

小波变换域估计观测噪声方差的 Kalman 滤波算法 及其在数据融合中的应用

高 羽, 张建秋

(复旦大学电子工程系, 上海 200433)

摘 要: 众所周知, 卡尔曼滤波的成功应用需要事先准确知道观测噪声的统计特性. 本文首先简要分析了不准确的观测噪声统计特性对卡尔曼滤波性能的影响, 然后利用小波变换可以实时分离信号和噪声的特性, 提出了一种在未知观测噪声条件下的卡尔曼滤波算法, 该算法可以实时跟踪观测噪声的变化, 即实现了对观测噪声方差的实时估计, 从而解决了在未知观测噪声的条件下卡尔曼滤波失效问题. 最后讨论了提出的方法在信息融合中的应用, 仿真结果证明了本文方法的有效性和实用性.

关键词: 卡尔曼滤波; 观测噪声; 发散; 小波

中图分类号: TP277

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112 (2007) 01-0108-04

Kalman Filter with Wavelet-Based Unknown Measurement Noise Estimation and Its Application for Information Fusion

GAO Yu, ZHANG Jian-qiu

(Department of Electronics, Fudan University, Shanghai 200433, China)

Abstract: It is well known that the successful applications of the Kalman filter are dependent on whether the prior knowledge of the statistical characteristics of the measurement noise is known. In this paper, the effects of the inaccuracy of the measurement noise covariance on the filter performance are first analyzed briefly. The feature of the wavelet transform separating a noise signal into the signal and noise parts in real time is combined into Kalman filter. A new method, making the Kalman filter under unknown measurement noise covariance condition valid, is then proposed. The presented method can track the changes of the measurement noise covariance and estimate the covariance in real time. Finally, the applications of the proposed method for the information fusion are discussed. The simulation results verify the effectiveness of the proposed method.

Key words: kalman filter; measurement noise; divergence; wavelet

1 引言

卡尔曼滤波是目前应用最为广泛的状态估计算法. 它基于最小均方误差准则, 在给出线性动态系统状态的最佳线性无偏估计的同时给出状态滤波的精度指标-均方误差阵^[1].

由于卡尔曼滤波是线性最小均方误差估计, 因此, 算法给出的均方误差矩阵 P 是所有线性估计中最小的误差方差阵, 但是在系统的信号模型不准确, 状态噪声和观测噪声的统计特性描述不准确等情况下, 卡尔曼滤波的性能将严重恶化, 甚至出现滤波发散. 文献[2]中, 从数学上详细给出了不准确的信号模型对卡尔曼滤波性能的影响.

为克服滤波发散, 已经发展了许多有效的滤波发散抑制方法或算法^[4~6], 如衰减记忆滤波法, 限定记忆滤波法和自适应

滤波法等. 这些方法的基本点都是首先判断滤波是否发散, 然后充分利用系统新的观测值对估计值或系统模型进行修正. 本文针对观测噪声统计特性描述不准确导致的卡尔曼滤波失效问题, 首先简要分析了不准确的观测噪声对卡尔曼滤波性能的影响, 并采用小波估计出观测噪声标准差, 再进行卡尔曼滤波. 该算法可以跟踪观测噪声的变化, 对观测噪声方差进行实时估计, 从而避免了卡尔曼滤波失效问题. 最后, 对该算法在信息融合中的应用进行了仿真.

2 不准确的观测噪声对滤波器性能的影响

2.1 状态模型和测量模型

假设一个线性动态系统由以下方程描述:

$$x_{k+1} = Fx_k + v_k \quad (1)$$

$$m_k = Hx_k + w_k \quad (2)$$

其中, x_k 为系统在 k 时刻的 $M \times 1$ 维状态向量; F 为由系统结构和特性决定的状态转移矩阵; m_k 为系统在 k 时刻的 $N \times 1$ 维观测信号向量; H 为 k 时刻的 $N \times M$ 维观测矩阵; 过程噪声向量 v_k 和观测噪声向量 w_k 均为相互独立的零均值的高斯白噪声随机序列, 且满足

$$E(v_k) = 0 \quad (3)$$

$$E(v_j v_k^T) = Q_{jk}$$

$$E(w_k) = 0 \quad (4)$$

$$E(w_j w_k^T) = R_{jk}$$

2.2 不准确的观测噪声对卡尔曼滤波性能的影响

卡尔曼滤波算法是建立在系统信号模型的基础上, 并且过程噪声和观测噪声的统计特性是已知的。信号模型的精确性是影响卡尔曼滤波精度、防止发散现象最主要的因素之一。文献[2]中详细分析了式(1)和(2)中 F 、 H 、 v 、 w 不准确对卡尔曼滤波性能的影响, 并给出了严格的数学推导。通常, w 的不准确会导致卡尔曼滤波算法给出的均方误差偏离真实情况, 不能反映状态估计精度。

图 1 中更直观地表明观测噪声方差不准确对滤波性能的影响。仿真中真实信号为幅值是 0.05 的直流信号。在卡尔曼滤波迭代算法中采用的观测噪声标准差为真实观测噪声标准差的 0.1~10 倍。图 1 中横轴表示计算用标准差与真实标准差的倍数关系, 纵轴为方差值; 虚线为采用不准确的观测噪声方差 R_c 进行卡尔曼滤波得到的状态滤波方差 P_c , 实线表示根据方差定义式计算出的实际估计值的方差 P_{true} , 点划线表示采用准确观测噪声标准差进行卡尔曼滤波得到的状态滤波方差 P 。从图 1 可以看出, 在真实标准差附近, 即图 1 中横坐标为 1 处, 三个方差值比较接近, 计算用标准差与真实标准差相差越大, 三个方差值相差越多。因此, 在先验信息不完全的情况下, 采用了与真实值相差较多的观测噪声标准差进行卡尔曼滤波, 得到的状态滤波方差是无法反映状态滤波精度的, 状态滤波结果也是不可靠的。而在实际应用中, 动态系统随时可能受到各种外界干扰, 因此观测噪声的统计特性随时会发生变化, 仅仅依靠有限的先验信息对观测噪声进行描述是不可靠的, 需要一种能够自适应的跟踪观测噪声变化并进行实时估计的算法来解决这一问题。

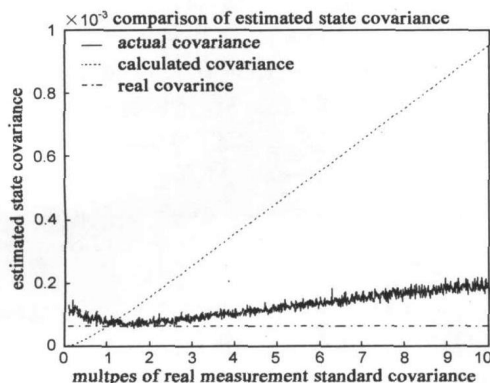


图 1 估计值方差比较

3 基于小波估计观测噪声的卡尔曼滤波算法

小波变换可以分离信号和噪声, 可以用来估计含噪声信号中噪声的标准差[6]。文献[7]通过小波变换估计出观测序列的方差, 并根据估计出的方差讨论了最小均方误差下的测量融合问题。

根据 Weierstrass 逼近定理[8], 任一有界闭区间的连续函数都可以由该区间内的多项式以任意精度一致逼近。因此, 任意观测信号 $m_w(k)$ 在一个观测区间内(注意可以通过减少采样间隔或采样数目来缩短观测区间)总可以由一个低阶多项式或一个分段的低阶多项式来逼近到任意精度, 设该多项式为:

$$m_w(k) = a_0 + a_1 k + \dots + a_M k^M \quad (5)$$

(k) 为小波函数, 并且其尺度变换和时间平移为

$$s, (k) = \frac{1}{\sqrt{s}} \left[\frac{k-s}{s} \right] \quad (6)$$

则含有噪声的观测信号 $m_w(k)$ 的小波变换为:

$$W_{m_w}(s,) = m_w(k) * s, (k) = W_m(s,) + W_w(s,) \quad (7)$$

其中, ($*$) 表示卷积。 $W_m(s,)$ 为小波系数的近似部分, $W_w(s,)$ 为小波系数的细节部分。如果 (k) 的消失矩为 ($> M$), 则 $m_w(k)$ 的小波变换就抑制了信号而保留了噪声分量 w [6]。于是, 式(7)可以写为:

$$W_{m_w}(s,) = W_w(s,) \quad (8)$$

如果信号 $m_w(k)$ 在一个区间内是分段多项式, 选取小波的消失矩为 大于分段多项式中最高多项式的阶, 那么噪声的标准差可以通过小波系数最细节部分绝对值的中值估计出来[9], 即

$$\frac{1}{0.6745} \text{Med} \left(\left| W_{m_w}(s, t_h) \right| \right) \quad (9)$$

其中, 尺度 s 为 0.5, t_h 为 在最细节尺度的离散表示, $0 < h < K/2$, $W_{m_w}(s, t_h)$ 为 $\{m_w(k) \mid k=0, 1, \dots, K\}$ 的 $K/2$ 小波系数, Med 表示序列 $\{ \left| W_{m_w}(s, t_h) \right| \}$ 的中值。

因此, 在观测噪声未知的情况下, 可以首先选择长度为 L 的一段信号, 即相当于一个观测区间, 在这个观测区间的序列上加一个长度为 L 的滑窗 (L 的选择参见文献[7]), 在窗内对观测序列进行小波变换, 再根据式(9)估计出噪声的标准差, 根据这个标准差结合卡尔曼滤波, 进行状态估计, 具体步骤如下:

假设 $k=0$ 时的状态 x_0 和方差 P_0 已知, 选取谐波的消失矩为 大于一个低阶多项式或分段低阶多项式中最高多项式的阶, 据文献[7]取滑窗长度为 L , 即取长度为 L 的观测信号 $m(l)$, ($l=0, 1, 2, \dots, L-1$), 根据式(9)估计噪声的标准差 (σ), 并根据 (σ) 计算观测方差阵 R_0 。则对 $k=0, 1, 2, \dots$ 重复进行以下步骤:

(1) 选定一段长度为 L 的观测信号 $m(k+l)$, ($l=0, 1, 2, \dots, L-1$), 根据式(9)估计噪声的标准差 ($\sigma(k)$), 并根据 ($\sigma(k)$) 计算观测方差阵 R_k 。

(2) 预测:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_k \quad (10)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = \mathbf{F}\mathbf{P}_k\mathbf{F}^T + \mathbf{Q} \quad (11)$$

(3) 更新:

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_{k+1} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_{k+1})^{-1} \quad (12)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{m}_{k+1} - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}) \quad (13)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}) \mathbf{P}_{k+1} \quad (14)$$

从式(10)~(14)可以看出,本文的算法与常用的卡尔曼滤波算法的主要区别就在于式(12)中的观测噪声方差 \mathbf{R}_{k+1} 不是预先根据经验值确定的,而是根据实时观测信号值估计出来的.这就保证了计算用观测噪声方差和实际系统观测噪声方差基本一致,即便实际系统由于受到某种干扰,噪声方差发生了变化,该算法也能准确地跟随观测信号的变化.

4 仿真结果

信息融合是卡尔曼滤波的一个重要应用领域,在进行状态融合时,一个常用的方法是根据卡尔曼滤波的方差对各个传感器给出的状态估计值进行加权.从前面的理论分析可知,在观测噪声标准差不准确的情况下,卡尔曼滤波给出的状态估计方差 \mathbf{P}_e 是无法说明状态估计准确度的,因此根据 \mathbf{P}_e 进行的状态融合不是最优的.

在实际的系统中,各个传感器随时都有可能受到各种外界干扰,导致观测噪声发生变化.本文模拟一个状态缓慢变化的动态系统,状态方程如式(15)所示.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= 1.001x(k) + v(k); \\ y_i(k) &= x_i(k) + w_i(k); \\ i &= 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (15)$$

其中, i 为传感器个数,过程噪声 $v(k)$ 的均值为零,标准差为 0.01;在 $k=0 \sim 300$ s 时,四个传感器的观测噪声标准差分别为 0.01, 0.02, 0.05, 0.2, 在 $k=301 \sim 600$ s 时,由于外界环境变化,四个传感器的观测噪声标准差变为 0.03, 0.02, 0.01, 0.2, 用来估计观测噪声方差的信号长度 $L=50$. 通过先验信息预先设定的观测噪声标准差为 0.01, 0.02, 0.05, 0.2.

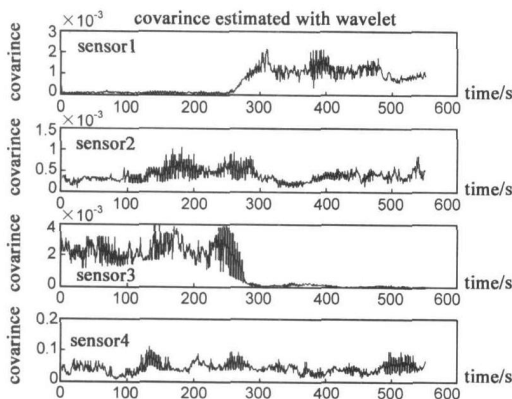


图2 估计出的方差

图2所示为采用小波估计出的四个传感器的观测噪声方差.图3中分别对三种情况进行了仿真,情况一为本文方法,即首先用小波估计观测噪声方差,再进行卡尔曼滤波,最后进行最小均方意义下的状态融合,得到的状态融合方差如点划

线所示;情况二为采用通过先验信息确定的观测噪声方差进行卡尔曼滤波,再进行最小均方意义下的状态融合,得到的状态融合方差如虚线所示;情况三为采用真实的观测噪声方差进行卡尔曼滤波(即经典的卡尔曼滤波),再进行最小均方意义下的状态融合,得到的状态融合方差如实线所示.需要指出的是,情况三是一种理想情况,在实际应用中,由于无法确切地知道观测噪声方差,因此是不可能实现的,在图中仅作参考.从图3中可以看出情况一的结果与情况三的结果基本一致,而情况二的结果虽然在开始与情况三一致,但是当环境变化后,却与情况三的结果出现了较大差别.这是由于本文方法可以很好地实时确定观测噪声方差,因此在此基础上进行的状态估计和融合与理想情况基本一致.

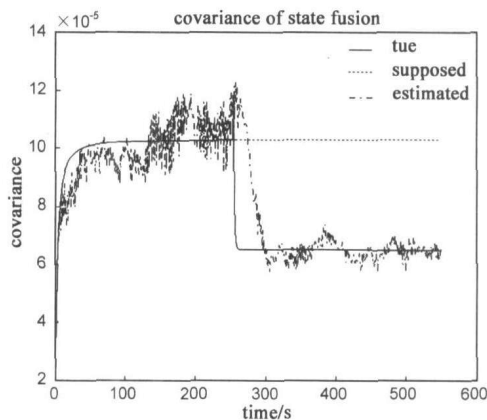


图3 状态融合方差比较

5 结论

不准确的观测噪声统计特性描述往往会导致卡尔曼滤波性能恶化.本文针对这一问题,在分析了不准确的观测噪声统计特性对卡尔曼滤波性能的影响的基础上,采用小波分析的方法实时估计观测序列的噪声标准差,并利用估计观测序列的噪声标准差进行卡尔曼滤波.仿真结果表明本文方法可以实时跟踪观测序列噪声的变化,准确估计出观测噪声标准差,从而避免了因观测噪声不准确而引起的卡尔曼滤波失效.

参考文献:

- [1] Y Bar-Shalom, X Li. Multitarget-Multisensor Tracking: Principles and Techniques [M]. Storrs, CT, YBS Publishing, 1995.
- [2] Fitzgerald RJ. Divergence of the kalman filter [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1971, 16(6): 736-747.
- [3] 邱恺, 黄国荣, 陈天如, 杨亚莉. 卡尔曼滤波过程的稳定性研究 [J]. 系统工程与电子技术, 2005, 27(1): 33-35.
- [4] Pearson J, Goodall R, Eastham M, MacLeod C. Investigation of kalman filter divergence using robust stability techniques [A]. Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control [C]. San Diego, 1997. 4892-4893.
- [5] 库索夫可夫 H T, 章燕申译. 控制系统的最优滤波和辨识方法 [M]. 北京: 国防工业出版社, 1984.
- [6] S Mallat. A Wavelet Tour of Signal Processing [M]. San

Diego, CA :Academic ,1998.

- [7] Lijun Xu, Jian Qiu Zhang, Yong Yan. A Wavelet-based multi-sensor data fusion algorithm[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2004, 53(6): 1539 - 1545.

- [8] Eric W Weisstein. Weierstrass Approximation Theorem. [OL].

<http://mathworld.wolfram.com/>

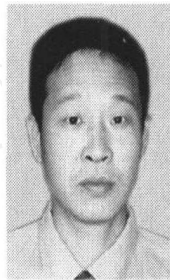
WeierstrassApproximationTheorem. html.

- [9] D Donoho, I Johnstone. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage[J]. Biometrika, 1994, 81(3): 425 - 455.

作者简介:



高 羽 女, 1978 年生于哈尔滨, 2001 年毕业于哈尔滨工业大学电气工程系, 现为复旦大学博士研究生. 主要从事多传感器信号处理及数据融合方面的研究.



张建秋 男, 1962 年生于湖南, 1996 年于哈尔滨工业大学获得博士学位, 现为复旦大学电子工程系教授, 博士生导师, IEEE 高级会员. 主要研究方向: 信息处理理论及其在新型传感器、仪器和测量中的应用. (本文通信作者) E-mail: jqzhang01@fudan.edu.cn