

# Bessel 函数与三角函数之积的级数展开及在微波滤波器中的应用

李胜先, 吴须大

(中国空间技术研究院 504 所, 西安 710000)

**摘 要:** 根据对平面波函数运用 Fourier-Bessel 定理, 经过一系列推导并进行反 Fourier 变换, 得到了直角坐标系下 Bessel 函数与三角函数之积的一种级数展开, 该表达式应用到矩-圆波导结的计算中, 能解析地推出其广义 S 参数, 得到与文献和 HFSS 软件较为一致的结果. 计算了 Ku 和 Ka 频段多种尺寸的有厚度的矩形孔的耦合系数, 并与文献、实验数据进行了比较, 吻合较好, 设计了一个 Ku 频段 6 阶类椭圆函数滤波器, 实验性能与理论结果一致.

**关键词:** Bessel 函数; 级数展开; 矩-圆波导结; 耦合孔; 精确计算; 类椭圆函数; 滤波器

**中图分类号:** TN73.459 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2000) 09-0046-03

## Series Expansions of the Product of Bessel Functions and Sine/ Cosine Functions and Their Applications in Microwave Filter

LI Sheng-xian, WU Xu-da

(504, Chinese Academy of Space Technology, Xi'an 710000, China)

**Abstract:** By employing the Fourier-Bessel theorem to plane wave functions and through a series of deduction and inverse Fourier transform, one kind of series expansions of the product of Bessel functions and sine/ cosine function in Cartesian coordinates is obtained. This expression can be used to compute the rectangular to circular waveguide junction and to analytically deduce its generalized S-parameters, which are in good agreement with results from other papers and HFSS. The coupling coefficient of rectangular iris with thickness are computed in Ku and Ka band, and numerical evaluations are presented, which show close agreement with experimental data and other paper. As a consequence, a 6th-order quasi-elliptic function filter in Ku band is realized through rigorous calculation of the coupling iris dimensions, and the measured data agree well with the predicted values.

**Key words:** Bessel functions; series expansions; waveguide junction of rectangular to circular; coupling aperture (iris); rigorous calculation; quasi-elliptic function; filter

### 1 引言

在圆波导中, 由于电磁场表达形式涉及到 Bessel 函数这一特殊函数, 因而处理如矩-圆波导结等涉及圆波导的问题会显得比较困难和复杂, 而矩-圆波导结作为一类重要的波导不连续结构, 是构成微波和毫米波无源部件的基础, 特别在圆柱腔微波滤波器中应用广泛, 它的计算具有较高的工程价值和较重要的理论意义. 矩-圆波导结的计算涉及 Bessel 函数的积分问题和两种坐标系的转换, 许多文献在处理这个问题时一般采用数值积分的途径来解决<sup>[1~3]</sup>, 从而不可避免地带来了 CPU 时间长和计算精度有限等特点. 本文提出了 Bessel 函数与三角函数之积的一种级数展开, 并通过柱坐标系向直角坐标系的转换, 获得直角坐标下圆波导矢量波型函数的解析表达式, 从而解析地推导出矩-圆结的广义 S 参数, 提高了计算

的精度, 缩短了 CPU 时间. 计算了 Ku 和 Ka 频段有厚度的矩形耦合孔的耦合系数, 并与文献和实验数据进行了比较. 设计了一个 Ku 频段双模 6 阶类椭圆函数滤波器, 实验测试结果与理论曲线吻合较好.

### 2 Bessel 函数和三角函数之积的级数展开

对平面波函数运用 Fourier-Bessel 定理<sup>[4]</sup>, 得

$$e^{-jk r \sin(\theta - \theta_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} J_n(k r \sin \theta_0) e^{-j n(\theta - \theta_0)} \quad (1)$$

设  $k \sin \theta_0 = h$ ,  $\theta = \theta_0 + \phi$ , 则有

$$e^{-j h r \cos(\phi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} J_n(h r) e^{-j n \phi} \quad (2)$$

$$\text{即 } \sum_{n=-\infty}^{\infty} j^{-n} e^{-j n \phi} J_n(h r) e^{j n \phi} = e^{-j h r \cos(\phi)} = e^{-j h (\cos \phi^x + \sin \phi^y)} \quad (3)$$

当  $|n|$  大于  $hr$ ,  $J_{\pm n}(hr)$  的幅度迅速下降, 并且降到可忽略的程度<sup>[5,6]</sup>, 于是便有下面的近似

$$\sum_{n=-M}^M j^{-n} e^{-jn} J_n(hr) e^{jn} = e^{-jh(\cos \theta^x + \sin \theta^y)} \quad (4)$$

此时  $hr < M - M_0$ ,  $M_0$  为小整数.

考虑  $(2M+1)$  个平面波, 其方向为

$$\theta_l = l \cdot \pi / N \quad (l=0, 1, \dots, 2M; N=2M+1) \quad (5)$$

记  $n = r - M$ , 对上式(4)两边同乘  $1/N$ , 得

$$\frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} e^{-jlr \frac{2\pi}{N}} A_r = B_l \quad (6)$$

其中

$$A_r = j^{M-r} J_{r-M}(hr) e^{j(r-M)\theta} \quad (7)$$

$$B_l = \frac{1}{N} e^{-jl \frac{N-1}{N}} e^{-jh(c_l^x + s_l^y)} \quad (8)$$

式中  $c_l, s_l$  分别为

$$c_l = \cos \theta_l = \cos(l \cdot \pi / N) \quad (9)$$

$$s_l = \sin \theta_l = \sin(l \cdot \pi / N)$$

观察式(6), 发现正是序列  $\{A_0, A_1, \dots, A_{N-1}\}$  的离散 Fourier 变换, 反过来, 有

$$A_r = \sum_{l=0}^{N-1} e^{jlr \frac{2\pi}{N}} B_l \quad (10)$$

把  $n = r - M$  代入式(7)和(8)中, 式(10)可进一步变为

$$J_n(hr) e^{jn} = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{j^n}{N} e^{jlr \frac{2\pi}{N}} e^{-jh(c_l^x + s_l^y)} \quad (11)$$

进一步转化为:

$$J_q(h) \cos(q) = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{j^q}{N} \cos(l \cdot \frac{2\pi}{N}) e^{-jh(c_l^x + s_l^y)} \quad (12)$$

$$J_q(h) \sin(q) = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{j^q}{N} \sin(l \cdot \frac{2\pi}{N}) e^{-jh(c_l^x + s_l^y)} \quad (12)$$

因此, 极坐标系下点  $(r, \theta)$  的函数

$$f(r, \theta) = J_q(h) \cos(q) \quad (13)$$

$$f(r, \theta) = J_q(h) \sin(q)$$

可以用直角坐标来表示.

### 3 在矩-圆波导结及波导滤波器中的应用

图 1 是矩-圆波导结(为小矩形波导到大圆波导)的结构示意图, 假设两边波导具有共同的对称轴, 这在工程上不失一般性, 并采用如图的坐标系.

根据直角坐标系下 Bessel 函数与三角函数之积的级数展开, 可以获得直角坐标系下圆波导的矢量波型函数的解析表达式

$$\begin{aligned} e_2^{(h)} \left( \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right)_{,qr} (x, y) &= \frac{h_{qr}}{N} N_{2,qr}^{(h)} j^{q+1} \sum_{l=0}^{N-1} \begin{Bmatrix} C_{lq} \\ S_{lq} \end{Bmatrix} (\alpha s_l - \beta c_l) e^{-jh_{qr}(c_l^x + s_l^y)} \\ e_2^{(p)} \left( \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right)_{,qr} (x, y) &= \frac{h_{qr}}{N} N_{2,qr}^{(p)} j^{q+1} \sum_{l=0}^{N-1} \begin{Bmatrix} C_{lq} \\ S_{lq} \end{Bmatrix} (\alpha c_l + \beta s_l) e^{-jh_{qr}(c_l^x + s_l^y)} \end{aligned} \quad (14)$$

从而解析地求出矩-圆波导结  $S$  参数的解析表达式, 由 4 个子矩阵构成, 分别为

$$\begin{aligned} S_{11} &= [M^T M + I]^{-1} [I - M^T M] \\ S_{12} &= 2 [M^T M + I]^{-1} M^T \end{aligned} \quad (15)$$

$$S_{21} = M [I + S_{11}]$$

$$S_{22} = M S_{12} - I$$

其中  $M$  称为电场耦合矩阵, 由 8 个子矩阵构成

$$M = \begin{Bmatrix} H^c & K^c \\ H^s & K^s \\ Q^c & E^c \\ Q^s & E^s \end{Bmatrix} \quad (16)$$

分别表示了波导 1 和 2 (又分  $c$  类和  $s$  类) 中 TE、TM 模之间的耦合, 其各个子矩阵单元可以解析地计算出来:

$$\begin{aligned} H_{qr, mn}^c &= \sqrt{\frac{Z_1^{(h)}}{Z_2^{(h)}}} N_{1, mn} N_{2, qj}^{(h)} j^{q+1} \sum_{l=0}^{N-1} \begin{Bmatrix} C_{lq} \\ S_{lq} \end{Bmatrix} S_{qr, mn, l} \\ K_{qr, mn}^c &= \sqrt{\frac{Z_1^{(h)}}{Z_2^{(h)}}} N_{1, mn} N_{2, qj}^{(h)} j^{q+1} \sum_{l=0}^{N-1} \begin{Bmatrix} C_{lq} \\ S_{lq} \end{Bmatrix} T_{qr, mn, l} \\ Q_{qr, mn}^c &= \sqrt{\frac{Z_1^{(h)}}{Z_2^{(h)}}} N_{1, mn} N_{2, qj}^{(h)} j^{q+1} \sum_{l=0}^{N-1} \begin{Bmatrix} C_{lq} \\ -S_{lq} \end{Bmatrix} U_{qr, mn, l} \\ E_{qr, mn}^c &= \sqrt{\frac{Z_1^{(h)}}{Z_2^{(h)}}} N_{1, mn} N_{2, qj}^{(h)} j^{q+1} \sum_{l=0}^{N-1} \begin{Bmatrix} C_{lq} \\ -S_{lq} \end{Bmatrix} V_{qr, mn, l} \end{aligned} \quad (17)$$

式中  $S_{qr, mn, l}, T_{qr, mn, l}, U_{qr, mn, l}, V_{qr, mn, l}$  分别为:

$$S_{qr, mn, l} = \frac{h_{qr}}{N} [S_1 \text{anf}_{mn}^s(h_{qr}) - C_1 \text{bm}f_{mn}^c(h_{qr})] \quad (18)$$

$$T_{qr, mn, l} = \frac{h_{qr}}{N} [S_1 \text{bm}f_{mn}^s(h_{qr}) + C_1 \text{anf}_{mn}^c(h_{qr})]$$

$$U_{qr, mn, l} = \frac{h_{qr}}{N} [C_1 \text{anf}_{mn}^s(h_{qr}) + S_1 \text{bm}f_{mn}^c(h_{qr})]$$

$$V_{qr, mn, l} = \frac{h_{qr}}{N} [C_1 \text{bm}f_{mn}^s(h_{qr}) - S_1 \text{anf}_{mn}^c(h_{qr})]$$

$I_{mn}(x)$  ( $=s, c$ ) 为两个函数之积,

$$I_{mn}(x) = I_m(x c_l \cdot a) \cdot I_n(x s_l \cdot b) \quad (19)$$

而两个函数可分别推导出, 为

$$\begin{aligned} I_m^s(x \cdot d) &= \frac{2j d \sin(\frac{m}{2}) \cos(\frac{d}{2}) - 2j m \cos(\frac{m}{2}) \sin(\frac{d}{2})}{(d)^2 - (m)^2} \\ I_m^c(x \cdot d) &= \frac{2 d \cos(\frac{m}{2}) \sin(\frac{d}{2}) - 2 m \sin(\frac{m}{2}) \cos(\frac{d}{2})}{(d)^2 - (m)^2} \end{aligned} \quad (20)$$

表 1 矩-圆波导结  $S$  参数及与文献的比较

( $a \times b = 19.05 \text{mm} \times 9.525 \text{mm}$ ,  $R = a, f_0(\text{GHz})$ )

	$f_0$	$S_{11}$	$S_{12}$
文献[8]	9	- 0.1520 + j0.6815	- 0.5561 - j0.4510
	9	- 0.1521 + j0.6814	- 0.5562 - j0.4508
本文结果	10	- 0.2981 + j0.0257	- 0.4119 - j0.0058
	11	- 0.0344 + j0.0102	0.5326 - j0.0361
	12	0.0730 - j0.0338	- 0.5783 + j0.0282

值得一提的是,  $K_{qr, mn}^{(c)} = 0 (\{c, s\})$ .

因此, 避开了传统计算中的 Bessel 的数值积分, 提高了计算的精度, 减少了 CPU 时间.

表 1 和表 2 分别是矩-圆波导结  $S$  参数计算结果及与文献和 HFSS 软件的比较, 比较发现, 本文结果与文献和 HFSS 是比较一致的. 图 2 是  $S_{11}$  和  $S_{21}$  随频率  $f$  变化的曲线图, 对照文献[7]的图 2, 发现吻合较好.

表 2 矩-圆波导结  $S$  参数及与 HFSS 软件结果的比较

( $a \times b = 7.112 \times 3.556$ ,  $R = 5.6$ ,  $f_0$  (GHz))

	$f_0$	$ S_{11} $	$ S_{12} $
HFSS	28.0	0.9926	0.1217
	29.0	0.9955	0.0945
	32.0	0.9997	0.0343
本文结果	28.0	0.9925	0.1218
	29.0	0.9956	0.0945
	32.0	0.9995	0.0344

根据矩-圆波导结的  $S$  参数的电磁场计算, 就可以对波导滤波器中耦合孔(耦合膜片)和滤波器本身进行较为精确地分析, 从而精确地完成波导滤波器的设计. 图 3 和图 4 分别是  $K_u$  频段和  $K_a$  频段有厚度的矩形耦合孔的耦合系数的计算结果及与文献和实验数据的比较情况. 图 3 中矩形孔的宽和厚均为 1mm, 而图 4 中矩形孔的孔的宽度和厚度分别为 1mm 和 0.3mm.

图 2 矩-圆波导结  $S_{11}$ ,  $S_{21}$  随频率  $f$  的变化

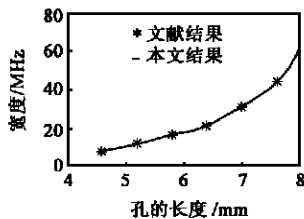
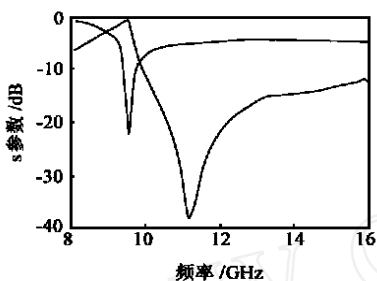


图 3  $K_u$  频段矩形耦合孔的耦合系数的计算结果与文献数据的比较

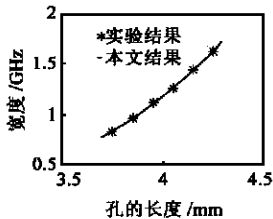


图 4  $K_a$  频段矩形耦合孔的耦合系数的计算结果与实验结果的比较

图 5 是波导滤波器的结构示意图, 根据圆腔中各个模式耦合的排列, 腔间耦合孔可以“十”字孔或“一”孔.



图 5 波导滤波器的结构示意图

根据耦合系数的计算, 设计了一个  $K_u$  频段双模 6 阶椭圆函数滤波器. 输入/输出耦合为  $R_1 = R_2 = 1.1050$ , 表 3 给出了其耦合矩阵. 在该滤波器中由“十”字孔来完成一个腔里两个简并的  $TE_{113}$  模式与另一个腔的两个简并模式之间的主耦合和交叉耦合.

表 3 6 阶双模滤波器的耦合矩阵

$M_{ij}$	1	2	3	4	5	6
1	0.0000	0.8650	0.0000	0.1846	0.0000	0.0000
2	0.8650	0.0000	-0.7385	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	-0.7485	0.0000	0.5420	0.0000	0.1846
4	0.1846	0.0000	0.5432	0.0000	-0.7385	0.0000
5	0.0000	0.0000	0.0000	-0.7385	0.0000	0.8650
6	0.0000	0.0000	0.1846	0.0000	0.8650	0.0000

基于上表的耦合矩阵, 计算了耦合孔的大小. 两个“十”字耦合孔尺寸一致, “十”字孔中长短两个矩形孔的长度分别为 6.85mm 和 4.55mm, 孔的宽度和厚度分别为 1.0mm 和 0.3mm.

图 6 是该滤波器的测量结果与理论曲线的比较情况, 实线表示测量结果, 虚线部分是理论值.

观察图 6, 双模滤波器传输和反射特性的测量结果与理论预期值是比较吻合的. 当然二者也存在一些差别, 主要是由于孔的色散效应、加工误差、测试设备等造成的. 这种双模波导滤波器, 可以作为卫星通信有效载荷里输入或输出多工器的一个通道滤波器.

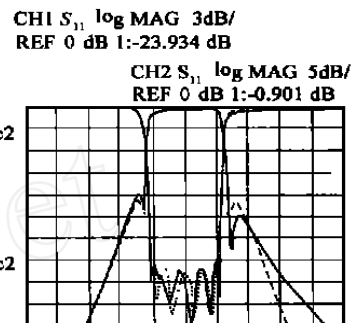


图 6 6 阶双模类椭圆函数滤波器的测试特性与模拟特性的比较

#### 4 结束语

利用 Bessel 函数与三角函数之积的级数展开, 得到直角坐标系下圆波导的矢量波型函数的解析表达式, 可以简洁地和方便地处理电磁场计算中涉及圆波导的问题, 如矩-圆波导结的精确计算.

#### 作者简介:



李胜先 1974 年出生, 分别于 1996 年、1999 年获得理学学士、工学硕士学位. 现在中国空间技术研究院 504 研究所从事科研工作. 主要研究兴趣为微波滤波器和多工器的优化设计、电磁场的数值计算、毫米波调制器的工程优化和研制、卫星通信等. 发表论文数篇.



吴须大 研究员, 1966 年毕业于中国科学技术大学, 长期从事卫星有效载荷技术和微波器件的研究工作, 在微波无源器件特别是滤波器和多工器的分析、优化和综合以及工程研制方面, 积累了丰富的经验. 目前主要研究兴趣为电磁场的数值计算、毫米波器件的分析和优化、卫星有效载荷技术的研究等. 发表论文数十篇.

(下转第 15 页)

报文的情况,推断协议的公平性。

运用上述推理系统,对下面的协议(详见参考文献[1])进行分析。

$$A \rightarrow B : f_{EOO}, B, L, C, EOO$$

$$B \rightarrow A : f_{EOR}, A, L, EOR$$

$$A \rightarrow S : f_{SUB}, B, L, K, SUB$$

$$S \rightarrow B : f_{CON}, A, B, L, K, CON$$

$$S \rightarrow A : f_{CON}, A, B, L, K, CON$$

运用上述推理系统对协议进行分析,发现由于上述协议设计未考虑参与协议的主体进行主动攻击的情况,协议不满足公平性。

### 3 结论

本文分析了协议公平性的定义,指出了协议公平性应考虑参与协议的主体主动攻击的情况。在此基础上,本文在Kailar逻辑的基础上进行了改进和扩充,提出一种新的形式化分析方法,可以同时分析电子商务协议的公平性和可追究性。

致谢:在此感谢丁一强博士、陈国龙博士,与他们的讨论给了我们许多有益的启发。

#### 参考文献:

- [1] J. Y. Zhou, Non-Repudiation, PhD Thesis. Department of Computer Science [M]. Royal Holloway, University of London, 1997.
- [2] M. Burrows, M. Abadi, R. Needham. A logic of authentication [J]. ACM Trans. on Computer Science, 1990, 8(1): 18 - 36.
- [3] L. Gong, R. Needham, R. Yahalom. Reasoning about belief in cryptographic protocols [A]. Proceedings of the 1990 IEEE Symposium on Research in Security and Privacy, Oakland, CA: IEEE Computer Society Press, 1990: 234 - 248.
- [4] M. Abadi, M. Tuttle. A semantics for a logic of authentication [C]. Proceedings of the Tenth ACM Symposium on Principles of Distributed Computing, Acn Press, 1991: 201 - 216.
- [5] P. Syverson, P. C. van Oorschot. On unifying some cryptographic protocol logics [A]. Proceedings of 1994 IEEE Symposium on Research in Security and Privacy, Oakland CA: IEEE Computer Society Press, 1994: 14 - 28.
- [6] R. Kailar. Accountability in electronic commerce protocols [J]. IEEE Trans. on Software Engineering, 1996, 22(5).
- [7] R. H. Deng, L. Gong, A. A. Lazar, W. G. Wang. Practical Protocols for Certified Electronic Mail [M]. Technical Report TR95-187-0, Institute of Systems Science, National University of Singapore, 1995.
- [8] 周典萃, 卿斯汉, 周展飞. Kailar 逻辑的缺陷 [J]. 软件学报, 待发表
- [9] N. Asokan. Fairness in electronic commerce [D]. PhD Thesis, Department of Mathematics, University of Waterloo, Canada, 1998.

#### 作者简介:



周展飞 1969 年生, 博士, 主要研究领域为密码理论和应用数学。

周典萃 1971 年生, 硕士, 主要研究领域为信息安全基础理论。

(上接第 48 页)

#### 参考文献:

- [1] Patrick Couffignal, Henri Baudrand, Bernard Theron. A new rigorous for the determination of iris dimensions in dual-mode cavity filters [J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech., July 1994, MTT-42: 1314 - 1320.
- [2] Philippe Guillot, Patrick Couffignal, Henri Baudrand, Bernard Theron. Improvement in calculation of some surface integrals: application to junction characterization in cavity filter design [J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech., Dec. 1993, MTT-41: 2156 - 2160.
- [3] Luciano Accatton, Giorgio Bertin. Design of coupling irises between circular cavities by model analysis [J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech., July 1994, MTT-42: 1307 - 1313.
- [4] J. Adams Stratton. Electromagnetic Theory [M]. New York: McGraw-Hill, 1941: 349 - 392.
- [5] M. Abramowitz, I. A. Stegun. Handbook of Mathematical Functions [M]. New York: Dover, 1965: 59.
- [6] N. W. McLachlan. Theory, Application of Mathieu Function [M]. London, 1947: 168.
- [7] R. H. MacPhie and Ke-Li Wu. Scattering at the junction of a rectangular and a larger circular waveguide [J]. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Sept. 1995, MTT-43: 2041 - 2045.