目前凸化和松弛压缩感知框架在理论分析和求解质量上的瓶颈问题。

6 压缩感知的应用

6.1 压缩感知超宽带信号处理

Yonina C. Eldar 提出了模拟信号在平移不变空间的压缩感知实现^[98]。该方法对有限维模型进行了扩展,将压缩采样应用到模拟域上,使得低速率采样下的超宽带信号处理成为可能。它定义了连续时间信号的稀疏性,对连续稀疏信号在平移不变空间实现了低速率采

样.国内学者石光明等人提出的基于低速率采样压缩感知的 UWB 回声信号探测^[99], Wei Dai 等人提出的阶层加权码和限制性整数压缩感知^[100]以及 Jose L Paredes 等人提出的压缩感知超宽带信道估计^[101]等压缩感知的一些发展,都是建立在该模型的基础上的. Matthew A Herman 等人将 CS 应用到高分辨率雷达探测中^[36],通过发射充足的“不相关”脉冲,利用 CS 技术来获得高分辨的目标探测性能.

6.2 压缩成像

和传统的成像方式完全不同;压缩感知成像可以从远低于 Nyquist 采样率的采样率获取高质量的图像,有效降低了传感器数目与硬件成本,为微波、医疗成像提供了新的理论和方法,目前在医疗成像、光学成像、对地观测等领域得到了成功的应用.第一个被广泛认可的实用系统就是美国 Rice 大学 Baraniuk 等人研制出的单像素相机,类似的系统还有 Kir 研制的 Analog-to-Information Converter(AIC)、莱斯大学 R Baraniuk 教授研制的单像素相机和 A/I 转换器、麻省理工学院研制的 MRI RF 脉冲设备、麻省理工学院 W T Freeman 教授研制的编码孔径相机、耶鲁大学研制的超谱成像仪、伊利诺伊州立大学 O Milenkovic 研制的 DNA 微阵列传感器,以及我国中科院研制的 CS 滤波器和混沌腔等.美国 DARPA(Defense Advanced Research Projects Agency)资助的 MONTAGE(Multiple Optical Non-Redundant Aperture Generalized Sensors)研究计划极具应用潜力,目前已完成焦平面编码等技术可行性的实验验证.在国内,自 2009 年 973 计划开始资助中科院电子所、北京航空航天大学、西安电子科技大学、清华大学、上海交通大学等单位开展“稀疏微波成像”的研究.

6.3 压缩机器学习

在有限维的压缩感知框架中,观测向量可以看作是原始数据的一组特征,因此可以采用压缩感知理论建立压缩机器学习框架,把机器学习中典型的分类与回归问题在该框架下以更简洁的方式求解.

此外, Jarvis Haupt 等人将压缩感知用于处理网络数据,提出了网络数据压缩感知^[102].由于网络数据信息量比较大,因此可以将每个传感器节点的数据进行观测,就可以利用 CS 理论解决网络数据信息量比较大的问题.

7 总结与展望

压缩感知理论利用了信号的稀疏特性,将原来基于奈奎斯特采样定理的信号采样过程转化为基于优化计算恢复信号的观测过程.本文对压缩感知理论框架的全过程进行了描述,详细阐述了压缩感知理论所涉及的关键技术,综述了国内外研究成果、存在的公开问

题及最新的相关理论.尽管目前关于 CS 的研究非常多,但作者认为有如下几点内容可供读者参考:

(1)在稀疏表示方面,低秩表示和流形结构与稀疏性有着密切联系,将其引入信号的稀疏表示有望得到更好的结果;

(2)在压缩观测方面,目前的做法大都采用线性观测的方式,如果能考虑实际环境中的可能噪声,在观测时引入某些局部的非线性操作,将有望得到更加鲁棒的观测;

(3)在优化重建方面,如果能联合信号的先验和稀疏性先验求解优化问题,将有望得到更好的恢复效果.

参考文献

- [1] D Donoho. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289 – 1306.
- [2] E Candès, M Wakin. An introduction to compressive sampling [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 21 – 30.
- [3] D Donoho, Y Tsaig. Extensions of compressed sensing [J]. Signal Processing, 2006, 86(3): 533 – 548.
- [4] E Candès, J Romberg, T Tao. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489 – 509.
- [5] E Candès, T Tao. Near-optimal signal recovery from random projections; Universal encoding strategies? [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(12): 5406 – 5425.
- [6] S Sarvotham, D Baron, R G Baraniuk. Measurements vs. bits: compressed sensing meets information theory [A]. Allerton Conference on Communication, Control, and Computing, Monticello[C]. IL, September 2006.
- [7] M Akcakaya, V Tarokh. A frame construction and a universal distortion bound for sparse representations [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(6): 2443 – 2450.
- [8] B Babadi, N Kalouptsidis, V Tarokh. asymptotic achievability of the Cramér-Rao bound for noisy compressive sampling [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(3): 1233 – 1236.
- [9] B Michael, M Wakin, J Laska, et al. Compressive imaging for video representation and coding[A]. Proc. Picture Coding Symposium (PCS)[C]. Beijing, China, April 2006.
- [10] M Lustig, D Donoho, J M Pauly. Sparse MRI: the application of compressed sensing for rapid MR imaging [J]. Magnetic Resonance in Medicine, December 2007, 58(6): 1182 – 1195.
- [11] J Provost, F Lesage. The application of compressed sensing for photo-acoustic tomography [J]. IEEE Transaction on Medical Imaging, 2009, 28(4): 585 – 594.
- [12] H Jung, K Sung, S Krishna, E Y Kim, J C Ye. K-t FOCUSS: A general compressed sensing framework for high resolution

- dynamic MRI [J]. *Magnetic Resonance in Medicine*, 2009, 61:103 – 116.
- [13] Y C Kim, S S Narayanan, K S Nayak. Accelerated three-dimensional upper airway MRI using compressed sensing [J]. *Magnetic Resonance in Medicine*, 2009, 61:1434 – 1440.
- [14] J Trzasko, A Manduca. Highly undersampled magnetic resonance image reconstruction via homotopic ℓ_1 -minimization [J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2009, 28(1):106 – 121.
- [15] S Hu, M Lustig, et al. Compressed sensing for resolution enhancement of hyperpolarized ^{13}C flyback 3D-MRSI [J]. *Journal of Magnetic Resonance*, 2008, 192(2):258 – 264.
- [16] W L Chan, K Charan, et al. A single-pixel terahertz imaging system based on compressive sensing [J]. *Applied Physics Letters*, 2008, 93(12):101 – 105.
- [17] J W Ma. Single-pixel remote sensing [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2009, 6(2):199 – 203.
- [18] H Y Yu and G Wang. Compressed sensing based interior tomography [J]. *Physics in Medicine and Biology*, 2009, 54:2791 – 2805.
- [19] M Duarte, M Davenport, et al. Single-pixel imaging via compressive sampling [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2):83 – 91.
- [20] J Romberg. Imaging via compressive sampling [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2):14 – 20.
- [21] R Baraniuk and P Steeghs. Compressive radar imaging [A]. *IEEE Radar Conference [C]*. Waltham, Massachusetts, April 2007. 128 – 133.
- [22] G Tauböck and F Hlawatsch. A compressed sensing technique for OFDM channel estimation in mobile environments: Exploiting channel sparsity for reducing pilots [A]. *IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP) [C]*. Las Vegas, Nevada, April 2008. 2885 – 2889.
- [23] W Bajwa, J Haupt, A Sayeed and R Nowak. Joint source-channel communication for distributed estimation in sensor networks [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 53(10):3629 – 3653.
- [24] W U Bajwa, J Haupt, G Raz, R Nowak. Compressed channel sensing [A]. *Conf on Info Sciences and Systems (CISS) [C]*. Princeton, New Jersey, March 2008.
- [25] Y Mostofi, P Sen. Compressed mapping of communication signal strength [A]. *Military Communications Conference [C]*. San Diego, CA, November 2008.
- [26] W U Bajwa, A Sayeed, R Nowak. Compressed sensing of wireless channels in time, frequency, and space [A]. *Asilomar Conf on Signals, Systems, and Computers [C]*. Pacific Grove, California, October 2008.
- [27] J Wright, A Yang, Arvind Ganesh, Shankar Shastri, Yi Ma. Robust face recognition via sparse representation [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2009, 31(2):210 – 227.
- [28] M Elad. Optimized projections for compressed sensing [J]. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 2007, 55(12):5695 – 5702.
- [29] O Maillard, R Munos. Compressed Least Squares Regression [A]. *Neural Information Processing Systems (NIPS) [C]*. Vancouver, Canada, December 2009.
- [30] J Mairal, F Bach, J Ponce, G Sapiro, A Zisserman. Discriminative learned dictionaries for local image analysis [A]. *IEEE Conf on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR) [C]*. Anchorage, Processing, 2008.
- [31] R Calderbank, S Jafarpour, and R Schapiro. Compressed learning: Universal sparse dimensionality reduction and learning in the measurement domain [R]. Technical report, Rice University, 2009.
- [32] W Dai, M Sheikh, O Milenkovic, R G Baraniuk. Compressive sensing DNA microarrays [R]. Rice University Technical. Report ECE – 07 – 06, May 2007. 1 – 8.
- [33] W Dai, O Milenkovic, M A Sheikh, and R G Baraniuk. Probe design for compressive sensing DNA microarrays [A]. *IEEE International Conference on Bioinformatics and Biomedicine [C]*. IEEE Press, 2008. 163 – 169.
- [34] M A Sheikh, S Sarvotham, O Milenkovic, R G Baraniuk. DNA array decoding from nonlinear measurements by belief propagation [A]. *14th IEEE/SP Workshop on Statistical Signal Processing [C]*. Madison, WI, USA, Aug. 2007. 215 – 219.
- [35] M Sheikh, O Milenkovic, R G Baraniuk. Designing compressive sensing DNA microarrays [A]. *IEEE Workshop on Computational Advances in Multi-Sensor Adaptive Processing (CAMSAP) [C]*. St Thomas, U S Virgin Islands, December 2007.
- [36] M Herman, T Strohmer. High-resolution radar via compressed sensing [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(6):2275 – 2284.
- [37] K R Varshney, M çetin, J W Fisher, A S Willsky. Sparse representation in structured dictionaries with application to synthetic aperture radar [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(8):3548 – 3561.
- [38] R Neelamani, C Krohn, J Krebs, M Deffenbaugh, J Romberg. Efficient seismic forward modeling using simultaneous random sources and sparsity [A]. *Society of Exploration Geophysicists (SEG) Annual Meeting [C]*. Las Vegas (NV), November 2008.
- [39] G Hennenfent, F J Herrmann. Simply denoise: wavefield reconstruction via jittered undersampling [J]. *Geophysics*, 2008, 73(13):V19 – V28.
- [40] J Bobin, J L Starck, R Ottensamer. Compressed sensing in as-

- tronomy [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, 206(2): 980 – 988.
- [41] D Shamsi, P Boufounos, F Koushanfar. Noninvasive leakage power tomography of integrated circuits by compressive sensing[A]. *Proceeding of the 13th International Symposium on Low Power Electronics and Design* [C]. Bangalore, India, 2008.
- [42] R M Willet, M E Gehm, D J Brady. Multiscale reconstruction for computational spectral imaging [A]. *Proc SPIE, 6498, SPIE-IS and Electronic Imaging* [C]. 2007.
- [43] V K Goyal, A K Fletcher, S Rangan. Compressive sampling and lossy compression [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2): 48 – 56.
- [44] L Baboulaz, P L Dragotti. Exact feature extraction using finite rate of innovation principles with an application to image super-resolution [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2009, 18(2): 281 – 298.
- [45] D Baron, M F Duarte, Michael B Wakin, Shiram Sarvotham, Richard G Baraniuk. Distributed compressive sensing[J]. *Neural Information Processing Systems (NIPS)*, 2005.
- [46] V Cevher, A Gurbuz, J McClellan, R Chellappa. Compressive wireless arrays for bearing estimation of sparse sources in angle domain[A]. *IEEE Int Conf on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)* [C]. Las Vegas, Nevada, April 2008.
- [47] A Gurbuz, J McClellan, V Cevher. A compressive beamforming method[A]. *IEEE Int Conf on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)* [C]. Las Vegas, Nevada, April 2008.
- [48] D Takhar, V Bansal, M Wakin, M Duarte, D Baron, J Laska, K F Kelly, R G Baraniuk. A compressed sensing camera: New theory and an implementation using digital micromirrors[A]. *Proc Comput Imaging IV at SPIE Electronic Imaging* [C]. San Jose, Jan. 2006.
- [49] H Jung, J C Ye, E Y Kim. Improved k-t BLASK, k-t SENSE using FOCUSS [J]. *Phys Med Biol*, 2007, 52: 3201 – 3226.
- [50] S Ji, Y Xue, L Carin. Bayesian compressive sensing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(6): 2346 – 2356.
- [51] Y T Qi, D H Liu, D Dunson, L Carin. Bayesian multi-task compressive sensing with dirichlet process priors[A]. *International Conference on Machine Learning (ICML)* [C]. Helsinki, Finland, 2008. 768 – 775.
- [52] M W Seeger, H Nickish. Compressed sensing and bayesian experimental design[A]. *Int Conf on Machine Learning (ICML)* [C]. Helsinki, Finland, 2008. 912 – 919.
- [53] A M Bruckstein, M Elad, M Zibulevsky. A non-negative and sparse enough solution of an underdetermined linear system of equations is unique[A]. *ISCCSP* [C]. Malta, 2008. 762 – 767.
- [54] B Matei, Y Meyer. A variant on the compressed sensing of Emmanuel Candès[OL]. <http://www.dsp.ece.rice.edu/cs>.
- [55] M F Duarte, R G Baraniuk. Spectral Compressive Sensing [OL]. <http://www.dsp.ece.rice.edu/cs>, (Preprint).
- [56] W Guo, W Yin. Edge CS: an edge guided compressive sensing reconstruction[R]. *Rice University CAAM Technical Report TR10 – 02*, 2010.
- [57] M F Duarte, R G Baraniuk. Kronecker Compressive Sensing [OL]. <http://www.dsp.ece.rice.edu/cs>, (Preprint).
- [58] L Gan. Block compressed sensing of natural images[A]. *Conf on Digital Signal Processing (DSP)* [C]. Cardiff, UK, July 2007.
- [59] M Mishali, Y C Eldar. Blind multi-band signal reconstruction: compressed sensing for analog signals [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(3): 993 – 1009.
- [60] M Mishali, Y C Eldar. From theory to practice: Sub-Nyquist sampling of sparse wideband analog signals [J]. *IEEE Journal of Selected Topics on Signal Processing*, 2010, 4(2): 375 – 391.
- [61] M A Davenport, P T Boufounos, M B Wakin, R G Baraniuk. Signal processing with compressive measurements [J]. *IEEE Journal of Selected Topics on Signal Processing*, 2010, 4(2): 445 – 460.
- [62] S G Mallat, Z F Zhang. Matching pursuits with time-frequency dictionaries [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, 41(12): 3397 – 3415.
- [63] J A Tropp, A C Gilbert. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2007, 53(12): 4655 – 4666.
- [64] M Fornasier, H Rauhut. Iterative thresholding algorithms [J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2008, 25(2): 187 – 208.
- [65] S Foucart, M Lai. Sparsest solutions of underdetermined linear systems via lp-minimization for $0 < p < 1$ [J]. *Appl Comput Harmon Anal*, 2009, 26(3): 395 – 407.
- [66] T Cai, L Wang, G Xu. Shifting inequality and recovery of sparse signals [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(3): 1300 – 1308.
- [67] T Tony Cai, L Wang, G W Xu. New bounds for restricted isometry constants [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(9): 4388 – 4394.
- [68] D L Donoho, X Huo. Uncertainty principles and ideal atomic decomposition[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1999, 47(7): 2845 – 2862.
- [69] M Elad, A M Bruckstein. A generalized uncertainty principle and sparse representation in pairs of bases [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2002, 48(9): 2558 – 2567.
- [70] B S Kashin, V N Temlyakov. A remark on Compressed Sensing[J]. *Mathematics and Statistics*, 2007, 82(5 – 6): 748 – 755.

- [71] E Candès, Y C Eldarb, D Needella, P Randalle. Compressed sensing with coherent and redundant dictionaries [J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2011, 31(1): 59 – 73.
- [72] R Chartrand. Exact reconstruction of sparse signals via non-convex minimization [J]. *IEEE Signal Process Lett*, 2007, 14(10): 707 – 710.
- [73] R Chartrand, V Staneva. Restricted isometry properties and nonconvex compressive sensing [J]. *Inverse Problems*, 2008, 24(035020): 1 – 14.
- [74] E Candès, M B Wakin, S P Boyd. Enhancing sparsity by reweighted ℓ_1 minimization [J]. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2008, 14(5): 877 – 905.
- [75] Z B Xu, H Y Wang, X Y Chang. $L_{1/2}$ Regularizer [J]. *Sci China Ser F-Inf Sci*, Jan. 2009, 52(1): 1 – 9.
- [76] E L Pennec, S Mallat. Sparse geometrical image representation with bandelets [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2005, 14(41): 423 – 438.
- [77] 张春梅, 尹忠科, 肖明霞. 基于冗余字典的信号超完备表示与稀疏分解 [J]. *科学通报*, 2006, 51(6): 628 – 633.
- [78] M Elad. *Sparse and Redundant Representations: From Theory to Applications in Signal and Image Processing* [M]. Springer, 2010.
- [79] R J Duffin, A C Schaeffer. A class of non-harmonic Fourier series [J]. *Trans. AMS* 72, 1952: 341 – 366.
- [80] K Engan, S O Aase, J Hakon Husoy. Method of optimal directions for frame design, acoustics, speech, and signal processing [A]. *Proceedings of ICASSP'99* [C]. 1999. 2443 – 2446.
- [81] M Elad, M Aharon. Image denoising via sparse and redundant representations over learned dictionaries [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, 15(12): 3736 – 3745.
- [82] M Aharon, M Elad, A Bruckstein. K-SVD: an algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(11): 4311 – 4322.
- [83] K Engan, K Skretting, J H Husoy. A family of iterative LS-based dictionary learning algorithms, ILS-DLA, for sparse signal representation [J]. *Digital Signal Process*, 2007, 17: 32 – 49.
- [84] K Skretting, K Engan. Recursive least squares dictionary learning algorithm [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(4): 2121 – 2130.
- [85] H Zayyani, M Babaie-Zadeh. Thresholded smoothed- L_0 (SL0) dictionary learning for sparse representations [A]. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing* [C]. 19 – 24 Apr. 2009. 1825 – 1828.
- [86] R Mazhar, P D Gader. EK-SVD: Optimized dictionary design for sparse representations [A]. *19th International Conference on Pattern Recognition* [C]. 8 – 11 Dec. 2008. 1 – 4.
- [87] Q Zhang, B X Li. Discriminative K-SVD for dictionary learning in face recognition [A]. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)* [C]. 13 – 18 June 2010. 2691 – 2698.
- [88] J M Duarte-Carvajalino, G Sapiro. Learning to sense sparse signals: simultaneous sensing matrix and sparsifying dictionary optimization [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*. 2009, 18(7): 1395 – 1408.
- [89] S Wei. *Random Sampling Using Shannon Interpolation and Poisson Summation Formulae* [R/OL]. Technical Report, <http://arxiv.org/abs/0909.2292>
- [90] T Ragheb, S Kirolos, et al. Implementation models for analog-to-information conversion via random sampling [A]. *IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems* [C]. 2007.
- [91] J A Tropp, M B Wakin, M F Duarte, D Baron, R G Baraniuk. Random filters for compressive sampling and reconstruction [A]. *Proc ICASSP 2006* [C]. Toulouse, France, 2006.
- [92] D L Donoho, M Elad. Optimal sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via L_1 minimization [J]. *Proc Nat Aca Sci*, 2003, 100(5): 2197 – 2202.
- [93] E Candès, T Tao. Decoding by linear programming [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, 51(12): 4203 – 4215.
- [94] D L Donoho. For most large undetermined systems of equations, the minimal ℓ_1 -norm near-solution approximates the sparsest near-solution [J]. *Comm on Pure and Applied Math*, 2006, 59(7): 907 – 934.
- [95] R Baraniuk, M Davenport, R DeVore, M Wakin. A simple proof of the restricted isometry property for random matrices [J]. *Constr Approx*, 2008, 28(3): 253 – 263.
- [96] J Trzasko, A Manduca. Relaxed conditions for sparse signal recovery with general concave priors [J]. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 2009, 57(11): 4347 – 4354.
- [97] M Davies, and R Gribonval. Restricted isometry constant where ℓ_p sparse recovery can fail for $0 < p < 1$ [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, 55(5): 2203 – 2214.
- [98] Y C Eldar. Compressed sensing of analog signals in shift-invariant spaces [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(8): 2986 – 2997.
- [99] G M Shi, J Lin, X Y Chen, F Qi, D H Liu, L Zhang. UWB echo signal detection with ultra-low rate sampling based on compressed sensing [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2008, 55(4): 379 – 383.
- [100] W Dai, O Milenkovic. Weighted superimposed codes and constrained integer compressed sensing [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, 55(5): 2215 – 2229.
- [101] J L Paredes, G R Arce, Z M Wang. Ultra-wideband com-

pressed sensing: channel estimation[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2007, 1(3): 383 - 395.

[102] J Haupt, W U Bajwa, M Rabbat, R Nowak. Compressed sensing for networked data [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 92 - 101.

作者简介

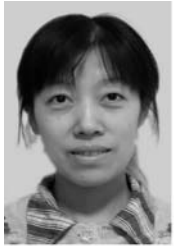


焦李成 男, 1959 年生于陕西. 西安电子科技大学电子工程学院教授、博导, CCF 高级会员, 主要研究领域为智能算法, 机器学习, 非线性科学, 小波理论及其应用.

E-mail: lchjiao@mail.xidian.edu.cn



刘芳 女, 1963 年生于北京. 西安电子科技大学计算机学院教授、博导. 主要研究领域为智能信息处理、模式识别等.



杨淑媛 女, 1978 年生于山东. 西安电子科技大学电子工程学院教授、博导. 主要研究领域为智能信号与图像处理、机器学习等.



侯彪 男, 1974 年生于陕西. 西安电子科技大学电子工程学院教授、博导. 主要研究领域为合成孔径雷达图像处理.