

# 时间序列复杂网络分析中的可视图方法研究综述

李海林<sup>1</sup>, 王 杰<sup>1</sup>, 周文浩<sup>1</sup>, 蔡 煜<sup>1</sup>, 林伟滨<sup>1,2</sup>

(1. 华侨大学工商管理学院, 福建泉州 362021; 2. 泉州师范学院商学院, 福建泉州 362021)

**摘 要:** 可视图是将时间序列转换成复杂网络的重要方法之一,也是连接非线性信号分析和复杂网络之间的全新视角,在经济金融、生物医学、工业工程等领域均应用广泛. 可视图的拓扑结构继承了原始时间序列的重要性质,稳定且易于实现,通过可视图网络的相关统计特性,可区分特定时间序列数据下的特定行为. 首先本文介绍了可视图方法在时间序列复杂网络分析中的相关研究,并通过必要性与可行性分析,充分说明可视图方法的优势所在. 然后本文阐述了经典可视图和水平可视图方法的具体步骤及主要性质,从算法的过程改进、效率提升和可视图应用几个方面对现阶段可视图相关研究进行综述,介绍了众多可视图方法的基本过程,分析了可视图算法的识别抗噪能力和建网效率,并归纳整理了这些可视图方法的主要特性与适用范围. 另外,本文复现了目前几种主流可视图算法,并公开相关的算法代码以供参考使用. 通过对可视图相关研究的综述分析,可了解现阶段可视图的主要研究方向,为未来相关研究提供思路,并为时间序列复杂网络分析奠定基础.

**关键词:** 可视图; 时间序列; 复杂网络; 网络特征

**基金项目:** 国家自然科学基金(No.71771094); 国家社会科学基金(No.22FGLB035); 福建省社会科学基金(No.FJ2020B088)

**中图分类号:** TP391.9

**文献标识码:** A

**文章编号:** 0372-2112(2023)09-2598-25

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.12263/DZXB.20230082

## A Review of Visibility Graph Methods Research in Time Series Complex Network Analysis

LI Hai-lin<sup>1</sup>, WANG Jie<sup>1</sup>, ZHOU Wen-hao<sup>1</sup>, CAI Yu<sup>1</sup>, LIN Wei-bin<sup>1,2</sup>

(1. College of Business Administration, Huaqiao University, Quanzhou, Fujian 362021, China;

2. College of Business, Quanzhou Normal University, Quanzhou, Fujian 362021, China)

**Abstract:** Visibility graph is one of the important methods for converting time series into complex networks, building a bridge between nonlinear signal analysis and complex networks with a new perspective, which is widely used in economic, biomedical, physics and other fields. Visibility graph inherits the dynamics of the original time series, is stable and easy to implement, and can distinguish specific behaviors under specific time series data by the relevant statistical properties of visibility graph. In this paper, we first introduce the application of the visibility graph in the analysis of time series complex networks. The advantages of the visibility graph are fully explained through the necessity and feasibility analysis. Then we describe the steps and main properties of basic visibility graph and horizontal visibility graph, and then review the current research on visibility graph from the following aspects: process improvement of algorithms, efficiency improvement of algorithms and visibility graph applications. We introduce the process of numerous visibility graph methods. We also summarize the main characteristics of these methods, analyze the recognition capability, anti-noise capability and network construction efficiency of visibility graph algorithms. In addition, we implement some algorithms and expose the codes for the general scholars to learn and use. Through the review and analysis of visibility graph related research, we can understand the main research directions of visibility graph at this stage, provide thinking for future related research, and establish the foundation for time series complex network analysis.

**Key words:** visibility graph; time series; complex network; network feature

**Foundation Item(s):** National Natural Science Foundation of China (No.71771094); National Social Science Foundation of China (No.22FGLB035); Social Science Planning Project of Fujian Province (No.FJ2020B088)

## 1 引言

时间序列是现实系统中某一观测值按时间先后顺序记录的一组数字序列,广泛存在于经济金融、生物学、地球科学、物理学等领域.时间序列分析作为数理统计的重要分支和学术研究的热点课题,旨在从真实时间序列数据中发现统计规律以及揭示动态系统所蕴含的决策信息和演化规律,考虑时间因素有助于聚类<sup>[1]</sup>、时间序列预测<sup>[2]</sup>、多重分形去趋势波动分析<sup>[3]</sup>和相似性度量<sup>[4]</sup>等工作.然而,随着时间序列的复杂性增加,传统的非线性时间序列分析方法,如非线性相关函数、嵌入算法和多重分形谱等,也变得越来越复杂.因此,利用复杂网络方法来揭示时间序列中的潜在信息是十分必要的.

复杂网络是一种能够有效表征复杂系统结构的数学工具.将时间序列转换成具有丰富拓扑特征的复杂网络,有助于提取更多有价值的特征信息.以 Watts 等<sup>[5]</sup>和 Barabasi 等<sup>[6]</sup>分别提出“小世界”性和无标度性为标志,复杂网络在理论和应用方面取得重要进展,在信息、社会、技术和生物系统等跨学科领域也引起广泛关注. Zhang 等<sup>[7]</sup>提出从伪周期时间序列构造复杂网络的思想,构筑起时间序列和复杂网络之间的桥梁.此后各种有关时间序列复杂网络建网方法陆续出现,包括可视图方法<sup>[8-11]</sup>、相空间重构法<sup>[12,13]</sup>、递归分析法<sup>[14,15]</sup>、基于符号化的方法<sup>[16]</sup>以及其他建网方法.

可视图方法是由 Lacasa 等<sup>[8]</sup>于 2008 年提出的一种基于时间序列构建的复杂网络方法,很大程度上简化了计算步骤.与其他建网方法相比,其优势体现在:(1)无需经过复杂的相空间划分,适用于大型、异构的非平稳时间序列分析;(2)方法无参数、计算过程简单且计算效率高;(3)生成的网络具有仿射不变等特性且继承了原始时间序列的动力学特征,可将周期序列转换为规则网络,随机序列转换为随机网络,分形序列转换为无标度网络.同时,可视图方法还能够使用一些统计量来量化网络的特征结构,如平均度、聚类系数、平均路径长度等.因此,有必要对可视图方法包括性能与应用在内的各个方面展开深入研究.

时间序列复杂网络分析是一种基于时间序列数据构建网络,并对网络进行结构和动态特征分析的方法.与传统时间序列分析方法不同,时间序列复杂网络分析强调从网络层面对时间序列进行研究,能够更加深入地理解时间序列数据的规律性和本质特征.可视图方法作为一种重要的时间序列复杂网络分析方法,近年来被越来越多的学者用于时间序列复杂网络分析中.然而,国内对可视图构建复杂网络算法进行综述的文献较少,同时存在着年限久远许多新型可视图衍生

算法未能囊括以及对应用方面归纳不足等问题.基于以上原因,本文通过相关文献研究对可视图进行重新梳理与总结,主要贡献包括以下三点.

(1)综述可视图方法在改进和应用方面的研究进展.本文在第3节和第4节重点介绍可视图及其衍生算法,从方向、权重、维度和效率提升等多个方面对可视图相关算法的概念和性质进行综述,其中涵盖了近年来大多数可视图相关研究.在第5节系统梳理了可视图在各研究领域中的应用现状,包括经济金融、生物学、物理学、地球科学和计算机及工程应用领域,有效地帮助读者建立系统性认知.

(2)对比可视图方法的抗噪性能和建网效率.本文在第5节选取6个具有代表性的可视图算法,考查这些算法对于分形、周期、混沌和随机序列的识别和抗噪能力,并计算各个算法的建网耗时.研究表明,在保持较高识别和抗噪能力的前提下,一些可视图算法的建网效率较低.该实验结果为时间序列复杂网络分析及相关领域的研究奠定了基础.

(3)展望可视图未来的研究方向,提供可视图实现代码.根据现阶段可视图研究所面临的问题与挑战,本文在第6节提出了多个可能的未来研究方向,为后续研究提供了参考.同时,在结语部分提供了可视图算法的代码链接,以方便读者进行学习和参考.

## 2 时间序列复杂网络分析中的可视图方法

### 2.1 基于可视图方法的时间序列复杂网络分析相关研究

非线性时间序列分析的思想和技术源于混沌理论和动力系统理论的快速发展,该分析方法主要针对几种典型任务进行研究,如区分不同信号、测试时间序列可逆性、量化复杂动力学的分岔过渡场景等<sup>[17]</sup>.下面举例说明如何通过可视图解决这些非线性时间序列分析问题.

(1)估计分数布朗运动的 Hurst 指数.准确估计 Hurst 指数有助于理解和建模现实世界中的时间序列.由于分数布朗运动的非平稳性和长期依赖性,使用 Hurst 指数表征容易产生模糊的结果.为此, Lacasa 等<sup>[18]</sup>利用基于图论技术的可视图方法估计 Hurst 指数.该方法将分数布朗运动序列映射到无标度可视图图中,其度分布遵循幂律形式  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ ,同时表明幂律分布指数  $\gamma$  与 Hurst 指数  $H$  之间存在线性关系:分数布朗运动的可视幂律分布指数  $\gamma=3-2H$ ,分数高斯噪声的可视幂律分布指数  $\gamma=5-2H$ .因此,通过计算  $\gamma$  值并利用二者间的线性关系,能够准确地估计 Hurst 指数.可视图提供了一种量化序列长期依赖性的全新方法.

(2)区分随机序列与混沌序列. 随机和混沌过程之间存在许多共同特征, 如何对其区分成为众多学者研究的问题, 其中大多数方法在计算方面较为复杂. 因此, Lacasa 等<sup>[19]</sup>提出使用水平可视图用于描述随机和混沌序列. 该算法将时间序列映射到网络表示中, 并使用图论工具研究序列特性. 通过计算水平可视图的度分布  $P(k)$ , 将其拟合为指数函数  $e^{-\lambda k}$ , 其中  $\lambda$  能够用来表征和区分特定过程. 混沌和相关随机序列之间的边界为  $\lambda = \ln(3/2)$ , 若  $\lambda > \ln(3/2)$ , 则序列为相关随机序列; 若  $\lambda < \ln(3/2)$ , 则序列为混沌序列. 该算法概念简单且计算效率高, 在区分随机序列与混沌序列的同时, 还能够通过参数  $\lambda$  量化序列随机性和混沌性的程度.

(3)检测时间序列的不可逆性. 时间序列不可逆性是基础科学和应用科学中的一个重要课题. Lacasa 等<sup>[20]</sup>提出一种测量实值时间序列不可逆性的方法. 该方法首先将时间序列映射到有向水平可视图中, 并计算网络的入度分布  $P_{in}(k)$  和出度分布  $P_{out}(k)$ , 然后使用 Kullback-Leibler 散度  $D[P_{out}(k) || P_{in}(k)]$  来测量时间序列的不可逆性. 该方法计算效率高, 不需要任何符号化过程, 并且自然地考虑了多个尺度. 研究发现该方法正确地区分了可逆和不可逆平稳时间序列, 并在多个任务中取得了良好的性能.

除了上述案例之外, 大量可视图的相关研究利用网络度分布或重整化群等理论进行时间序列分析, 如检测序列周期性<sup>[21]</sup>、研究间歇性<sup>[22,23]</sup>、准周期图<sup>[24]</sup>、Feigenbaum 图<sup>[25-28]</sup>和时间序列可逆性<sup>[29]</sup>等. 此外, 一些研究通过聚类系数<sup>[30]</sup>、中心性<sup>[31]</sup>和符号动力学<sup>[32]</sup>等网络和拓扑理论进行基于可视图的时间序列复杂网络应用研究, 分别取得了不错的效果.

## 2.2 可视图方法的必要性与可行性分析

时间序列复杂网络分析是一种将时间序列数据转换为图形网络结构, 并利用网络理论和复杂系统理论等方法来研究时间序列性质的方法. 可视图作为该领域的重要方法之一, 能够以可视性准则捕捉时间序列数据点间的关系, 同时提供了对时间序列结构和演化特征的有效挖掘. 下面将着重探讨可视图方法在时间序列复杂网络分析中的必要性与可行性.

(1)必要性分析. ①可视图能够提供对时间序列局部和全局特征的有效描述. 可视图方法通过连接可见的节点来构建网络, 通过网络中节点的度分布、聚类系数、平均路径长度和小世界性等特征分析, 提供了一种有效描述时间序列局部和全局特征的方法, 能够揭示时间序列的复杂结构和动力学特征. ②可视图能够从多种角度处理复杂和异质性时间序列数据. 对于包含噪声、多通道的复杂时间序列, 可视图从有限穿越、方向、权重和多维等角度提出相应衍生算法, 在考虑时间

因素和丰富网络信息的同时, 为提升抗噪性能、建立多通道之间的联系提供解决方案. ③可视图鲁棒性较强. 可视图方法建立的网络具有仿射变换下保持不变等特性, 能够更好地应对噪声等异常情况. 在网络结构相对稳定的情况下, 相对于其他时间序列复杂网络分析方法, 可视图方法更具鲁棒性. 因此, 使用可视图方法进行时间序列复杂网络分析是十分必要的.

(2)可行性分析. ①可视图适应性强, 具有广泛的应用前景. 可视图能够应用于金融学、物理学、地球科学和生物医学等多个学科领域. 例如, 可视图方法可以用在经济金融时间序列分析<sup>[33]</sup>、滚动轴承故障诊断<sup>[34]</sup>、气候变化特征分析<sup>[35]</sup>和癫痫脑电图检测<sup>[36]</sup>等方面. 因此, 可视图方法具有很好的普适性和可适应性. ②可视图简单易于实现. 可视图方法通过可视性准则构建网络, 建网规则简单且容易实现, 并且无需先验知识的提供和相空间划分的处理, 能够便捷地从大量时间序列数据中提取有价值的信息.

综上所述, 可视图方法在时间序列复杂网络分析中的必要性和可行性显而易见. 可视图方法不仅能够帮助研究人员更好地理解时间序列结构和动态特性, 同时具有很好的适应性和实用性, 推动了时间序列复杂网络分析研究及其应用的发展. 在实际应用中, 针对不同类型的时间序列数据和研究问题, 需要结合具体情况选择合适的可视图方法, 以提高分析精度和效果. 下文将重点针对可视图及其衍生算法进行介绍.

## 3 传统可视图的基本概念与性质

### 3.1 经典可视图算法

经典可视图(Visibility Graph, VG)是一种将时间序列简单快捷地转化成复杂网络的方法. 它将时间序列中的数据点抽象为节点, 依照可视性准则连接节点形成网络, 为可视图创新与改进奠定了理论基础. 为了更好地描述可视图的原理和计算过程, 给定一个周期为 4 具有 12 个数据点的时间序列  $TS = \{0.35, 0.68, 0.82, 0.18, 0.35, 0.68, 0.82, 0.18, 0.35, 0.68, 0.82, 0.18\}$ . 首先, 将时间序列数据点转化为直方条, 以直方条高度表示数据点的值且排列顺序一致, 如图 1(a)所示. 然后, 确定两直方条之间的可视性连线, 将两直方条顶点以直线相连, 若直线不被其他直方条截断, 则说明两直方条互相可见, 即两直方条之间存在可视性连线. 更正式地说, 以直方条顶点坐标  $(t_i, y_i)$  表示时间序列数据点, 根据 VG 可视性准则确定两点之间的连线. 其中,  $t_i$  为各数据点的序号,  $y_i$  为各数据点的值. 最后, 将直方条映射成网络节点, 将直方条间的可视性连线映射成网络连边, 得到可视图网络, 如图 1(b)所示.

VG 可视性准则: 对于任意两点  $A(t_a, y_a)$  和  $B(t_b, y_b)$



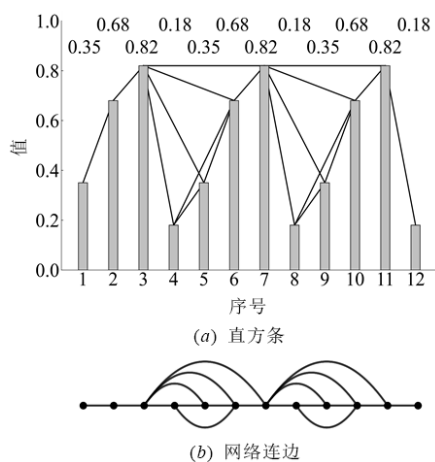


图1 经典可视图

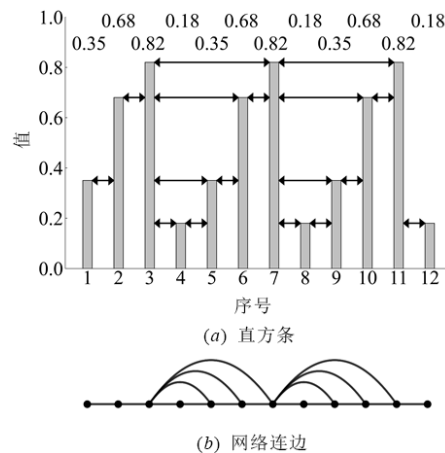


图2 水平可视图

及  $A$  和  $B$  间的任意点  $C(t_c, y_c)$ , 其中,  $t_a < t_c < t_b$ , 若满足式(1)或  $A$  和  $B$  两点相邻, 则说明  $A$  和  $B$  两点存在连边。

$$y_c < y_b + (y_a - y_b) \frac{t_b - t_c}{t_b - t_a} \quad (1)$$

可视图继承了原始时间序列的重要性质: 周期时间序列的可视图是规则网络即具有模式重复的特点, 且网络度分布由与序列周期相关的有限数量的峰组成, 说明可视图继承了周期时间序列的规律性<sup>[8]</sup>; 对于随机时间序列, 通过解释其可视图度分布的形成原因, 说明算法捕捉到序列的随机性质以及度分布形状与特定随机过程有关<sup>[8]</sup>; 对于分形时间序列, 通过发现 Brown 和 Conway 两序列可视图度分布幂律指数不同, 强化了在可视图背景下无标度网络(即网络度分布服从幂律分布)由分形序列产生的观点<sup>[8]</sup>. 分形序列的特征是 Hurst 指数, 可视图能够估计分数布朗运动的 Hurst 指数<sup>[18]</sup>, 同样说明它保留了分形时间序列的特性. 此外, 可视图还具有以下四个性质: (1) 相邻性, 即网络中各节点至少与其邻居节点相连; (2) 无向无权性, 即所生成的网络为无向未加权网络; (3) 仿射不变性, 即经时间序列仿射变换后, 对坐标轴进行线性变换和平移, 节点间的可视性不变; (4) 有损性, 即生成的网络会丢失部分时间序列信息. 例如, 对于两个等长且同周期的一维时间序列  $T_1 = \{3, 1, 3, 1, 3, 1\}$  和  $T_2 = \{3, 2, 3, 2, 3, 2\}$ , 尽管其具有相同的可视图网络但两序列并不是完全相同的。

### 3.2 水平可视图算法

Luque 等<sup>[9]</sup>提出的水平可视图(Horizontal Visibility Graph, HVG)提供了一种基于新的连边规则的建网方法. 与经典可视图中的可视性连线不同, 该方法仅将水平视线上互相可见的两点相连, 如图 2(a)所示. 然后将直方条及其连线映射成网络中的节点及连边, 如图 2(b)所示。

HVG 可视性准则: 对于时间序列中任意两点  $A(t_a, y_a)$  和  $B(t_b, y_b)$  及其间任意点  $C(t_c, y_c)$ , 其中,  $t_a < t_c < t_b$ , 若

满足式(2)或  $A$  和  $B$  两点相邻, 则说明节点  $A$  和  $B$  之间存在网络连边。

$$y_a > y_c, y_b > y_c \quad (2)$$

HVG 网络是 VG 网络的子图, 其具备 VG 网络相邻性、无向无权性、仿射不变性、有损性特点的同时, 简化了可视性准则具有统计量少和复杂度低等特点. 针对不同类型时间序列, HVG 具有不同性质: 对于周期内无重复的无限周期序列, 其 HVG 网络平均度  $k(T)$  与该序列周期  $T$  之间存在函数关系<sup>[21]</sup>, 如式(3)所示, 据此发现从动力系统中提取的时间序列的 HVG 网络平均度的取值范围为  $2 \leq k(T) \leq 4$ , 其中, 常数序列的平均度达到下界, 随机或混沌序列的平均度达到上界<sup>[9]</sup>; 对于随机时间序列, 其 HVG 网络度分布  $P(k)$  与节点度  $k$  之间存在关系如式(4)所示, 说明在不同概率分布条件下, 水平可视图的度分布  $P(k)$  具有相同的指数形式<sup>[9]</sup>. 随机或混沌时间序列的 HVG 网络还存在其他性质<sup>[37]</sup>, 如“小世界”性、局部聚类系数分布、数据高度与节点度间关系等。

$$k(T) = 4 \left( 1 - \frac{1}{2T} \right) \quad (3)$$

$$P(k) = \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} \right)^{k-2}, k = 2, 3, 4, \dots \quad (4)$$

通过 HVG 可以解决许多时间序列分析问题, 如区分随机序列与混沌序列<sup>[37]</sup>、检测噪声污染序列中隐藏周期性<sup>[21]</sup>、测量不可逆性<sup>[20]</sup>以及其他问题<sup>[22-24]</sup>. 同时, HVG 可以用于描述时间序列和非线性离散动力系统, 与符号动力学理论具有相似性. 众多可视图方法基于 HVG 改进而且具有广泛的应用。

## 4 可视图方法的衍生算法的基本概念与性质

### 4.1 有限穿越可视图算法

为解决 VG 和 HVG 对不同类型序列噪声适应性较

差的问题,周婷婷等<sup>[11]</sup>提出的有限穿越可视图(Limited Penetrable Visibility Graph, LPVG)在VG基础上增加了连边数量,提高了网络抗噪能力.该方法定义了有限穿越视距 $N$ .若 $A(t_a, y_a)$ 和 $B(t_b, y_b)$ 两点连线被其间直方条截断次数 $m \leq N$ ,则说明节点 $A$ 和 $B$ 之间存在连边.图3为 $N=1$ 时构建的LPVG网络,其中,实线为基于VG连线,虚线为基于LPVG的新增连线.

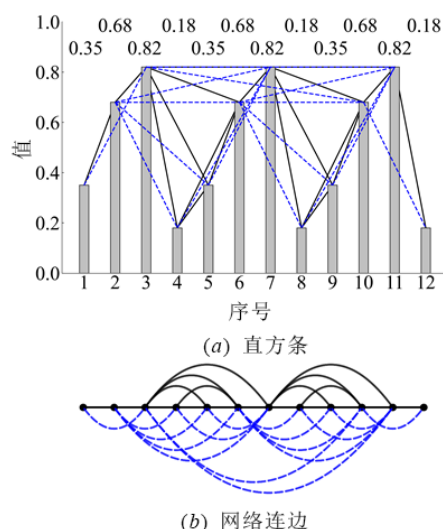


图3 有限穿越可视图

类似地,汤胤等<sup>[38]</sup>提出的有限穿越水平可视图(Limited Penetrable Horizontal Visibility Graph, LPHVG)在HVG网络基础上增加了连边数量.若 $A$ 和 $B$ 两点的水平可视性连线被其间直方条截断的次数 $m \leq N$ ,说明两点之间存在连边.图4为 $N=1$ 时构建的LPHVG网络,其中,实线为基于HVG连线,虚线为LPHVG新增连线.两方法通过增加网络连边数量的方式提高抗噪水平,在一定程度上降低了建网效率.

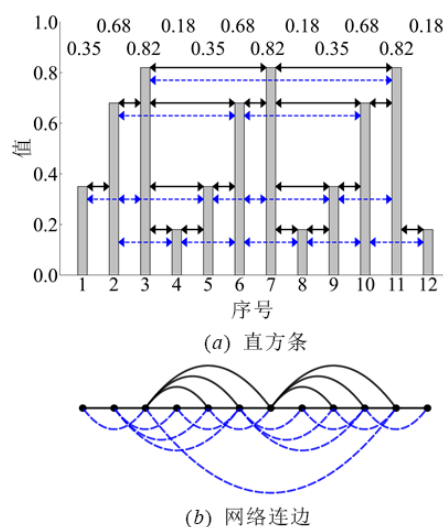


图4 有限穿越水平可视图

基于LPVG和LPHVG衍生出许多可视图方法:环形有限穿越可视图(Circular Limited Penetrable Visibility Graph, CLPVG)引入非线性可视性再次提升抗噪性能和分类能力<sup>[39]</sup>;图像有限穿越水平可视图(Image Limited Penetrable Horizontal Visibility Graph, ILPHVG)用于二维流形数据,所生成网络的度分布可区分噪声与混沌<sup>[40]</sup>;时间依赖有限穿越可视图(Time-Dependent Limited Penetrable Visibility Graph, TDLPG)具有较强的时变特征表征能力<sup>[41]</sup>;参数修正有限穿越可视图(Parametric Modified Limited Penetrable Visibility Graph, PMLPVG)保持了原始时间序列动态特性的同时提高了网络连通性<sup>[42]</sup>;有限穿越可视图模体熵(Limited Penetrable Visibility-Graph Motif Entropy, LPVGME)可用于挖掘油水两相流信息<sup>[43]</sup>.此外,一些可视图方法从其他角度出发解决噪声问题<sup>[21,44]</sup>.

## 4.2 有向可视图算法

如何度量时间序列的不可逆性是非线性时间序列分析的一大难题.目前大多数测量方法均存在时间复杂度过高的不足.有向可视图提供了一种新的角度,用于评估时间的不对称性和量化时间序列的不可逆性.Lacasa等<sup>[20]</sup>提出了定向水平可视图(Directed Horizontal Visibility Graph, DHVG),如图5所示.与HVG中两节点“互相可见”不同,DHVG中相连的两点表示前一节点对后一节点的“单向可见”.该方法通过与Kullback-Leibler散度结合来量化时间序列的不可逆性.此外,不相关随机序列的DHVG网络的入度分布 $P_{in}(k)$ 、出度分布 $P_{out}(k)$ 与度 $k$ 之间存在如式(5)所示的关系<sup>[20]</sup>.

$$P_{in}(k) = P_{out}(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k, k = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

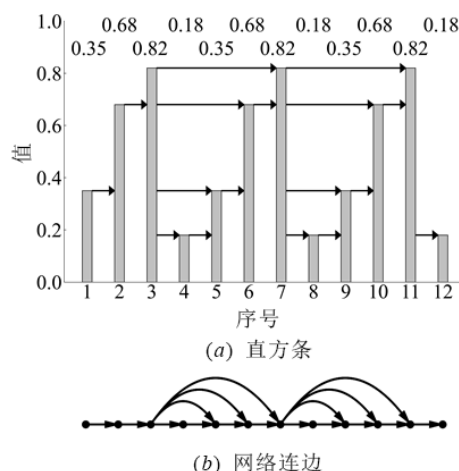


图5 定向水平可视图

类似地,汤胤等<sup>[38]</sup>提出有向有限穿越可视图(Directed Limited Penetrable Visibility Graph, DLPVG).如图6所示,该方法在LPVG基础上增加了连边方向,构

建前一节点向后一节点的单向链路. 此外, 有向有限穿透水平可视图 (Directed Limited Penetrable Horizontal Visibility Graph, DLPHVG) 在测量时间序列的不可逆性方面也具有一定应用价值<sup>[40]</sup>.

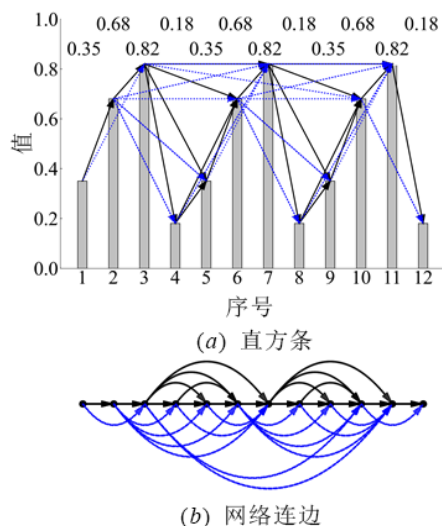


图6 有向有限穿透可视图

Bezsudnov 等<sup>[10]</sup>于 2014 年提出的参数自然可视图 (Parametric Natural Visibility Graph, PNVG), 既考虑了连边方向性又对其角度做出限制. 首先设置连续性视角参数  $\alpha$  的值, 并将可视性连线与对应直方条间的夹角记作  $\theta$  ( $\theta \leq 180^\circ$ ). 对于时间序列数据中任意两点, 若满足 VG 可视性准则且其连边与对应直方条间的夹角  $\theta < \alpha$ , 则存在由前点指向后点的定向链路. 图 7 展示了  $\alpha = 90^\circ$  的连线情况, 其中,  $\theta_{ab}$  表示  $a$  号直方条和  $b$  号直方条连线与直方条之间所形成的夹角, 浅色 (红色) 线条表示  $\theta < \alpha$  所对应的连线满足约束条件, 深色 (蓝色) 线条表示不满足约束条件的连线. 该方法提供新的视角用于描述时间序列结构, 还能够描述区分各种时间序列<sup>[10]</sup>.

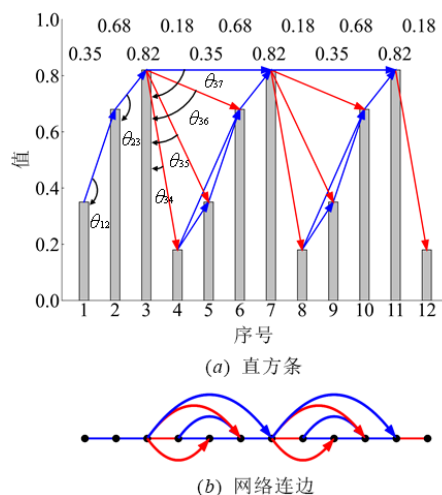


图7 参数自然可视图

### 4.3 加权可视图算法

鉴于传统可视图方法仅提供节点连通性信息, 不利于特征获取, 故有研究通过赋予连边权重构建加权可视图网络. Supriya 等<sup>[36]</sup>提出加权可视图 (Weighted Visibility Graph, WVG). 该方法在 VG 网络的基础上对  $A(t_a, y_a)$  和  $B(t_b, y_b)$  两点连边权值按照式 (6) 计算, 得到加权可视图. 通过提取加权可视图特征放入分类器进行评估, 在癫痫检测领域取得不错的分类效果. 针对该算法抗噪性能差和计算复杂度高等问题, Bose 等<sup>[45]</sup>从可穿透距离和规模因子两个方面进行优化.

$$w_{ab} = \arctan \frac{y_b - y_a}{t_b - t_a}, (a < b) \quad (6)$$

针对 HVG 方法不能区分单调与恒定时间序列的问题, Zhu 等<sup>[46]</sup>提出加权水平可视图 (Weighted Horizontal Visibility Graph, WHVG). 该方法在 HVG 网络的基础上根据式 (7) 计算  $A(t_a, y_a)$  和  $B(t_b, y_b)$  两点连边权值, 能够较好地识别癫痫发作期的脑电图.

$$w_{ab} = |(y_a - y_b)(t_a - t_b)| + 1 \quad (7)$$

此外, Zeng 等<sup>[47]</sup>提出基于可视性角度的加权可视图方法 (Visibility Angle based Weighted Visibility Graph, VA-WVG). 该方法在经典可视图的基础上将  $A$  和  $B$  两点的可视性角度  $\theta_{ab}$  作为连边权重来构建加权网络, 能够准确反映周期状态解的个数以及混沌状态的复杂性.

假设存在两直方条  $A$  和  $B$ , 直方条  $A$  位于直方条  $B$  的左侧, 记直方条  $A$  的顶点为  $A_m$ , 直方条  $B$  的顶点和最低点分别为  $B_m$  和  $B_l$ , 直方条  $A$  和  $B$  之间最高直方条  $C$  的顶点为  $C_m$ , 根据以下两种情况计算直方条  $A$  和  $B$  之间的可视性角度  $\theta_{ab}$ : (1) 若  $A_m$  与  $B_l$  互相可见, 即  $A_m B_l$  连边不被其他直方条截断, 那么连线  $A_m B_l$  与连线  $A_m B_m$  之间的夹角为  $\theta_{ab}$ ; (2) 若  $A_m$  与  $B_l$  不可见, 那么连线  $A_m C_m$  与连线  $A_m B_m$  之间的夹角为  $\theta_{ab}$ . 根据图 8 最上方给出的时间序列, 图 8(a) 计算出部分直方条与其他直方条形成的可视性角度, 图 8(b) 在 VG 网络基础上标出对应连边的权值.

### 4.4 多维可视图算法

近年来多维时间序列成为重点研究对象, 基于网络视角研究多维序列的相关研究逐渐增多<sup>[48, 49]</sup>. 为了使用可视图处理多维时间序列, Lacasa 等<sup>[50]</sup>于 2015 年提出多路水平可视图 (Multiplex Visibility Graph, MVG) 将多维时间序列通过 HVG 方法转换为多层网络. 图 9 展示出三维时间序列的转换过程: 首先将各个维度时间序列分别映射到直方图, 然后按照 HVG 可视性准则确定连边映射得到三个网络, 每个网络的节点互相对应即为三层网络. 通过计算得到所生成的多层网络的平均边缘重叠和层间互信息, 并将其用于衡量跨层单



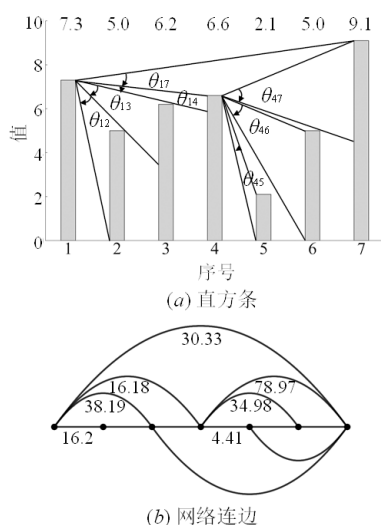


图8 基于可视性角度的加权可视图

边的丰富程度以及节点度的层间相关性. 该方法能够描述高维系统中各变量之间的共享信息, 在神经科学和经济金融等领域具有重要意义.

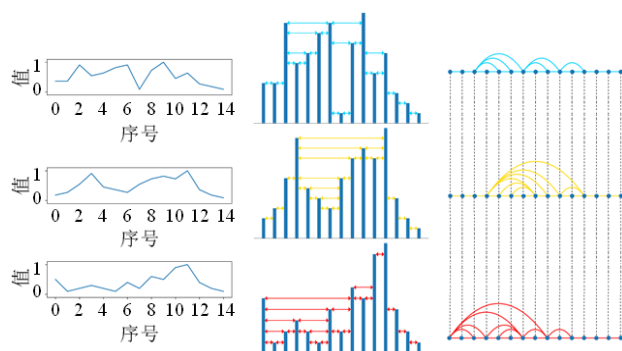


图9 多路水平可视图

Gao 等<sup>[51]</sup>提出多层有限穿越可视图 (Multilayer Limited Penetrable Visibility Graph, MLPVG), 如图 10 所示. 该方法使用 LPVG 处理多维时间序列得到多层网络, 对网络按位执行“与”操作和“或”操作得到两个投影网络  $P_1$  和  $P_2$ , 分别反映出各网络的重叠信息和整体信息. 通过计算得到两个投影网络的全局聚类系数比率, 并将其衡量多维时间序列中各维度间的统一性. 多层有限穿越可视图还为多通道测量与融合提供了新而有效的解决方案. 此外, 该团队还提出多层有限穿越水平可视图 (Multiplex Limited Penetrable Horizontal Visibility Graph, MLPHVG), 用于检测疲劳驾驶<sup>[52]</sup>、脑电信号分类及疲劳机制研究<sup>[53,54]</sup>, 通过从多通道脑电图信号中构建网络、分析平均加权聚类系数和加权全局系数的变化, 揭示大脑在正常状态和疲劳状态之间的差异.

Ren 等<sup>[55]</sup>提出向量可视图 (Vector Visibility Graph, VVG). 该方法以向量作为节点, 将多维时间序列映射

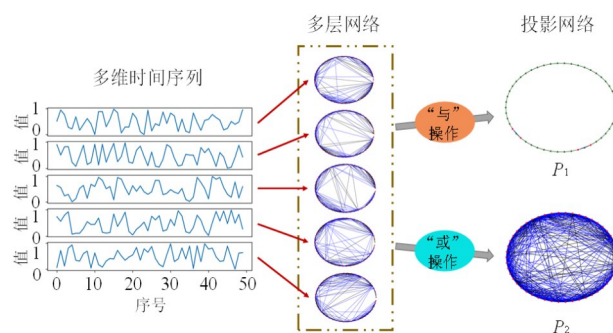


图10 多层有限穿越可视图

到向量空间得到向量序列  $TS = \{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_n\}$ , 其中, 向量  $\vec{X}_t = \{x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^m\}$  由同一时刻  $t$  的  $m$  个维度时间序列的值组成. 该方法将向量看作网络节点, 将满足 VVG 可视性准则的两点以有向链路相连得到向量可视图网络.

VVG 可视性准则: 若向量  $\vec{X}_a$  和向量  $\vec{X}_b$  之间任意其他向量  $\vec{X}_c$  满足式 (8), 则说明网络中存在从  $\vec{X}_a$  指向  $\vec{X}_b$  的定向链路.

$$\left\| \vec{X}_c^a \right\| < \left\| \vec{X}_b^a \right\| + \left( \left\| \vec{X}_a \right\| - \left\| \vec{X}_b \right\| \right) \frac{t_b - t_c}{t_b - t_a} \quad (8)$$

其中,  $t_a < t_c < t_b$ ,  $\left\| \vec{X}_b^a \right\|$  和  $\left\| \vec{X}_c^a \right\|$  分别为向量  $\vec{X}_b$  和向量  $\vec{X}_c$  到向量  $\vec{X}_a$  的投影, 计算方式如式 (9) 所示.

$$\left\| \vec{X}_b^a \right\| = \frac{\sum_{i=1}^m x_a^i x_b^i}{\sqrt{\sum_{i=1}^m x_a^i x_a^i}} \quad (9)$$

向量可视图在拓扑结构上继承了时间序列主要性质, 将多维随机序列转换成随机网络, 多维分形序列转换成分形网络. 该方法还能够用于识别气液两相流典型流动模式<sup>[55]</sup>. 此外, 文献<sup>[56,57]</sup>还提供了将二维时间序列转换成平面图以及构建三维可视图的分析方法.

#### 4.5 多尺度可视图算法

Gao 等<sup>[58]</sup>提出多尺度有限穿越水平可视图方法 (Multiscale Limited Penetrable Horizontal Visibility Graph, MLPHVG), 如图 11 所示. 该方法使用分段聚合近似对一维时间序列进行处理, 通过设置尺度因子  $s$  的值得到  $n$  个不同尺度的粗粒度时间序列  $y^{s_1}, y^{s_2}, \dots, y^{s_n}$ , 然后使用 LPHVG 将各粗粒度序列转换成多个网络. 研究发现, 不同尺度网络的平均聚类系数可用于识别描述三种典型油水流动模式. 类似地, Han<sup>[59]</sup>提出多尺度有限穿越可视图 (Multiscale Limited Penetrable Visibility Graph, MLPVG), 使用 LPVG 处理各个粗粒度时间序列. 该方法用于测量识别气水流转变, 通过对不同尺度网络进行测量, 能够揭示气体流速和水流速之间的流态转换.

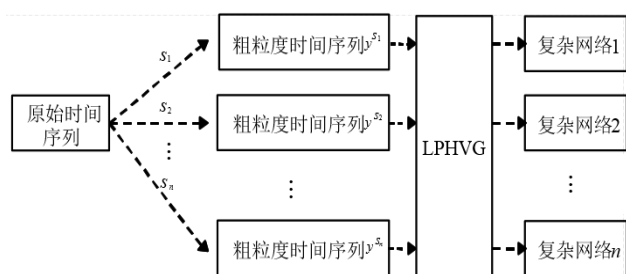


图 11 多尺度有限穿透水平可视图

此外,多尺度水平可视图相关分析方法(Multi-scale Horizontal-Visibility-Graph Correlation Analysis, MHVGCA)弥补了时间序列分析、多尺度分析与图论之间的差距,可用于股票时间序列分析以及量化股票市场收盘价和交易量之间的信息交换<sup>[60]</sup>。加权多尺度有限穿透可视图(Weighted Multi-Scale Limited Penetrable Visibility Graph, WMS-LPVG)可在噪声心电图信号中检测及表征心房颤动的节律<sup>[61]</sup>。

#### 4.6 可视图效率提升算法

使用可视图算法处理大规模时间序列数据需要花

费大量计算时间。为提高转换效率,Lan等<sup>[62]</sup>提出分治法(Divide & Conquer, DC),将可视图算法的时间复杂度从 $O(n^2)$ 降低到 $O(n \log n)$ ,显著地减少了算法计算时间。该方法具体计算过程为:(1)遍历时间序列找到序列中的最高直方条;(2)按照VG可视性准则将最高直方条与其两端直方条相连;(3)以最高直方条所在的下标为分界线将序列分成前后两部分;(4)分别对这两部分执行(1)~(3)操作直到不可再分为止,最终得到所有节点的连边集合。

图 12 是分治法确定各点连边的过程示意图。如图 12(a)所示,首先找到最高直方条为 5 号直方条,确定该直方条与其他直方条之间的连线。然后以该直方条为分界线将原序列分成两组子序列,1~4 号直方条为第一组,6~9 号为第二组,分别对其执行与上述类似的操作:处理第一组子序列数据的示意图如图 12(b)~(d)所示,图 12(b)中找到最高直方条为 2 号直方条并确定连边,图 12(c)和图 12(d)以 2 号直方条为边界再次分成两组进行处理,直至直方条不可再分为止。处理第二组子序列数据的示意图如图 12(e)和图 12(f)所示。

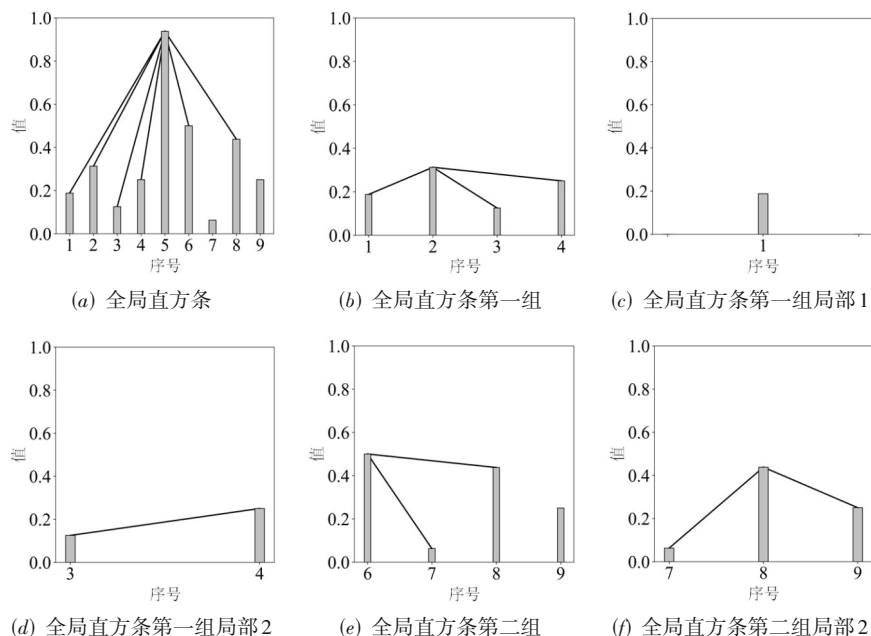


图 12 分治法过程图

Yela等<sup>[63]</sup>提出一种使用二叉搜索树结构的在线可视图方法(Online Visibility Graph, OVG),通过编码存储节点之间的可视性关系,再通过解码操作得到可视图,成功将时间复杂度降到 $O(n \log n)$ 。该方法能够融合新的数据,无需对已有数据进行重新计算,使大规模时间序列分析以及未来在线可视图的应用成为可能。此外,排序处理法(Sort & Conquer, SC)在不牺牲效率的同时,提供了一种非递归且内存耗费小的改进

方案,适用于数据规模大且计算资源稀缺的情况。对比实验表明 SC 算法比 DC 算法花费更少的执行时间<sup>[64]</sup>。关于建网效率的研究,Zhu等<sup>[46]</sup>提供一种快速加权水平可视性算法(Fast Weighted Horizontal Visibility Algorithm, FWHVA)。Stephen<sup>[65]</sup>则提出双树水平可视图(Dual Tree Horizontal Visibility Graph, DTHVG),通过与多种效率提升算法对比说明了该算法高效的构建合并能力,以及在线、可升级和非递归等优势。从分割



点角度出发,兰鑫<sup>[66]</sup>针对经典可视图提出凸包分割等多种优化算法,还针对水平可视图提出单调栈优化算法.

#### 4.7 其他可视图算法

除了上述所提及的一些常用可视图方法之外,仍存在其他新兴可视图方法应用于新的领域或正处于发展阶段.为了处理图像数据,图像可视图家族将图像映射成复杂网络用于图像处理分类场景中<sup>[67]</sup>.在此基础上,Zhu等<sup>[68]</sup>提出一种从多视点提取更丰富图像特征信息的方法.Pei等<sup>[69]</sup>则提供了一种基于图像可视图的纹理分类算法(Texture Classification based on Image Visibility Graph,TCIVG).

为了处理二进制序列数据,Ahadpour等<sup>[70]</sup>提出二进制可视图(Binary Visibility Graph,BVG),将二进制序列映射成复杂网络.对于二进制序列中任意两点 $A(t_a, y_a)$ 和 $B(t_b, y_b)$ 以及其间任意点 $C(t_c, y_c)$ ,若满足式(10)且 $y_c$ 均等于0,则说明A和B两点存在连边.此后,Ahadpour等<sup>[71]</sup>又提出马尔科夫二进制可视图(Markov-Binary Visibility Graph,MBVG),将数值型序列转换成二进制序列再使用BVG映射成网络.图13上方数字为原始时间序列,绘制出该序列的折线图,如图13(a)所示,再将斜率为正的折线转换成1,斜率为负的折线转换成0得到二进制序列.然后使用直方条表示并依照BVG准则确定连边,如图13(b)所示,最后将直方图转换成网络,如图13(c)所示.该方法在时间序列分析中具有可靠性,能够用于区分静态独立系统.

$$y_a + y_b > y_c \quad (10)$$

可视图模体是可视图网络以特定频率出现的连续节点所形成的子结构.HVG模体<sup>[72]</sup>从新的角度描述复杂信号和动力学,提供了一种数学上可靠且计算效率

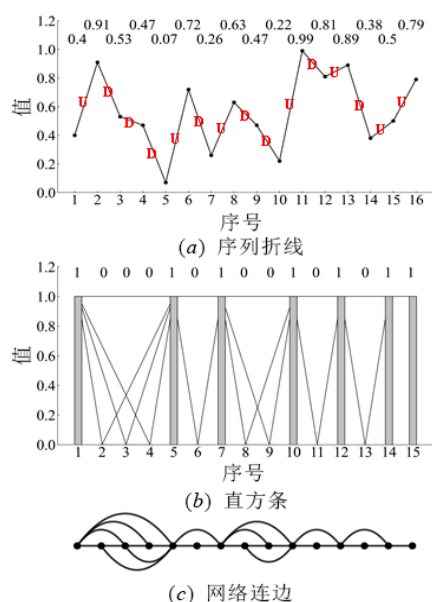


图13 马尔科夫二进制可视图

高的简单特征,可从任何类型时间序列中提取.文献[43]提出LPVG模体并引入模体熵估计网络结构复杂性的定量指标,实验表明该方法在区分不同类型时间序列方面具有较好的鲁棒性.

聚合算子可以将多维数据转化为一维数据,能够帮助作出可量化判断,在众多领域具有广泛应用.可视图平均(Visibility Graph Averaging,VGA)聚合算子通过将数据转换为可视图和根据度分布确定权重,有效地实现了数据聚合,同时保留了时间信息<sup>[73]</sup>.基于VGA聚合算子提出的可视图幂平均(Visibility Graph Power Averaging,VGPA)聚合算子,通过基于距离的支持函数测量支持度,充分考虑了值之间的相关度,具有较强的抗干扰能力以及有效性<sup>[74]</sup>.有研究通过将VGA聚合算子和诱导有序加权平均算子所产生的权值线性组合,构建出新的加权网络,实验表明该加权网络在性能方面优于传统可视图得到的非加权网络<sup>[75]</sup>.可视图幂几何(Visibility Graph Power Geometric,VGPG)聚合算子在我国水、能源和食品耦合效率评价中具有实际应用<sup>[76]</sup>.有序可视图平均(Ordered Visibility Graph Average,OVGA)聚合算子在VGA基础上考虑了顺序信息.生产水管理方面的应用验证了该方法的有效性<sup>[77]</sup>.另一项研究则更进一步地借助参数值本身来确定权重<sup>[78]</sup>.另外,有序可视图概率(Ordered Visibility Graph Probability,OVGP)和基于有序可视图的加权网络方法则是基于基本概率分配的方法模型<sup>[79,80]</sup>,基于置信熵和可视图方法(Belief Entropy Visibility Graph,BE-VG)在脑电信号融合方面也被证明是有效的<sup>[81]</sup>.

此外,还有许多其他可视图改进算法.模糊可视图(Fuzzy Visibility Graph,FVG)将手写数学表达式用图表示并提取结构信息,以实现自动识别与分类<sup>[82]</sup>.模糊认知可视图(Fuzzy Cognitive Visibility Graph,FCVG)则在时间序列预测领域具有广泛的应用前景<sup>[83]</sup>.分组水平可见性熵(Grouped Horizontal Visibility Entropy,GHVE)是一种基于组内观测值概率分布量化复杂性的方法,可用于分析具有复杂波动的生物动力学系统<sup>[84]</sup>.紧化水平可视图(Compactified Horizontal Visibility Graph,CHVG)则提供一种定义文本信息结构词的识别方法<sup>[85]</sup>.差异可视图(Difference Visibility Graph,DVG)将同一时间序列生成的VG边集与HVG边集的差集作为新网络DVG的边集,在睡眠阶段的分类方面取得不错的效果<sup>[86]</sup>.还有与随机游走过程<sup>[87]</sup>和自适应最优核时频表示<sup>[88]</sup>等技术结合的可视图方法.

#### 4.8 基于深度学习的可视图算法

随着硬件性能不断提升,深度学习模型逐步完善并且被应用到可视图算法当中.可视图作为一种高效的时间序列复杂网络转换方法,生成的网络刻画了原始时间序列的动力学性质,而基于多层神经元结构

的深度学习模型则更关注时域与频域特征. 将二者结合能够更全面地挖掘与表征时间序列的特性. 目前可视图应用到的深度学习模型主要包括卷积神经网络(Convolutional Neural Network, CNN)、图神经网络(Graph Neural Network, GNN)和循环神经网络(Recurrent Neural Network, RNN)等.

卷积神经网络(CNN)作为一种强大的深度学习模型,可以从图像数据中提取特征,在图像分类<sup>[89]</sup>、人脸识别<sup>[90]</sup>和目标检测<sup>[91]</sup>等方面具有广泛的应用. 受此启发,Cai等<sup>[92]</sup>提出一种基于多路可视图模体的CNN模型用于表征和区分睡眠阶段. 该团队还提出一种图-时间融合双输入卷积神经网络方法,通过将原始序列与LPVG网络度序列组合双输入卷积神经网络中,使模型学习到图拓扑性质与时间特征,并用于睡眠阶段检测<sup>[93]</sup>和气流两相流<sup>[94]</sup>的研究当中. 类似地,Zhang等<sup>[95]</sup>提出使用多路可视图与二维卷积神经网络结合来自动分类宽场钙成像数据的睡眠状态. 此后,Cai等<sup>[96]</sup>又提出将可视图与基于遗传算法的卷积神经网络结合的方法,旨在通过使用较少的EEG通道提高情绪识别准确率. 为了优化基于可视图的预测方法,Zhan等<sup>[97]</sup>提出深度可视性序列模块,通过增强可视图模块解决了可视图网络信息利用不完全的问题,与CNN结合对建筑成本指数具有良好的预测效果. 此外,可视图与卷积神经网络的结合还可以应用在缺失型癫痫检测<sup>[98]</sup>、纹理图像分类<sup>[99]</sup>和无袖带血压监测<sup>[100]</sup>等领域.

图神经网络(GNN)是一种处理图结构数据的神经网络模型,可以用于手势识别<sup>[101]</sup>、语义解析<sup>[102]</sup>和路由性能预测<sup>[103]</sup>等. 可视图作为一种将时间序列转换为图结构数据的工具,与图神经网络结合能够更好地用于序列数据分析. Li等<sup>[104]</sup>提出基于HVG与GNN的轴承故障诊断模型,将时间序列转换为HVG网络,然后使用GNN模型进行特征学习和故障分类. 此后,Li等<sup>[105]</sup>对算法选择做出调整,使用WHVG处理序列以提供更多信息和减弱远程节点影响,同时改进了图同构网络以更有效地挖掘潜在特征,实验结果表明该模型在性能方面有所提升. 基于可视图的图神经网络框架,能够适应各种研究场景. Xuan等<sup>[106]</sup>提出一种自适应可视图算法(Adaptive Visibility Graph, AVG),该算法能够自适应地将时间序列转换成网络,通过与GNN模型的DiffPool分类器结合进一步建立端到端框架AvgNet,可用于无线电信号调制及分类. Xiu等<sup>[107]</sup>提出一种时间标记可视图(Time Labeled Visibility Graph, TLVG)用于保护隐私和保留更多分类信息,并将其与GNN结合设计出一个用于生理数据多分类的隐私保护框架. Zeng等<sup>[108]</sup>提出时空多图门控网络用于网络规模交通量预测. 此外,二者结合还可用于癫痫发作自动检测<sup>[109]</sup>、大脑层次复

杂度计算<sup>[110]</sup>、小目标检测<sup>[111]</sup>、智能电网边缘异常检测<sup>[112]</sup>以及空调负载比例识别<sup>[113]</sup>等各研究领域中.

循环神经网络(RNN)是具有短期记忆能力的神经网络,通常用于处理文本、音频和时间序列数据. Bianchi等<sup>[114]</sup>采用基于可视图的框架来解释和描述回声状态网络的潜在特性,然后以一种无监督方式导出回声状态网络最大性能时的超参数配置,促进了两个研究领域的跨学科研究. 长短期记忆网络(Long Short-Term Memory, LSTM)是一种特殊的循环神经网络,能够学习到长期依赖关系. Roy等<sup>[115]</sup>提出一种基于差异可视图(DVG)的异步电机轴承故障检测框架,使用DVG将振动时间序列转换为拓扑网络,然后选择度分布作为区分故障网络的特征,将校正后的特征输入双向长短期记忆网络分类器中进行故障检测,具有很高的检测精度. Bristone等<sup>[116]</sup>提出可视图与LSTM的混合模型进行原油价格预测,将数据集映射到网络后,提取原油非线性特征并重建数据集,然后采用LSTM对重建数据集进行建模,实验表明该模型具有较高的精度和鲁棒性. 总之,可视图与深度学习的结合能有效提升模型性能,促进各学科领域发展的同时产生了很多有意义的工作<sup>[117-120]</sup>.

## 5 可视图应用性能的比较分析

### 5.1 可视图算法应用领域比较

时间序列在各研究领域应用非常广泛,如应用于科研成果关键词研究<sup>[121]</sup>、数据增长<sup>[122]</sup>、商品关联性分析<sup>[123]</sup>和异常检测<sup>[124]</sup>等众多领域. 可视图是时间序列转换复杂网络的重要方法. 本节通过可视图在各应用领域的对比,归纳梳理了其在不同应用场景的贡献,如表1所示. 研究发现目前可视图算法更多应用于生物医学和物理学领域,地球科学和工程应用领域次之,也被应用于经济金融等领域中.

在经济金融领域,文献[33]通过可视图将季度宏观经济序列转换成复杂网络,发现了所构建网络的“小世界”特征和拓扑特性;通过检测政府政策变化、关联网络社区结构与动态宏观经济之间的关系,发现政府政策对GDP变化和产业调整具有很大影响,这为理解经济发展提供新的途径. 文献[60]通过多尺度水平可视图分析方法,量化多个时间尺度非平稳时间序列之间的相互作用,应用于股票市场研究日收盘价与日交易量间的作用关系. 文献[125]从IOTA和IoTeX两个物联网平台获取价格波动时间序列并转换为复杂网络,通过意向风险管理了解了5G给两个平台带来的影响,对提高物联网平台的信息安全性提出合理化建议.

在生物医学领域,文献[36]将加权可视图应用于癫痫脑电图检测,通过将癫痫脑电图信号转换为复杂网络,提取模块化和平均加权度两个重要统计特性,最

表 1 各研究领域可视图的应用情况		
领域	应用场景	参考文献
经济金融	经济金融时间序列分析	文献[33,50]
	股票时间序列分析预测	文献[60,126~129]
	惩戒失信行为的关注程度分析	文献[130]
	5G 物联网有意风险策略	文献[125]
生物医学	癫痫、自闭症、神经肌肉等疾病检测以及疲劳行为检测	文献[36,44,45,52,53,131,132]
	心率信号分析和心梗患者识别	文献[133~136]
	情感识别	文献[96,137]
	睡眠脑电图分析和睡眠阶段检测分类	文献[93,95,138]
	早产预测和早产儿迟发败血症与睡眠心肺作用的检测分析	文献[139~141]
	神经活动和脑干反应分析	文献[142~144]
	基因特征提取	文献[145]
	时间群落检测	文献[146]
	叶表皮细胞表征	文献[147]
	蛋白质结构分类	文献[148]
	智能医疗	文献[149]
物理学	光谱分析	文献[150,151]
	滚动轴承故障检测	文献[34,115]
	大型强子对撞机中寻找超对称性	文献[57]
	带电粒子分布分析	文献[152]
	颗粒物时间序列分析	文献[153]
	航天航空结构损坏识别	文献[154]
	雷达目标探测、信号检测、天线类型识别和脉冲声源探测	文献[111,155~159]
	光曲线随机度分配、脉动变星光曲线研究和无线电信号调制分类	文献[106,160,161]
	湍流间歇性与频率调制分析	文献[162~166]
地球科学	地球物理学时间序列分析	文献[31]
	水文地质时间序列分析	文献[167]
	风速记录分析	文献[168]
	地震序列分析	文献[169~174]
	海洋潮汐记录分析	文献[175]
	西安气候变化特征分析	文献[35]
	古气候用记录分析	文献[176]
	新冠期间中国 CO <sub>2</sub> 排放差异	文献[177]
	碳价格时间序列分析	文献[178]
	空气平均温度异常分析	文献[179]
计算机及工程应用	时间序列不可逆性测量与时滞性检测	文献[20,180,181]
	赫斯特指数估计	文献[182]
	时间序列自组织临界性证明	文献[183]
	动态社区发现	文献[184]
	多变量时间序列表征	文献[185]
	时间序列到网络逆向操作	文献[186]
	时间序列预测	文献[187~190]
	纹理分类与建模	文献[69,191]
	图像特征提取与图像分类	文献[68,190]
	卷积神经特征解释	文献[99]
	磁盘存储块 I/O 调度合并和优先级优化	文献[192]



后采用SVM和KNN分类器对提取出的信号特征进行分类,取得了较好的分类结果.文献[45]将提出的改进加权可视图算法应用于辅助肌电图信号分析和增强神经肌肉疾病检测.文献[133]提出一种基于可视图的复杂网络信息提取方法,使用复杂度测量方法进行可视图量化分析,在冥想过程中心率信号的检测分析发挥了重要作用.文献[142]基于网络对非线性时间序列进行分析,提供了网络科学在神经数据中的另一种应用,展示了一种将网络科学、非线性动力学和信息论技术结合以提取信息的方法.文献[146]介绍一种获取时间序列特征的可视图方法和检测可视图中节点群落的方法,并将该方法应用于生物数据集从而证明了该方法在检测生物时间状态边界等方面具有巨大潜力.文献[148]将HVG与广义多维递归量化分析相结合,提供了一种计算效率高且能够准确预测蛋白质结构的方法.

在物理学领域,文献[34]提出一种基于水平可视图的滚动轴承故障诊断方法,用于区分正常滚动轴承与故障滚动轴承振动信号.该方法将轴承振动信号转换为HVG网络,然后提取网络的顶点域索引作为单故障特征,最后利用马氏距离识别滚动轴承的工作与故障状态.文献[57]在一维数据序列的长程相关性、分形性和固有自由标度的影响下,提出了三维可视图用于研究大型强子对撞机的超对称性,该方法可提取三维空间最深处的固有自由度,具有识别潜在超对称性的潜力.文献[151]将可视图方法用于音频分析,在捕捉信号谐波内容的同时还对宽带噪声具有弹性,通过实验证明了该方法在测量真实与合成音频数据中谐波信号间的稳健相似性具有很大效用.文献[154]基于可视图提出可见粒子序列搜索优化算法,将结构损伤识别作为一个优化问题,通过利用从可见粒子中获取到的信息在搜索空间上寻找得到最优解.

在计算机及工程应用领域,文献[20]将DHVG与Kullback-Leibler散度结合用于量化时间序列不可逆性,从而正确区分可逆与不可逆的静态时间序列.文献[187]构造了一种新的储层拓扑结构,基于VG和回声状态网络对非线性时间序列预测,与传统随机网络算法相比,该方法具有更好的预测精度.文献[185]基于多重可视图提出一种快速转换方法,该方法能够将高维时间序列转换为具有不同特征的多重图,提供了以复杂网络表征多维时间序列的思路.文献[184]提出基于可视图的动态社区发现方法,通过重新定义可见性关系使其适用于多维数据,采用四种网络特征测试算法的社区检测能力.实验表明该方法保持了原始网络结构,能够反映具有时间依赖性的网络演化过程.文献[186]提出一种从时间序列到网络的反向操作,将网络统计分析与时序分析联系起来,使利用网络统计

来表征时间序列和利用时间序列统计来表征网络均成为可能.文献[69]构造出TCIVG方法用于对图像进行纹理分类,实验发现该方法优于传统图像识别方法.文献[191]提出一种基于复杂网络建模的方法,将分形插值应用于递推矩阵的度分布,借此丰富复杂网络的表示,以利用深层纹理特征的有效性.与经典先进的相关方法比较,其在纹理分类方面具有一定竞争力.文献[192]基于水平可视图在I/O栈分层提出一种分而治之的调度方案,该方法能够以较少I/O响应时间满足大量并发I/O请求,通过降低平均I/O延迟以保证每个请求响应的公平性.

在地球科学领域,文献[177]基于可视图对30个省份的碳排放数据进行分析,发现封锁会导致碳排放的短期减少,这项研究与经济发展水平和产业结构密切相关,为疫情封控节能减排提供参考.文献[176]将可视图等方法应用于过去500万年非洲气候变化的海洋古气候代理记录,通过对不同代理记录进行非线性时间序列分析,来推测全球气候驱动的影响因素,如轨道变化和大规模大气模式变化等.

综上所述,通过对文献的梳理可知,可视图在不同领域具有广泛的应用价值.从经济金融到生物医学、地球科学,再到物理学和计算机工程等领域,可视图均能够满足不同场景的应用需求,用于分析和预测相关序列数据.在这些应用场景中涉及的许多具体问题,如生物医学中的神经肌肉疾病、物理学中的强子对撞机、地球科学中的气候变化,以及计算机工程中的数据处理等,均得到了良好的解决方案.可视图方法使用简单但效果卓越,为各个领域提供了一种新的时间序列数据分析工具.

## 5.2 可视图算法识别抗噪性能比较

为了考察可视图方法对分形、周期、混沌和随机序列的识别和抗噪能力,选取部分代表方法对加了不同程度噪声的序列进行建网并计算度分布,如图14~17所示.其中,横坐标节点度 $k$ 表示与某节点直接相连的连边数量,纵坐标网络度分布 $P(k)$ 表示网络中度值为 $k$ 的节点占总节点的数量.

以Conway序列为代表考察各方法对分形序列的识别抗噪能力.首先对长度3 000的Conway分形序列加上不同强度的高斯白噪声(White Gaussian Noise, WGN),然后使用不同可视图方法处理得到度分布图.如图14所示,六个子图分别表示六种方法,其中各个子图中不同类型的线条用于区分对序列加以不同程度的噪声.在识别能力方面,通过对比各方法未加噪声序列的度分布,发现VG,LPVG和DVG的度分布满足幂律分布形式,说明这几种方法能够将分形序列转为无标度网络具备识别Conway分形序列的能力,而MBVG,HVG和

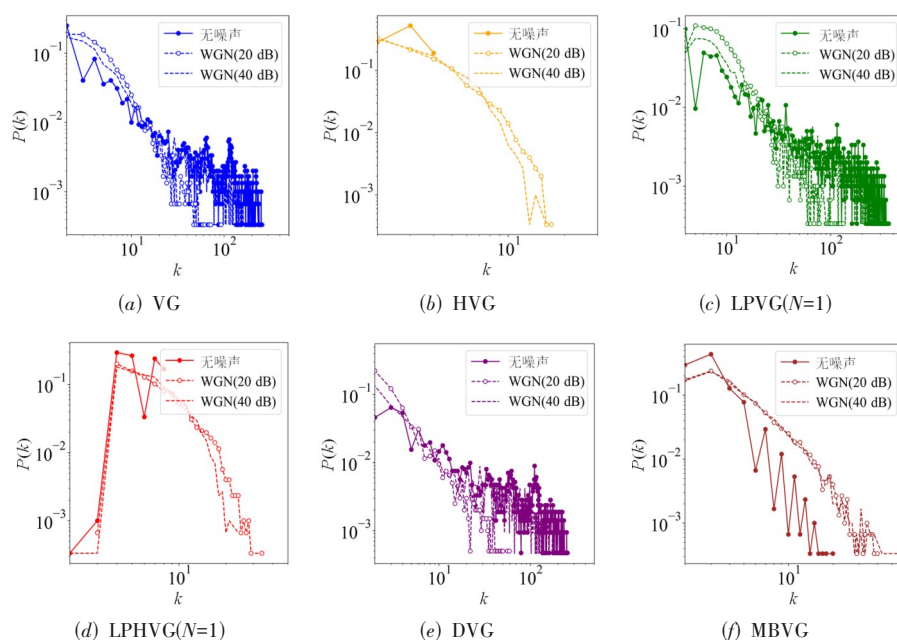


图14 Conway加噪序列度分布对比图

LPHVG 则无法有效识别 Conway 序列. 在抗噪能力方面, 通过对比同种方法未加噪序列和加噪序列的度分布, 发现各方法关于无噪声度分布曲线与加噪后的度分布曲线均存在明显变化, 说明各方法在处理加噪 Conway 分形序列时均表现较差.

以长度为 3 000 的正弦序列为代表并加以不同分贝的高斯白噪声, 考察各方法对周期序列的识别和抗噪能

力. 如图 15 所示, 各方法的无噪声序列的度分布曲线均表现出尖峰, 但 HVG, LPHVG 和 MBVG 度分布曲线的尖峰偏离正确位置无法有效识别序列特征, 表明仅 VG, LPVG 和 DVG 可识别出正弦序列. 在对原始序列加以噪声强度为 40 dB 的高斯白噪声情况下, LPVG 度分布曲线变化较小表现出较好的抗噪效果. 然而, 在较高信噪比的噪声 (20 dB) 影响下, 各方法的抗噪效果均不理想.

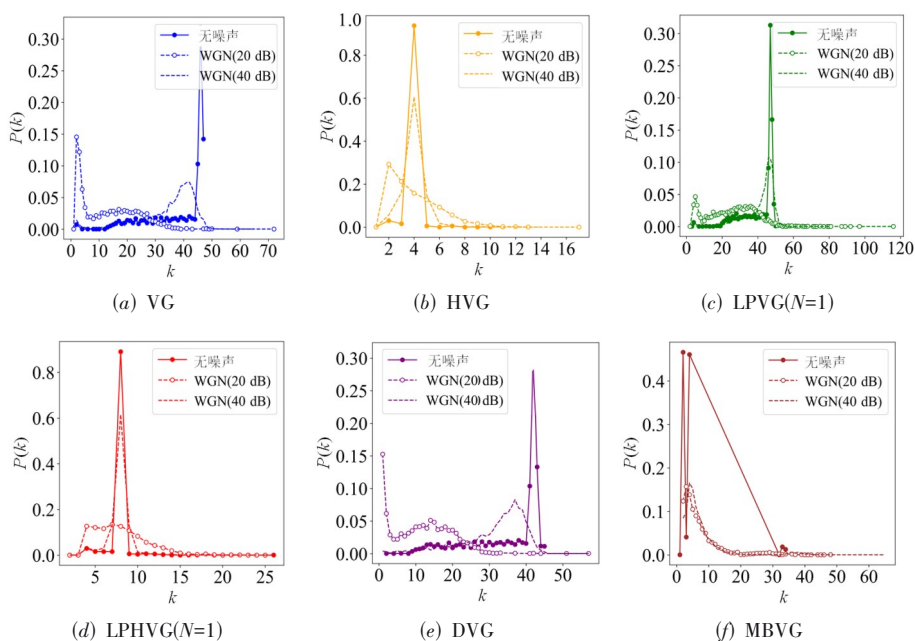


图15 正弦加噪序列度分布对比图

以长度为 3 000 的 Lorenz 序列为代表考察各方法对混沌序列的识别和抗噪能力,如图 16 所示. 在识别能力方面,仅 VG,LPVG 和 DVG 的无噪声序列的度分布曲线显示出多个尖峰,体现了 Lorenz 序列中存在不稳定多周期的特点. 在抗噪方面,发现各方法的加噪度分

布曲线与未加噪度分布曲线存在较大偏差,因此抗噪效果均不理想. 图 17 为各可视图方法的随机序列度分布图,各可视图方法的度分布曲线的尾部基本符合指数分布. 同时,各方法受噪声影响较小. HVG,DVG 和 LPHVG 展示出良好的抗噪性,VG 和 LPVG 次之.

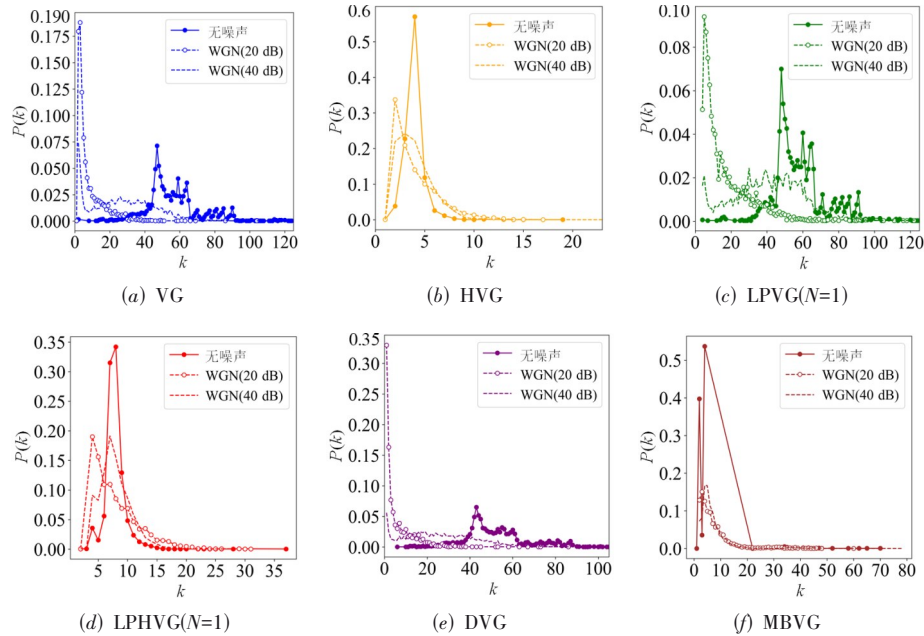


图 16 Lorenz 加噪序列度分布对比图

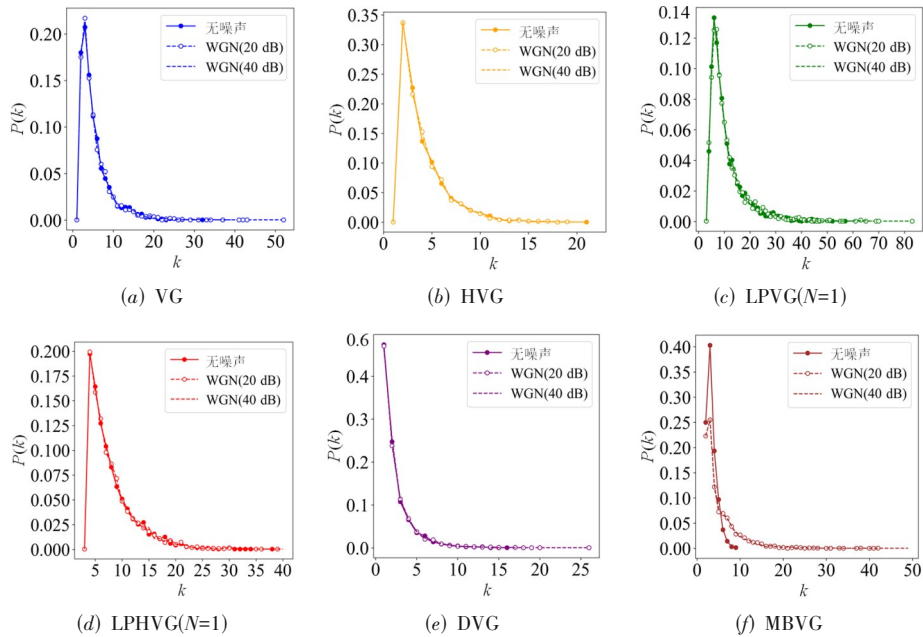


图 17 随机加噪序列度分布对比图

综上所述,在序列不带有噪声的情况下,VG,LPVG 和 DVG 方法能够较好地识别出上述不同类型序列的特征. 可视图网络度分布以尖峰形式体现出序列的周期

特性和节点连接特性一致的特点,以幂律分布形式体现出分形序列生成网络的“小世界”性与无标度性,体现出少数节点连接较多节点而多数节点则具有较小连



接性,以多峰体现混沌序列存在不稳定多周期的特点.因此,对于不同类型的时间序列,各种可视图方法的抗噪能力各有优劣,需根据具体情况而定.

5.3 可视图算法建网效率性能比较

为了探究不同算法的建网效率,使用长度为3 000的分形、周期、混沌和随机序列计算各算法的建网耗时.如表2所示,对于多数序列而言HVG的建网耗时小于VG的建网耗时,LPHVG的耗时小于LPVG的耗时,这一定程度上说明HVG类算法建网效率相比VG类算法更具优势,这可能与可视性准则的复杂性有关.LPVG,LPHVG的建网耗时远大于VG和HVG的建网耗时,说明有限穿越类可视图在建网方面的花销远高于一般可视图.由此,建议在其他条件相近或计算资源缺乏的情况下,若要选择使用一种算法解决时间序列分析问题,应优先考虑HVG类算法和一般类型算法.

此外,有限穿越视距 $N$ 对算法建网效率也具有一定影响.为探究LPVG和LPHVG算法在不同 $N$ 值下处理各序列的情况,使用四种类型序列测算LPVG,LPHVG的建网耗时,结果如图18所示,其中,横坐标为

$N$ 值,纵坐标为建网耗时,进一步地计算出两算法在不同序列下的均值和标准差,如表3所示.

表2 VG,HVG,LPVG( $N=1$ )和LPHVG( $N=1$ )方法在不同序列上的耗时情况 单位:ms

	VG	HVG	LPVG( $N=1$ )	LPHVG( $N=1$ )
Conway 序列	215.568	91.372	4 966.912	3 444.188
Sin 序列	195.013	98.390	3 613.994	3 280.854
Lorenz 序列	256.440	100.574	4 558.572	3 377.969
Random 序列	92.775	135.016	3 737.084	3 353.597
Mean	189.949	106.338	4 219.141	3 364.152

表3 LPVG和LPHVG方法在各序列上耗时的均值和标准差 单位:ms

	LPVG		LPHVG	
	平均值	标准差	平均值	标准差
Conway 序列	8 426.528	1 859.126	3 649.615	100.307
Sin 序列	3 822.176	136.476	3 473.115	147.390
Lorenz 序列	5 238.062	852.304	3 633.810	177.514
Random 序列	3 784.807	223.895	3 659.239	169.882

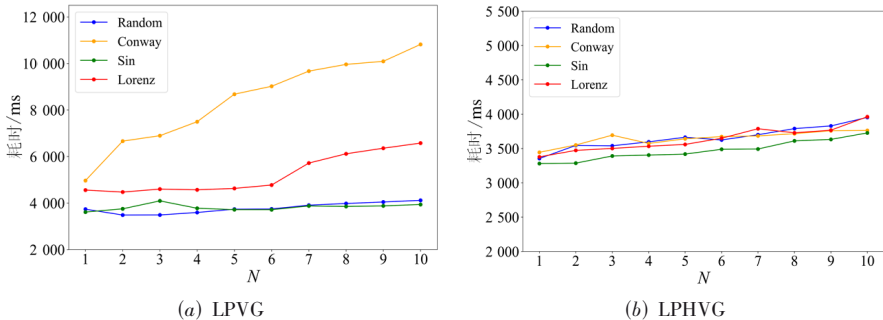


图18 不同 $N$ 值下LPVG、LPHVG方法在不同序列的耗时情况

对于LPVG算法而言,处理Conway序列的平均耗时大于Lorenz序列并且大于另外两个序列.同时LPVG算法处理各序列标准差大小关系规律与此相同,其中Conway序列的标准差最大,说明随着 $N$ 值的增大,处理Conway序列所花费的代价将远高于其他序列.对于LPHVG算法而言,处理各序列的平均耗时相近,说明LPHVG算法处理各类型序列所花费的代价差异不大.而且各序列标准差的值较小,说明LPHVG算法建网效率受 $N$ 值变化影响较小,即随着 $N$ 值增长,耗时增长缓慢.因此,就建网效率而言,LPVG算法更适合处理如Sin和Random等结构简单的序列,建网花费的时间较少;若要用于处理Conway和Lorenz等复杂序列,则需尽可能选择较小的 $N$ 值以避免不必要的花销.由于LPHVG算法的建网效率受 $N$ 值影响较小,因此可以适当选择较大的 $N$ 值以反映更多时间序列特征和增强抗噪能力.

6 未来研究方向

近年来可视图研究已经取得一定进展且应用于各个研究领域,但仍存在许多问题还需继续挖掘探究.

(1)完善理论体系.可视图能够揭示所研究系统的性质即发现给定时间序列的隐藏结构,然而这种能力与该方法理论支撑强度紧密相关.因此,在将可视图运用在研究自然界中的复杂系统以及提取新的特征之前,可视图需要一个完整严格的数学理论,以解释可视图算法的映射原理以及其中所蕴含的时间序列和动力系统性质<sup>[37]</sup>.具体地说,该理论需要解决算法映射得到何种信息及这种信息映射如何做到等问题.当上述问题得以解决,许多复杂动力学过程背后的网络特征才得以知晓.同时,也只有当该问题得到回答时,可视图才真正意义上算是一种工具,可以被明确、正当地使用.

(2)促进多学科领域应用.可视图的潜力在于可以

研究各学科中长期存在的问题,如经济金融的股票时间序列分析、生物医学的心率信号分析和神经肌肉疾病检测、物理学的滚动轴承故障检测和雷达目标探测、地球科学的地震序列分析和风速记录分析、工程应用的赫斯特指数估计与图像特征提取等. 可视图在这些方向上尚处于探索阶段,背后的理论也仍在发展中. 未来,可视图理论将逐渐成熟,能够更好地被应用于时间序列分析和数据挖掘研究工作,同时在生物医学、金融分析等多个领域将发挥更为重要的作用.

(3)处理高维数据和大规模数据. 可视图将时间序列中每个数据点作为节点来构建网络,在实际应用中当面临数据量大和时间序列维度高等情况时会消耗巨大的计算资源,如何处理高维数据和大规模数据成为亟待解决的问题. 一方面,目前可视图的建网思路主要集中于将一维时间序列数据映射到二维空间中,或将多维时间序列数据拆分成一维数据处理,从多维空间构建可视图的相关研究较少. 另一方面,可视图算法效率提升对可视图应用范围的拓展具有重要促进作用,但针对可视图算法效率的改进研究尚少. DC算法引入分治思想降低了可视图算法的时间复杂度,OVG算法使用二叉搜索树结构实现实时建网并提高了计算效率. 因此,从二维向更高维度拓展可视图建网方法以及从其他数据结构出发提高可视图算法处理效率将成为未来重要的研究方向.

(4)与人工智能技术结合. 可视图算法可与人工智能模型更紧密集成以提升算法性能. 目前已经有可视图算法与深度学习模型结合的例子,通过将AVG算法与GNN模型DiffPool结合建立端到端分类框架AvgNet以提升分类性能,经验证AvgNet优于许多先进的深度学习方法<sup>[106]</sup>. 数据驱动的机器学习模型可以挖掘数据背后隐藏的普遍规律和特征,可视图算法提供了网络视角研究数据间的可见性. 两者的混合模型不仅提高了时间序列预测和图像分类的精度,同时降低了时间序列和图像数据集的维数,能够揭示出更多特征<sup>[190]</sup>. 未来可视图方法将更深入地与机器学习和神经网络等人工智能技术结合,更好地被应用于时间序列分析和数据挖掘研究工作.

(5)构建演化网络. 近年来,基于可视图方法的时间序列复杂网络分析取得了丰硕成果. 然而,大多数可视图算法生成的网络是静态的,难以解释现实世界中时间序列经常表现出的动态模式. 为了应对这一问题,通过演化网络自然扩展成为可行的解决方案,即考虑构建随时间变化而演化的复杂网络. 目前已有相关文献对此进行了研究. 将预定义长度的序列片段转换为可视图,作为时间间隔对应状态的描述,并将连续发生的状态连接起来形成状态转移的演化网络,能够用于

检测系统的演化行为<sup>[193]</sup>. 构建演化网络,有助于捕捉网络随时间变化的趋势,更好地被应用于现实世界的时间序列复杂网络分析中.

(6)表征时间序列. 在不同应用场景中,通常会面对不同类型的时间序列,如表1所示,类型不同导致序列背后所隐含的特征存在一定差异. 然而大多数研究仍使用相同的可视图算法解决不同学科的问题,并未根据具体的应用背景加以改进,说明基于时间序列特征构建复杂网络的算法仍需进一步探索,以更准确地发现时间序列特征<sup>[190]</sup>. 该问题的一种解决方案是要求研究人员具有领域知识,手动改进可视图算法以提取合适的特性. 然而最合适的特征通常难以选取,另一种方案则是将可视图改进成自动提取特征以适应不同场景<sup>[93]</sup>. 因此,基于具体场景改进或自动提取特征也将成为可视图未来的重点研究方向.

另外,序列存在着一些共性问题有待解决. 在现实世界中,序列通常包含涉及功能和行为等具有较大波动性的信息,如何从时间序列中提取有用的信息特征成为一个重要研究问题. 一方面,通过定义可视图节点权重等方式,能够在网络中体现更多的序列信息有利于特征提取. 在考虑了网络中各节点的相对重要性后,也将更易于区分动态和复杂的网络信号,在预测方面将产生正向效果. 另一方面,从现有算法生成的网络中提取新的特征也是可能的解决方法之一. 因此,通过定义可视图节点权重或从网络中提取新特征将成为未来研究的另一方向.

## 7 结束语

可视图算法是时间序列转换复杂网络研究的重要代表之一,其在数理基础以及相关应用等方面仍处于发展阶段. 本文介绍了基于可视图方法的时间序列复杂网络分析相关研究,阐述了经典可视图和水平可视图的基本原理和性质,从方向、权重、维度和效率提升等方面介绍可视图衍生算法. 同时,本文梳理了可视图在不同研究领域的应用,并通过度分布图考察了可视图算法对不同类型时间序列的识别和抗噪能力,考察了可视图算法的建网效率. 通过综述发现,可视图正向着构建有向、加权的多维网络方向发展,同时力求在建网效率方面取得突破. 经比较分析,LPVG等算法具有更优秀的时间序列表征能力和抗噪能力,但在建网效率方面开销较大. 这在一定程度上说明了可视图需在能力和效率两方面进行优化并取得平衡,为时间序列复杂网络分析及相关领域的研究奠定了基础. 此外,为了更好开展时间序列数据的可视图研究,本文在Github中提供了目前几种主流可视图算法的Python实现代码<sup>[194]</sup>,以便学者们使用可视图进行相关领域的智能时

间序列挖掘与分析.

# 参考文献

- [1] 李海林, 邬先利. 基于时间序列聚类的主题发现与演化分析研究[J]. 情报学报, 2019, 38(10): 1041-1050.  
LI H L, WU X L. Research on topic discovery and evolution based on time series clustering[J]. Journal of the China Society for Scientific and Technical Information, 2019, 38(10): 1041-1050. (in Chinese)
- [2] 李大社, 孙元威, 阮俊虎. 基于GOSSA和HMM的时间序列预测算法[J]. 电子学报, DOI: 10.12263/DZXB.20220856.  
LI D S, SUN Y W, RUAN J H. Time series prediction algorithm based on GOSSA and HMM[J]. Acta Electronica Sinica, DOI: 10.12263/DZXB.20220856. (in Chinese)
- [3] 罗远兴, 李志红, 梁兴, 等. 基于EMD-LS的非平稳时间序列多重分形去趋势波动分析方法[J]. 电子学报, 2021, 49(12): 2323-2329.  
LUO Y X, LI Z H, LIANG X, et al. Multi-fractal detrended fluctuation analysis method for non-stationary time series based on EMD-LS[J]. Acta Electronica Sinica, 2021, 49(12): 2323-2329. (in Chinese)
- [4] LI H L. Time works well: Dynamic time warping based on time weighting for time series data mining[J]. Information Sciences, 2021, 547: 592-608.
- [5] WATTS D J, STROGATZ S H. Collective dynamics of 'small-world' networks[J]. Nature, 1998, 393: 440-442.
- [6] BARABASI A L, ALBERT R. Emergence of scaling in random networks[J]. Science, 1999, 286: 509-512.
- [7] ZHANG J, SMALL M. Complex network from pseudoperiodic time series: Topology versus dynamics[J]. Physical Review Letters, 2006, 96(23): 238701.
- [8] LACASA L, LUQUE B, BALLESTEROS F, et al. From time series to complex networks: The visibility graph[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2008, 105(13): 4972-4975.
- [9] LUQUE B, LACASA L, BALLESTEROS F, et al. Horizontal visibility graphs: Exact results for random time series[J]. Physical Review E, 2009, 80(4): 046103.
- [10] BEZSUDNOV I V, SNARSKII A A. From the time series to the complex networks: The parametric natural visibility graph[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2014, 414: 53-60.
- [11] 周婷婷, 金宁德, 高忠科, 等. 基于有限穿越可视图的时间序列网络模型[J]. 物理学报, 2012, 61(3): 86-96.  
ZHOU T T, JIN N D, GAO Z K, et al. Limited penetrable visibility graph for establishing complex network from time series[J]. Acta Physica Sinica, 2012, 61(3): 86-96. (in Chinese)
- [12] GAO Z K, JIN N D, WANG W X, et al. Motif distributions in phase-space networks for characterizing experimental two-phase flow patterns with chaotic features[J]. Physical Review E, 2010, 82: 016210.
- [13] XU X K, ZHANG J, SMALL M. Superfamily phenomena and motifs of networks induced from time series[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2008, 105(50): 19601-19605.
- [14] MARWAN N, CARMEN ROMANO M, THIEL M, et al. Recurrence plots for the analysis of complex systems[J]. Physics Reports, 2007, 438(5/6): 237-329.
- [15] MARWAN N, DONGES J F, ZOU Y, et al. Complex network approach for recurrence analysis of time series[J]. Physics Letters A, 2009, 373(46): 4246-4254.
- [16] 曾明, 王二红, 赵明愿, 等. 基于时间序列符号化模式表征的有向加权复杂网络[J]. 物理学报, 2017, 66(21): 210502.  
ZENG M, WANG E H, ZHAO M Y, et al. Directed weighted complex networks based on time series symbolic pattern representation[J]. Acta Physica Sinica, 2017, 66(21): 210502. (in Chinese)
- [17] ZOU Y, DONNER R V, MARWAN N, et al. Complex network approaches to nonlinear time series analysis[J]. Physics Reports, 2019, 787: 1-97.
- [18] LACASA L, LUQUE B, LUQUE J, et al. The visibility graph: A new method for estimating the Hurst exponent of fractional Brownian motion[J]. EPL (Europhysics Letters), 2009, 86(3): 30001.
- [19] LACASA L, TORAL R. Description of stochastic and chaotic series using visibility graphs[J]. Physical Review E, 2010, 82(3): 036120.
- [20] LACASA L, NUÑEZ A, ROLDÁN É, et al. Time series irreversibility: A visibility graph approach[J]. The European Physical Journal B, 2012, 85(6): 217.
- [21] NUÑEZ A, LACASA L, VALERO E, et al. Detecting series periodicity with horizontal visibility graphs[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2012, 22(7): 1250160.
- [22] NÚÑEZ Á M, LUQUE B, LACASA L, et al. Horizontal visibility graphs generated by type-I intermittency[J]. Physical Review E, 2013, 87(5): 052801.
- [23] NÚÑEZ Á M, LACASA L, GÓMEZ J P. Horizontal visibility graphs generated by type-II intermittency[J]. Jour-



- nal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2014, 47(3): 035102.
- [24] LUQUE B, BALLESTEROS F J, NÚÑEZ A M, et al. Quasiperiodic graphs: Structural design, scaling and entropic properties[J]. Journal of Nonlinear Science, 2013, 23(2): 335-342.
- [25] LUQUE B, LACASA L, BALLESTEROS F J, et al. Feigenbaum graphs: A complex network perspective of chaos[J]. PLoS One, 2011, 6(9): e22411.
- [26] LUQUE B, LACASA L, BALLESTEROS F J, et al. Analytical properties of horizontal visibility graphs in the Feigenbaum scenario[J]. Chaos, 2012, 22(1): 013109.
- [27] LUQUE B, LACASA L, ROBLEDO A. Feigenbaum graphs at the onset of chaos[J]. Physics Letters A, 2012, 376(47/48): 3625-3629.
- [28] FLANAGAN R, LACASA L, NICOSIA V. On the spectral properties of Feigenbaum graphs[J]. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2020, 53(2): 025702.
- [29] FLANAGAN R, LACASA L. Irreversibility of financial time series: A graph-theoretical approach[J]. Physics Letters A, 2016, 380(20): 1689-1697.
- [30] SHAO Z G. Network analysis of human heartbeat dynamics[J]. Applied Physics Letters, 2010, 96(7): 073703.
- [31] DONNER R V, DONGES J F. Visibility graph analysis of geophysical time series: Potentials and possible pitfalls[J]. Acta Geophysica, 2012, 60(3): 589-623.
- [32] LACASA L, JUST W. Visibility graphs and symbolic dynamics[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2018, 374/375: 35-44.
- [33] WANG N, LI D, WANG Q W. Visibility graph analysis on quarterly macroeconomic series of China based on complex network theory[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2012, 391(24): 6543-6555.
- [34] GAO Y Y, YU D J. Total variation on horizontal visibility graph and its application to rolling bearing fault diagnosis[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 147: 103768.
- [35] ZHANG P T, NING P Y, CAO R H, et al. Analysis of climate change characteristics in Xi'an based on the visibility graph[J]. Frontiers in Physics, 2021, 9: 702064.
- [36] SUPRIYA S, SIULY S, WANG H, et al. Weighted visibility graph with complex network features in the detection of epilepsy[J]. IEEE Access, 2016, 4: 6554-6566.
- [37] ANGEL M, LACASA L, PATRICIO J, et al. Visibility algorithms: A short review[M]//New Frontiers in Graph Theory. Rijeka: InTech, 2012: 119-152.
- [38] 汤胤, 易娜, 毛景慧. 基于有向有限穿越可视图的时间序列伴生网络[J]. 系统工程学报, 2017, 32(2): 156-162, 264.
- TANG Y, YI N, MAO J H. Derived network based on directed limited penetrable visibility graph for time series[J]. Journal of Systems Engineering, 2017, 32(2): 156-162, 264. (in Chinese)
- [39] XUAN Q, ZHOU J C, QIU K F, et al. CLPVG: Circular limited penetrable visibility graph as a new network model for time series[J]. Chaos, 2022, 32(1): 013130.
- [40] WANG M G, VILELA A L M, DU R J, et al. Topological properties of the limited penetrable horizontal visibility graph family[J]. Physical Review. E, 2018, 97(5): 052117.
- [41] GAO Z K, CAI Q, YANG Y X, et al. Time-dependent limited penetrable visibility graph analysis of nonstationary time series[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2017, 476: 43-48.
- [42] LI X M, SUN M, GAO C X, et al. The parametric modified limited penetrable visibility graph for constructing complex networks from time series[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2018, 492: 1097-1106.
- [43] REN W K, JIN N D. Sequential limited penetrable visibility-graph motifs[J]. Nonlinear Dynamics, 2020, 99(3): 2399-2408.
- [44] AHMADLOU M, ADELI H, ADELI A. Improved visibility graph fractality with application for the diagnosis of autism spectrum disorder[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2012, 391(20): 4720-4726.
- [45] BOSE R, SAMANTA K, MODAK S, et al. Augmenting neuromuscular disease detection using optimally parameterized weighted visibility graph[J]. IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics, 2021, 25(3): 685-692.
- [46] ZHU G H, LI Y, WEN P. Epileptic seizure detection in EEGs signals using a fast weighted horizontal visibility algorithm[J]. Computer Methods and Programs in Biomedicine, 2014, 115(2): 64-75.
- [47] ZENG M, XU W K, ZHAO C Y, et al. Weighted complex network based on visibility angle measurement[C]//2020 39th Chinese Control Conference (CCC). Piscataway: IEEE, 2020: 1138-1143.
- [48] LI H L, LIU Z C. Multivariate time series clustering based on complex network[J]. Pattern Recognition, 2021, 115: 107919.

- [49] LI H L, DU T. Multivariate time-series clustering based on component relationship networks[J]. *Expert Systems With Applications*, 2021, 173: 114649.
- [50] LACASA L, NICOSIA V, LATORA V. Network structure of multivariate time series[J]. *Scientific Reports*, 2015, 5: 15508.
- [51] GAO Z K, LIU M X, DANG W D, et al. Multilayer limited penetrable visibility graph for characterizing the gas-liquid flow behavior[J]. *Chemical Engineering Journal*, 2021, 407: 127229.
- [52] CAI Q, GAO Z K, YANG Y X, et al. Multiplex limited penetrable horizontal visibility graph from EEG signals for driver fatigue detection[J]. *International Journal of Neural Systems*, 2019, 29(5): 1850057.
- [53] GAO Z K, GUO W, CAI Q, et al. Characterization of SSMVEP-based EEG signals using multiplex limited penetrable horizontal visibility graph[J]. *Chaos*, 2019, 29(7): 073119.
- [54] 郭威. 基于有限穿越可视图和深度学习的SSMVEP脑电信号分类及疲劳机制研究[D]. 天津: 天津大学, 2019.  
GUO W. Limited Penetrable Visibility Graph and Deep Learning for SSMVEP EEG Signals Classification and Fatigue Mechanism Characterization[D]. Tianjin: Tianjin University, 2019. (in Chinese)
- [55] REN W K, JIN N D. Vector visibility graph from multivariate time series: A new method for characterizing nonlinear dynamic behavior in two-phase flow[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 97(4): 2547-2556.
- [56] LIU J, LI Q Q. Planar visibility graph network algorithm for two dimensional timeseries[C]//2017 29th Chinese Control and Decision Conference (CCDC). Piscataway: IEEE, 2017: 1352-1357.
- [57] BHADURI S, BHADURI A. Searching for supersymmetry at LHC using the complex-network-based method of the three-dimensional visibility-graph[J]. *Physics*, 2020, 2(3): 436-454.
- [58] GAO Z K, CAI Q, YANG Y X, et al. Multiscale limited penetrable horizontal visibility graph for analyzing nonlinear time series[J]. *Scientific Reports*, 2016, 6: 35622.
- [59] HAN J. Analysis of gas-water flow transition characteristics based on multiscale limited penetrable visibility graph[J]. *Scientific Reports*, 2020, 10: 7030.
- [60] LI W D, ZHAO X J. Multiscale horizontal-visibility-graph correlation analysis of stock time series[J]. *EPL (Europhysics Letters)*, 2018, 122(4): 40007.
- [61] LI W, WANG H, ZHUANG L H, et al. Weighted multiscale limited penetrable visibility graph for exploring atrial fibrillation rhythm[J]. *Signal Processing*, 2021, 189: 108288.
- [62] LAN X, MO H M, CHEN S Y, et al. Fast transformation from time series to visibility graphs[J]. *Chaos*, 2015, 25(8): 083105.
- [63] FANO YELA D, THALMANN F, NICOSIA V, et al. On-line visibility graphs: Encoding visibility in a binary search tree[J]. *Physical Review Research*, 2020, 2(2): 023069.
- [64] GHOSH S, DUTTA A. An efficient non-recursive algorithm for transforming time series to visibility graph[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2019, 514: 189-202.
- [65] STEPHEN C. A scalable linear-time algorithm for horizontal visibility graph construction over long sequences [C]//2021 IEEE International Conference on Big Data (Big Data). Piscataway: IEEE, 2022: 40-50.
- [66] 兰鑫. 时间序列的复杂网络转换策略研究[D]. 重庆: 西南大学, 2015.  
LAN X. The Study of Transformation from Time Series to Complex Networks[D]. Chongqing: Southwest University, 2015.
- [67] IACOVACCI J, LACASA L. Visibility graphs for image processing[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2020, 42(4): 974-987.
- [68] ZHU D X, SEMBA S, YANG H J. Matching intensity for image visibility graphs: A new method to extract image features[J]. *IEEE Access*, 2021, 9: 12611-12621.
- [69] PEI L, LI Z, LIU J. Texture classification based on image (natural and horizontal) visibility graph constructing methods[J]. *Chaos*, 2021, 31(1): 013128.
- [70] AHADPOUR S, SADRA Y. Randomness criteria in binary visibility graph and complex network perspective[J]. *Information Sciences*, 2012, 197: 161-176.
- [71] AHADPOUR S, SADRA Y, ARASTEHFARD Z. Markov-binary visibility graph: A new method for analyzing complex systems[J]. *Information Sciences*, 2014, 274: 286-302.
- [72] IACOVACCI J, LACASA L. Sequential visibility-graph motifs[J]. *Physical Review. E*, 2016, 93: 042309
- [73] CHEN S Y, HU Y, MAHADEVAN S, et al. A visibility graph averaging aggregation operator[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2014, 403: 1-12.
- [74] JIANG W, WEI B Y, ZHAN J, et al. A visibility graph power averaging aggregation operator: A methodology

- based on network analysis[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2016, 101: 260-268.
- [75] XU P H, ZHANG R, DENG Y. A novel visibility graph transformation of time series into weighted networks[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2018, 117: 201-208.
- [76] LIU L H, HUANG J, WANG H M. Visibility graph power geometric aggregation operator and its application in water, energy and food efficiency evaluation[J]. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 2020, 17(11): 3891.
- [77] JIANG W, WEI B Y, TANG Y C, et al. Ordered visibility graph average aggregation operator: An application in produced water management[J]. *Chaos*, 2017, 27(2): 023117.
- [78] WANG H P, MO H M, SADIQ R, et al. Ordered visibility graph weighted averaging aggregation operator: A methodology based on network analysis[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2015, 88: 181-190.
- [79] LI M Z, ZHANG Q, DENG Y. A new probability transformation based on the ordered visibility graph[J]. *International Journal of Intelligent Systems*, 2016, 31(1): 44-67.
- [80] CHEN L Y, DENG Y, CHEONG K H. Probability transformation of mass function: A weighted network method based on the ordered visibility graph[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2021, 105: 104438.
- [81] SONG X J, XIAO F Y. Combining time-series evidence: A complex network model based on a visibility graph and belief entropy[J]. *Applied Intelligence*, 2022, 52(9): 10706-10715.
- [82] LODS A, ANQUETIL É, MACÉ S. Fuzzy visibility graph for structural analysis of online handwritten mathematical expressions[C]//2019 International Conference on Document Analysis and Recognition (ICDAR). Piscataway: IEEE, 2020: 641-646.
- [83] HU Y T, XIAO F Y. Time-series forecasting based on fuzzy cognitive visibility graph and weighted multisub-graph similarity[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2023, 31(4): 1281-1293.
- [84] CHOUDHARY G I, AZIZ W, KHAN I R, et al. Analysing the dynamics of interbeat interval time series using grouped horizontal visibility graph[J]. *IEEE Access*, 2019, 7: 9926-9934.
- [85] LANDE D V, SNARSKII A A, YAGUNOVA E V, et al. The use of horizontal visibility graphs to identify the words that define the informational structure of a text[C]//2013 12th Mexican International Conference on Artificial Intelligence. Piscataway: IEEE, 2014: 209-215.
- [86] ZHU G H, LI Y, WEN P. Analysis and classification of sleep stages based on difference visibility graphs from a single-channel EEG signal[J]. *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, 2014, 18(6): 1813-1821.
- [87] HU Y T, XIAO F Y. A novel method for forecasting time series based on directed visibility graph and improved random walk[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2022, 594: 127029.
- [88] GAO Z K, CAI Q, YANG Y X, et al. Visibility graph from adaptive optimal kernel time-frequency representation for classification of epileptiform EEG[J]. *International Journal of Neural Systems*, 2017, 27(4): 1750005.
- [89] 江泽涛, 秦嘉奇, 张少钦. 参数池化卷积神经网络图像分类方法[J]. *电子学报*, 2020, 48(9): 1729-1734.
- JIANG Z T, QIN J Q, ZHANG S Q. Parameterized pooling convolution neural network for image classification [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2020, 48(9): 1729-1734. (in Chinese)
- [90] 徐先峰, 张丽, 郎彬, 等. 引入感知模型的改进孪生卷积神经网络实现人脸识别算法研究[J]. *电子学报*, 2020, 48(4): 643-647.
- XU X F, ZHANG L, LANG B, et al. Research on inception module incorporated Siamese convolutional neural networks to realize face recognition[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2020, 48(4): 643-647. (in Chinese)
- [91] 权宇, 李志欣, 张灿龙, 等. 融合深度扩张网络和轻量化网络的目标检测模型[J]. *电子学报*, 2020, 48(2): 390-397.
- QUAN Y, LI Z X, ZHANG C L, et al. Fusing deep dilated convolutions network and light-weight network for object detection[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2020, 48(2): 390-397. (in Chinese)
- [92] CAI Q, AN J P, GAO Z K. A multiplex visibility graph motif-based convolutional neural network for characterizing sleep stages using EEG signals[J]. *Brain Science Advances*, 2020, 6(4): 355-363.
- [93] CAI Q, GAO Z K, AN J P, et al. A graph-temporal fused dual-input convolutional neural network for detecting sleep stages from EEG signals[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2021, 68(2): 777-781.
- [94] GAO Z K, LIU M X, DANG W D, et al. A novel complex network-based deep learning method for characterizing gas-liquid two-phase flow[J]. *Petroleum Science*,



- 2021, 18(1): 259-268.
- [95] ZHANG X H, LANDSNESS E C, CHEN W, et al. Automated sleep state classification of wide-field calcium imaging data via multiplex visibility graphs and deep learning[J]. *Journal of Neuroscience Methods*, 2022, 366: 109421.
- [96] CAI Q, AN J P, LI H Y, et al. Cross-subject emotion recognition using visibility graph and genetic algorithm-based convolution neural network[J]. *Chaos*, 2022, 32(9): 093110.
- [97] ZHAN T X, HE Y P, LI H W, et al. DVS: Deep visibility series and its application in construction cost index forecasting[EB/OL]. (2021-11-07)[2023-01-30]. <https://arxiv.org/abs/2111.04071>.
- [98] WANG J L, LIANG S, WANG Y, et al. A weighted overlook graph representation of EEG data for absence epilepsy detection[C]//2020 IEEE International Conference on Data Mining (ICDM). Piscataway: IEEE, 2021: 581-590.
- [99] FLORINDO J B, LEE Y S, JUN K, et al. VisGraphNet: A complex network interpretation of convolutional neural features[J]. *Information Sciences*, 2021, 543: 296-308.
- [100] WANG W N, MOHSENI P, KILGORE K L, et al. Cuffless blood pressure estimation from photoplethysmography via visibility graph and transfer learning[J]. *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, 2022, 26(5): 2075-2085.
- [101] 袁冠, 郇睿, 刘肖, 等. 基于时空图神经网络的手势识别[J]. *电子学报*, 2022, 50(4): 921-931.
- YUAN G, BING R, LIU X, et al. Spatial-temporal graph neural network based hand gesture recognition[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2022, 50(4): 921-931. (in Chinese)
- [102] 高留杰, 赵文, 张君福, 等. G2S: 基于语义块的知识图谱问答语义解析[J]. *电子学报*, 2021, 49(6): 1132-1141.
- GAO L J, ZHAO W, ZHANG J F, et al. G2S: Semantic segment based semantic parsing for question answering over knowledge graph[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2021, 49(6): 1132-1141. (in Chinese)
- [103] 车向北, 康文倩, 邓彬, 等. 一种基于图神经网络的SDN路由性能预测模型[J]. *电子学报*, 2021, 49(3): 484-491.
- CHE X B, KANG W Q, DENG B, et al. A prediction model of SDN routing performance based on graph neural network[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2021, 49(3): 484-491. (in Chinese)
- [104] LI C Y, MO L F, YAN R Q. Rolling bearing fault diagnosis based on horizontal visibility graph and graph neural networks[C]//2020 International Conference on Sensing, Measurement & Data Analytics in the Era of Artificial Intelligence (ICSMD). Piscataway: IEEE, 2020: 275-279.
- [105] LI C Y, MO L F, YAN R Q. Fault diagnosis of rolling bearing based on WHVG and GCN[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2021, 70: 1-11.
- [106] XUAN Q, ZHOU J C, QIU K F, et al. AvgNet: Adaptive visibility graph neural network and its application in modulation classification[J]. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2022, 9(3): 1516-1526.
- [107] XIU Y X, REN X Y, ZHANG T, et al. Time labeled visibility graph for privacy-preserved physiological time series classification[C]//2022 7th International Conference on Cloud Computing and Big Data Analytics (ICCCB-DA). Piscataway: IEEE, 2022: 280-284.
- [108] ZENG J E, TANG J J. Modeling dynamic traffic flow as visibility graphs: A network-scale prediction framework for lane-level traffic flow based on LPR data[J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2023, 24(4): 4173-4188.
- [109] WANG J L, LIANG S, HE D K, et al. A sequential graph convolutional network with frequency-domain complex network of EEG signals for epilepsy detection [C]//2020 IEEE International Conference on Bioinformatics and Biomedicine (BIBM). Piscataway: IEEE, 2021: 785-792.
- [110] WADHERA T, MAHMUD M. Computing hierarchical complexity of the brain from electroencephalogram signals: A graph convolutional network-based approach [C]//2022 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN). Piscataway: IEEE, 2022: 1-6.
- [111] CHEN S M, FENG C, HUANG Y, et al. Small target detection in X-band sea clutter using the visibility graph [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2022, 60: 1-11.
- [112] XU A D, WU T, ZHANG Y N, et al. Graph-based time series edge anomaly detection in smart grid[C]//2021 7th IEEE Intl Conference on Big Data Security on Cloud (BigDataSecurity), IEEE Intl Conference on High Performance and Smart Computing, (HPSC) and IEEE Intl Conference on Intelligent Data and Security (IDS). Piscataway: IEEE, 2021: 1-6.
- [113] LI D R, LI Z Y, XIN H H. Proportional identification of residential air-conditioning loads based on graph theory [C]//2021 IEEE/IAS Industrial and Commercial Power System Asia (I&CPS Asia). Piscataway: IEEE, 2021:

- 1624-1629.
- [114] BIANCHI F M, LIVI L, ALIPPI C, et al. Multiplex visibility graphs to investigate recurrent neural network dynamics[J]. *Scientific Reports*, 2017, 7: 44037.
  - [115] ROY S S, CHATTERJEE S, ROY S, et al. Accurate detection of bearing faults using difference visibility graph and bi-directional long short-term memory network classifier[J]. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 2022, 58(4): 4542-4551.
  - [116] BRISTONE M, PRASAD R, ABUBAKAR A ALI. CP-PCNDL: Crude oil price prediction using complex network and deep learning algorithms[J]. *Petroleum*, 2020, 6(4): 353-361.
  - [117] PAL M, TIWARI Y, REDDY T V, et al. An integrative method for COVID-19 patients classification from chest X-ray using deep learning network with image visibility graph as feature extractor[EB/OL]. (2021-11-21) [2023-01-30]. <https://www.medrxiv.org/content/10.1101/2021.11.17.21266472v1>.
  - [118] SAMANTA K, CHATTERJEE S, BOSE R. Cross-subject motor imagery tasks EEG signal classification employing multiplex weighted visibility graph and deep feature extraction[J]. *IEEE Sensors Letters*, 2020, 4(1): 1-4.
  - [119] ALTUNDOĞAN T G, KARAKÖSE M. Cracked wall image classification based on deep neural network using visibility graph features[C]//2021 International Conference on Innovation and Intelligence for Informatics, Computing, and Technologies (3ICT). Piscataway: IEEE, 2021: 36-39.
  - [120] ALTUNDOĞAN T G, KARAKÖSE M. EEG signal classification with deep neural networks using visibility graphs[C]//2022 26th International Conference on Information Technology (IT). Piscataway: IEEE, 2022: 1-4.
  - [121] 李海林, 林春培. 基于时间序列聚类的科研成果关键词分析方法[J]. *科研管理*, 2022, 43(1): 176-183.  
LI H L, LIN C P. An analysis of keywords of research achievements based on time series clustering[J]. *Science Research Management*, 2022, 43(1): 176-183. (in Chinese)
  - [122] 孙晨峰, 吕卫民, 戴洪德, 等. 一种基于TimeGAN和OCSVM的多元退化设备小子样数据增广方法[J]. *电子学报*, 2022, 50(11): 2678-2687.  
SUN C F, LÜ W M, DAI H D, et al. A small sample data augmentation method for multivariate degradation equipment based on TimeGAN and OCSVM[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2022, 50(11): 2678-2687. (in Chinese)
  - [123] LI H L, WU Y J, CHEN Y W. Time is money: Dynamic-model-based time series data-mining for correlation analysis of commodity sales[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2020, 370: 112659.
  - [124] 尚文利, 石贺, 赵剑明, 等. 基于SAE-LSTM的工艺数据异常检测方法[J]. *电子学报*, 2021, 49(8): 1561-1568.  
SHANG W L, SHI H, ZHAO J M, et al. An anomaly detection method of process data based on SAE-LSTM[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2021, 49(8): 1561-1568. (in Chinese)
  - [125] PARTIDA A, CRIADO R, ROMANCE M. Visibility graph analysis of IOTA and IoTeX price series: An intentional risk-based strategy to use 5G for IoT[J]. *Electronics*, 2021, 10(18): 2282.
  - [126] LIU R Y, CHEN Y. Analysis of stock price motion asymmetry via visibility-graph algorithm[J]. *Frontiers in Physics*, 2020, 8: 539521.
  - [127] HUANG Y S, MAO X Y, DENG Y. Natural visibility encoding for time series and its application in stock trend prediction[J]. *Knowledge-Based Systems*, 2021, 232: 107478.
  - [128] LIU X B, YUAN X S, LIU C, et al. Analysis of stock price data: Determination of the optimal sliding-window length[J]. *Frontiers in Physics*, 2021, 9: 741106.
  - [129] XIU Y X, WANG G Y, CHAN W K V. Crash diagnosis and price rebound prediction in NYSE composite index based on visibility graph and time-evolving stock correlation network[J]. *Entropy*, 2021, 23(12): 1612.
  - [130] QU Z Q, ZHANG Y J, LI F. Analyzing levels of concern about joint punishment for dishonesty using the visibility graph network[J]. *Frontiers in Physics*, 2021, 9: 746660.
  - [131] MODAK S, ROY S S, SAMANTA K, et al. Detection of focal EEG signals employing weighted visibility graph[C]//2020 International Conference on Computer, Electrical & Communication Engineering (ICCECE). Piscataway: IEEE, 2020: 1-5.
  - [132] MOHAMMADPOORY Z, NASROLAHZADEH M, HADDADNIA J. Epileptic seizure detection in EEGs signals based on the weighted visibility graph entropy[J]. *Seizure*, 2017, 50: 202-208.
  - [133] NASROLAHZADEH M, MOHAMMADPOORY Z, HADDADNIA J. Analysis of heart rate signals during meditation using visibility graph complexity[J]. *Cognitive Neurodynamics*, 2019, 13(1): 45-52.
  - [134] BHADURI A, GHOSH D. Quantitative assessment of

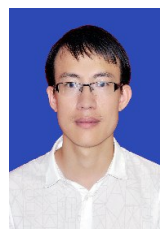
- heart rate dynamics during meditation: An ECG based study with multi-fractality and visibility graph[J]. *Frontiers in Physiology*, 2016, 7: 44.
- [135] LI X, YANG D, LIU X, et al. Bridging time series dynamics and complex network theory with application to electrocardiogram analysis[J]. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 2012, 12(4): 33-46.
- [136] 马志怡, 杨小冬, 何爱军, 等. 基于多路可视图的健康与心梗患者心电图信号复杂网络识别[J]. *物理学报*, 2022, 71(5): 48-57.
- MA Z Y, YANG X D, HE A J, et al. Complex network recognition of electrocardiograph signals in health and myocardial infarction patients based on multiplex visibility graph[J]. *Acta Physica Sinica*, 2022, 71(5): 48-57. (in Chinese)
- [137] KONG T J, SHAO J E, HU J Y, et al. EEG-based emotion recognition using an improved weighted horizontal visibility graph[J]. *Sensors*, 2021, 21(5): 1870.
- [138] XIONG H, SHANG P J, HOU F Z, et al. Visibility graph analysis of temporal irreversibility in sleep electroencephalograms[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 96(1): 1-11.
- [139] XU J S, WANG M T, ZHANG J P, et al. Network theory based EHG signal analysis and its application in pre-term prediction[J]. *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, 2022, 26(7): 2876-2887.
- [140] LEÓN C, CARRAULT G, PLADYS P, et al. Early detection of late onset sepsis in premature infants using visibility graph analysis of heart rate variability[J]. *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, 2021, 25(4): 1006-1017.
- [141] ZHANG D D, LONG X, XU L, et al. Characterizing cardiorespiratory interaction in preterm infants across sleep states using visibility graph analysis[J]. *Journal of Applied Physiology*, 2021, 130(4): 1015-1024.
- [142] VARLEY T F, SPORNS O. Network analysis of time series: Novel approaches to network neuroscience[J]. *Frontiers in Neuroscience*, 2021, 15: 787068.
- [143] CAI Z P, CHENG H Y, XING Y T, et al. Autonomic nervous activity analysis based on visibility graph complex networks and skin sympathetic nerve activity[J]. *Frontiers in Physiology*, 2022: 1001415.
- [144] MOZAFFARILEGHA M, ADELI H. Visibility graph analysis of speech evoked auditory brainstem response in persistent developmental stuttering[J]. *Neuroscience Letters*, 2019, 696: 28-32.
- [145] CHEN J Y, WANG Z, ZHENG H B, et al. DGFE-VG: Dynamic gene feature extraction via visibility graph[C]// *Proceedings of the 3rd International Conference on Medical and Health Informatics*. New York: ACM, 2019: 119-124.
- [146] ZHENG M Z, DOMANSKYI S, PIERMAROCCHI C, et al. Visibility graph based temporal community detection with applications in biological time series[J]. *Scientific Reports*, 2021, 11: 5623.
- [147] NOWAK J, ENG R C, MATZ T, et al. A network-based framework for shape analysis enables accurate characterization of leaf epidermal cells[J]. *Nature Communications*, 2021, 12: 458.
- [148] ZERVOU M A, DOUTSI E, PAVLIDIS P, et al. Structural classification of proteins based on the computationally efficient recurrence quantification analysis and horizontal visibility graphs[J]. *Bioinformatics*, 2021, 37(13): 1796-1804.
- [149] JI C, HU Y P, WANG K, et al. Identifiable temporal feature selection via horizontal visibility graph towards smart medical applications[J]. *Interdisciplinary Sciences: Computational Life Sciences*, 2021, 13(4): 717-730.
- [150] ROY S S, CHATTERJEE S. Partial discharge detection framework employing spectral analysis of horizontal visibility graph[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2021, 21(4): 4819-4826.
- [151] YELA D F, STOWELL D, SANDLER M. Spectral visibility graphs: Application to similarity of harmonic signals[C]// *2019 27th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*. Piscataway: IEEE, 2019: 1-5.
- [152] MALI P, MUKHOPADHYAY A, MANNA S K, et al. Multifractal analysis of charged particle distributions using horizontal visibility graph and sandbox algorithm[J]. *Modern Physics Letters A*, 2017, 32(8): 1750024.
- [153] PLOCOSTE T, CARMONA-CABEZAS R, JIMÉNEZ-HORNERO F J, et al. Multifractal characterisation of particulate matter (PM10) time series in the Caribbean Basin using visibility graphs[J]. *Atmospheric Pollution Research*, 2021, 12(1): 100-110.
- [154] MOHEBIAN P, AVAL S B B, NOORI M, et al. Visible particle series search algorithm and its application in structural damage identification[J]. *Sensors*, 2022, 22(3): 1275.
- [155] WU Z F, PAN X D, FAN K P, et al. Device-free orientation detection based on CSI and visibility graph[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(7): 4433-4442.
- [156] CHI K, SHEN J H, LI Y, et al. Multi-function radar sig-



- nal sorting based on complex network[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2021, 28: 91-95.
- [157] LIU S T, LEI Z S, GE Y, et al. Automatic radar antenna scan type recognition based on limited penetrable visibility graph[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2021, 32(2): 437-446.
- [158] WAN T, JIANG K L, LIAO J Y, et al. Research on LPI radar signal detection and parameter estimation technology[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2021, 32(3): 566-572.
- [159] MIRALLES R, LARA G, CARRIÓN A, et al. Assessment of arrow-of-time metrics for the characterization of underwater explosions[J]. Sensors, 2021, 21(17): 5952.
- [160] ACOSTA-TRIPAILAO B, MAX-MOERBECK W, PASTÉN D, et al. Assigning degrees of stochasticity to blazar light curves in the radio band using complex networks[EB/OL]. (2022-05-09)[2023-01-30]. <https://arxiv.org/abs/2205.04568>.
- [161] MUÑOZ V, GARCÉS N E. Analysis of pulsating variable stars using the visibility graph algorithm[J]. PLoS One, 2021, 16(11): e0259735.
- [162] IACOBELLO G, SCARSOGLIO S, RIDOLFI L. Visibility graph analysis of wall turbulence time-series[J]. Physics Letters A, 2018, 382(1): 1-11.
- [163] TAO X T, WU H X. Modified horizontal visibility graph and its application in turbulence[C]//Proceedings of the AIAA Scitech 2019 Forum. Reston: AIAA, 2019: AIAA2019-1868.
- [164] CHOWDHURI S, IACOBELLO G, BANERJEE T. Visibility network analysis of large-scale intermittency in convective surface layer turbulence[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2021, 925: A38.
- [165] IACOBELLO G, RIDOLFI L, SCARSOGLIO S. Large-to-small scale frequency modulation analysis in wall-bounded turbulence via visibility networks[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2021, 918: A13.
- [166] IACOBELLO G, RIDOLFI L, SCARSOGLIO S. A review on turbulent and vortical flow analyses via complex networks[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2021, 563: 125476.
- [167] JOHN R, JOHN M. Adaptation of the visibility graph algorithm for detecting time lag between rainfall and water level fluctuations in Lake Okeechobee[J]. Advances in Water Resources, 2019, 134: 103429.
- [168] PIERINI J O, LOVALLO M, TELESKA L. Visibility graph analysis of wind speed records measured in central Argentina[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2012, 391(20): 5041-5048.
- [169] TELESKA L, LOVALLO M. Analysis of seismic sequences by using the method of visibility graph[J]. EPL (Europhysics Letters), 2012, 97(5): 50002.
- [170] TELESKA L, LOVALLO M, AGGARWAL S K, et al. Precursory signatures in the visibility graph analysis of seismicity: An application to the Kachchh (Western India) seismicity[J]. Physics and Chemistry of the Earth, Parts A/B/C, 2015, 85/86: 195-200.
- [171] TELESKA L, LOVALLO M, RAMIREZ-ROJAS A, et al. Investigating the time dynamics of seismicity by using the visibility graph approach: Application to seismicity of Mexican subduction zone[J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2013, 392(24): 6571-6577.
- [172] RAMÍREZ-ROJAS A, FLORES-MÁRQUEZ E L. Non-linear statistical features of the seismicity in the subduction zone of tehuantepec isthmus, southern México[J]. Entropy, 2022, 24(4): 480.
- [173] KUNDU S, OPRIS A, YUKUTAKE Y, et al. Extracting correlations in earthquake time series using visibility graph analysis[J]. Frontiers in Physics, 2021, 9: 656310.
- [174] TELESKA L, THAI A T, LOVALLO M, et al. Visibility graph analysis of reservoir-triggered seismicity: The case of song tranh 2 hydropower, Vietnam[J]. Entropy, 2022, 24(11): 1620.
- [175] TELESKA L, LOVALLO M, PIERINI J O. Visibility graph approach to the analysis of ocean tidal records[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2012, 45(9/10): 1086-1091.
- [176] MARWAN N, DONGES J F, DONNER R V, et al. Non-linear time series analysis of palaeoclimate proxy records[J]. Quaternary Science Reviews, 2021, 274: 107245.
- [177] HU J, CHEN J H, ZHU P C, et al. Difference and cluster analysis on the carbon dioxide emissions in China during COVID-19 lockdown via a complex network model[J]. Frontiers in Psychology, 2022, 12: 795142.
- [178] HU Y X, CHU C B, WU P, et al. A linear time series analysis of carbon price via a complex network approach[J]. Frontiers in Physics, 2022, 10: 1029600.
- [179] GÓMEZ-GÓMEZ J, CARMONA-CABEZAS R, SÁNCHEZ-LÓPEZ E, et al. Analysis of air mean temperature anomalies by using horizontal visibility graphs[J]. Entropy, 2021, 23(2): 207.
- [180] YIN Y, WANG W J, LI Q A, et al. Jensen-shannon divergence based on horizontal visibility graph for complex time series[J]. Fluctuation and Noise Letters, 2021, 20(2): 2150013.

- [181] JOHN M, FERBINTEANU J. Detecting time lag between a pair of time series using visibility graph algorithm[J]. Communications in Statistics: Case Studies, Data Analysis and Applications, 2021, 7(3): 315-343.
- [182] CHEN Y Y, WANG J, DENG B. Improve the estimation of Hurst exponents from visibility graph[C]//2016 Chinese Control and Decision Conference (CCDC). Piscataway: IEEE, 2016: 2350-2353.
- [183] KAKI B, FARHANG N, SAFARI H. Evidence of self-organized criticality in time series by the horizontal visibility graph approach[J]. Scientific Reports, 2022, 12: 16835.
- [184] WANG H, SUN Y S. A community evolution model based on visibility graph[C]//2015 34th Chinese Control Conference (CCC). Piscataway: IEEE, 2015: 2045-2049.
- [185] LIU J, LIU H L, HUANG Z J, et al. Differ multivariate timeseries from each other based on a simple multiplex visibility graphs technique[C]//2015 Sixth International Conference on Intelligent Control and Information Processing (ICICIP). Piscataway: IEEE, 2016: 289-295.
- [186] CAMPANHARO A S L O, SIRER M I, MALMGREN R D, et al. Duality between time series and networks[J]. PLoS One, 2011, 6(8): e23378.
- [187] LI Q, CHEN Y G, AO N, et al. Echo state network-based visibility graph method for nonlinear time series prediction[C]//2018 Chinese Control and Decision Conference (CCDC). Piscataway: IEEE, 2018: 1854-1859.
- [188] DE SOUZA MOREIRA F R, VERRI F A N, YONEYAMA T. Maximum visibility: A novel approach for time series forecasting based on complex network theory[J]. IEEE Access, 2022, 10: 8960-8973.
- [189] HU Y T, XIAO F Y. Network self attention for forecasting time series[J]. Applied Soft Computing, 2022, 124: 109092.
- [190] WEN T, CHEN H L, CHEONG K H. Visibility graph for time series prediction and image classification: A review[J]. Nonlinear Dynamics, 2022, 110(4): 2979-2999.
- [191] FLORINDO J, MARTINEZ BRUNO O. Using fractal interpolation over complex network modeling of deep texture representation[C]//2022 Eleventh International Conference on Image Processing Theory, Tools and Applications (IPTA). Piscataway: IEEE, 2022: 1-5.
- [192] LI H, LIAO J W, LIU X Y. Merging and prioritizing optimization in block I/O scheduling of disk storage[J]. Journal of Circuits, Systems and Computers, 2021, 30 (10): 2150186.
- [193] STEPHEN M, GU C G, YANG H J. Visibility graph based time series analysis[J]. PLoS One, 2015, 10(11): e0143015.
- [194] LI H L, WANG J, CAI Y, et al. Visibility-Graph [EB/OL]. (2022-05-15)[2023-01-30]. <https://github.com/DENG-GONG/Visibility-Graph>.

## 作者简介



**李海林** 男, 1982年生. 博士. 华侨大学工商管理学院教授、博士生导师. 主要研究方向为计算机应用、数据挖掘、大数据分析.

E-mail: hailin@hqu.edu.cn



**王杰** 男, 2000年生. 华侨大学工商管理学院本科生. 主要研究方向为计算机应用、数据挖掘.

E-mail: 1752624298@qq.com



**周文浩** 男, 1997年生. 华侨大学工商管理学院博士研究生. 主要研究方向为数据分析、计算机应用.

E-mail: wenhao2021@stu.hqu.edu.cn



**蔡煜** 男, 2001年生. 华侨大学工商管理学院本科生. 主要研究方向为计算机应用.

E-mail: 1512875381@qq.com



**林伟滨(通讯作者)** 男, 1990年出生. 华侨大学工商管理学院博士研究生. 主要研究方向为数据分析、计算机应用.

E-mail: lwb@qztc.edu.cn