

广义 Chebyshev 最优滤波器设计

苏 涛, 梁昌洪, 谢拥军

(西安电子科技大学电子工程学院, 陕西西安 710071)

摘 要: 本文论证了等波纹广义 Chebyshev 函数滤波器的最优化特性, 提出了由设计指标得到广义 Chebyshev 函数的方法, 并且引入信号流图非常简便的得到了对应网络的拓扑结构, 最终完成滤波器的设计. 本文对具有带外传输零点的滤波器设计具有相当重要的意义.

关键词: 广义 Chebyshev; 滤波器; 最优

中图分类号: TN713. 5 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2003) 12A-2018-03

Optimization Filter Design with General Chebyshev Functions

SU Tao, LIANG Chang-hong, XIE Yong-jun

(School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

Abstract: The optimization characteristic of equal-ripple general Chebyshev functions is described in this paper, and the filter synthesis from design target using these functions is represented. Further more, the introduction of signal flow chart is very helpful in determining the topological structure of the filters. This paper is highly valuable in design of the filters with finite transmission zeros.

Key words: general chebyshev function; filters; optimization characteristic

1 引言

由于频谱日益拥挤, 具有带外有限传输零点的滤波器得到了广泛应用. 准椭圆函数滤波器^[1,2], 即是该类滤波器的代表, 而且具有带内带外均近似等波纹的特性. 但是, 准椭圆函数只能设计对称的滤波器, 而且其传输零点并不是任意的. 文献[3]给出了广义 Chebyshev 滤波器, 其具有任意的零点和带内等波纹特性. 该类滤波器一般通过谐振腔级联, 并交叉耦合的方式实现. 在源与负载只与单腔耦合时, n 个谐振腔只能得到 $n-2$ 个有限传输零点^[1~4], 而在源与负载可以直接耦合时, n 腔可以得到 n 个有限传输零点^[5].

本文对广义 Chebyshev 函数和其滤波器设计, 进行了深入的研究. 节二提出“等波纹广义 Chebyshev 函数最优”的观点, 并予以简单的证明; 节三给出了等波纹广义 Chebyshev 函数滤波器的综合方法, 实现了由设计指标得到该类近似函数; 节四采用信号流图直观地说明了谐振腔间拓扑结构和有限传输零点个数的关系, 据此可以快速地得到滤波器的拓扑结构, 可进一步优化得到耦合矩阵, 完成滤波器实现.

2 等波纹广义 Chebyshev 函数的最优特性

2.1 广义 Chebyshev 函数及其滤波器设计

双口网络的特性可以描述为

$$S_{11}(j\omega) = \frac{F_N(j\omega)}{E_N(j\omega)}, \quad S_{21}(j\omega) = \frac{P_N(j\omega)}{E_N(j\omega)} \quad (1)$$

式中 ω 是实频率, 其复延拓为 $s = j\omega$. 对于 Chebyshev 函数, $C_N(x)$ 是等波纹系数.

根据能量守恒, 有 $S_{11}^2 + S_{21}^2 = 1$, 结合式(1), 得到

$$S_{21}^2(j\omega) = \frac{1}{1 + C_N^2(j\omega)} = \frac{1}{(1 + j C_N(j\omega))(1 - j C_N(j\omega))} \quad (2)$$

式中 $C_N(j\omega) = \frac{F_N(j\omega)}{P_N(j\omega)}$, $C_N(j\omega)$ 称为 N 阶广义 Chebyshev 函数. 其定义为

$$C_N(x) = \cos \left[N \cosh^{-1}(x) \right] \quad (3)$$

上式中 $x_n = \frac{-1/j\omega - 1/n}{1 - 1/n}$, $j = s_n$ 是复平面上第 n 个传输零点的位置. 可以得到广义 Chebyshev 函数的特性: 当 $|x| = 1$ 时, $C_N = 1$; 当 $|x| < 1$ 时, $C_N < 1$; 当 $|x| > 1$ 时, $C_N > 1$. 这些与常规 Chebyshev 函数相同. 实际上, 当所有的 N 个传输零点都为无穷时, 广义 Chebyshev 函数就是传统的 Chebyshev 函数

$$C_N(x) \Big|_{n \rightarrow \infty} = \cosh [N \cosh^{-1}(x)]$$

广义 Chebyshev 函数的优势为: (1) 其 N 个传输零点的任意性 (必须包括两个无穷点), 位于 s 轴上的零点成为了相应函数有限传输零点, 而不在 s 轴上的零点则影响传输的群时延特性; (2) 保持了常规 Chebyshev 函数的带内等波纹特性; (3) 由于零点的任意性, 左右带外特性可以不对称. 图 1 给出了广义 Chebyshev 函数曲线的例子.

广义 Chebyshev 函数的多项式形式, 可以表示为

$$C_N(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sum_{n=1}^N (c_n + d_n) x^n + \sum_{n=1}^N (c_n - d_n) x^{-n}}{\prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{x^2}{x_n^2} \right)} \right] \quad (4)$$

式中, $c_n = -\frac{1}{n}$, $d_n = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^{1/2}$, $= (2^n - 1)^{1/2}$.

进一步推导可以得到广义 Chebyshev 函数的递推公式(文献[3]、[4]分别给出了两种形式), 广义 Chebyshev 函数是由其 N 个极点唯一确定的有理分式.

2.2 带外等波纹广义 Chebyshev 函数的最优性

常规的 Chebyshev 滤波器综合具有“最优特性”, 下面简单证明广义 Chebyshev 函数滤波器同样具有最优特性, 而且比一般 Chebyshev 更全面. 即, 具有带外等波纹特性的广义 Chebyshev 滤波器具有“最优特性”.

证明 假定带外等波纹广义 Chebyshev 函数 f 具有 n 个传输零点, 且都位于 ω 轴上. n 个零点的广义 Chebyshev 滤波器, 其传输函数是分子 $2n$ 阶, 分母 $2(n-2)$ 阶的多项式. 假定存在另外的相同阶数的有理分式 g , 其带外特性比 f 要小, 如图 2 所示. 由于广义

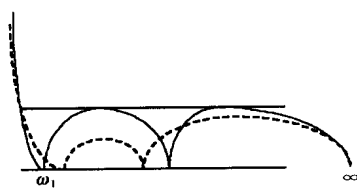


图 2 等波纹带外最优特性(实线是函数 f , 虚线是函数 g)

Chebyshev 函数滤波器本身具有带内等波纹特性, 而现在又假定其带外同样具有等波纹特性, 则两有理分式的交点: 带内为 $2n$ 个, 带外为 $2(n-2)$ 个, 即假定的有理分式与广义 Chebyshev 函数相同.

在上面证明中, 已考虑到传输函数 f, g 都要满足限定的通带和阻带指标, 这样第一个有限传输零点必然相差不大, 而同时又都具有一个无穷极点, 这样就保证了在一侧阻带一前一后有 2 个交点. 设广义 Chebyshev 函数滤波器左侧有 p 个零点, 右侧有 q 个零点 ($p+q=n$), 则 f 与 g 的带外交点数为

$$\begin{cases} 2(k-2)+2, & k=p, q, \quad k \neq 1 \\ 1, & k=1 \end{cases}$$

综合考虑左右两侧(包括一侧只有一个无穷极点的情况), 得到带外交点个数为 $2(n-2)$. 同理可得到带内的情况.

显然的, 得到推论: 带外等波纹的广义 Chebyshev 滤波器, 是所有具有 n 个传输零点的广义 Chebyshev 滤波器中最优的, 具有最小的带外特性. 同时, 当带内带外等波纹幅度一定的时候, 带外等波纹特性的广义 Chebyshev 函数是所有分母 $2n$ 阶, 分子 $2(n-2)$ 阶有理分式中, 过渡带最短的(当广义 Chebyshev 函数退化为常规 Chebyshev 函数时, 就是 Chebyshev 函数的“最优特性”). 这说明了问题的两个方面, 一是过渡带一定, 等波纹广义 Chebyshev 函数滤波器阻带幅度最小; 二是阻带一定, 等波纹广义 Chebyshev 函数滤波器过渡带最短. 所以, 我们称具有带外等波纹特性的广义 Chebyshev 滤波器为“最优”滤波器. 注意, 此时带外可以以不同的等波纹幅度波动, 就是说可以是不对称的, 这一点优于准椭圆函数.

3 最优 Chebyshev 函数综合

上面, 我们讨论了广义 Chebyshev 滤波器设计的最优性, 下面我们说明如何由滤波器带内带外指标, 综合广义 Chebyshev 滤波器. 传统的函数逼近综合, 只需要根据指标确定函数

阶数就可以了, 而 Chebyshev 滤波器设计由于零点的任意性, 导致其特性灵活的同时也就变得难以估计. 首先, 类似前面的证明, $i+1$ 个零点的最优广义 Chebyshev 滤波器带外特性优于 i 个零点的特性(假定带内波纹幅度相同, 根据交点个数, 应用反证法可得). 也就是说, $i+1$ 阶广义 Chebyshev 滤波器比 i 阶特性好; 而所有 i 阶广义 Chebyshev 滤波器中, 具有带外等波纹特性的最好.

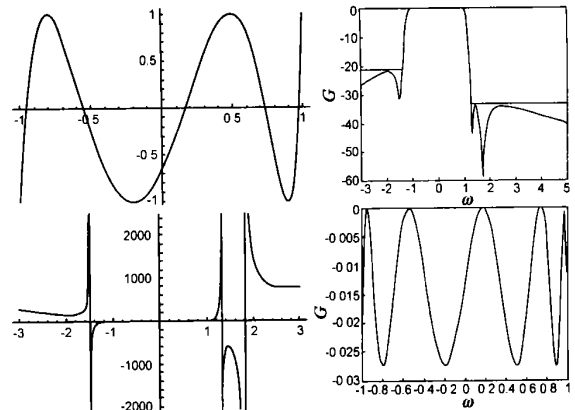


图 1 广义 Chebyshev 函数曲线, 极点分别为 $(-1.5, 1.3217, 1.8082)$, 带内具有等波纹特性, 带外左右可以不对称

图 3 最优滤波器设计曲线, 全频带和带内特性

很容易想到: i 个零点时, 等波纹广义 Chebyshev 传输特性是否满足指标, 如果不能满足指标, $i = i+1$, 增加一个零点, 再重新考察, 直到满足指标. 而各个零点的位置完全可以优化得到, 优化的目标就是保证带外的等波纹特性, 这比直接优化结构参数要简单地多了. 图 3 给出了某一设计实例, 其带内带外均具有等波纹特性, 而且左右不对称.

4 交叉耦合滤波器的实现

前面讨论了广义 Chebyshev 函数最优滤波器的综合, 下面讨论其实现, 就是怎样得到具体的元件值. 具有有限传输零点的滤波器, 一般采用谐振腔交叉耦合的方式实现, 见图 4. 此时, 综合的器件值就是耦合矩阵 $[M]$, 可以采用解析或数值优化的方法得到. 由于耦合矩阵和网络拓扑直接相关, 而目前还没有方法完成任意拓扑结构之间的转换, 所以确定网络拓扑相当重要. 本文下面引入信号流图分析, 得到有限传输零点和信号流图的关系. 如此一来, 可以非常快速地设定能够实现具有有限传输零点的网络拓扑结构, 以此构造耦合矩阵并求解, 都相当方便.

信号流图和线性方程组是等价的, 但从信号流图入手可以得到很多直观的结果. 例如, 四腔交叉耦合的滤波器, 1 和 4 交叉耦合, 方程为

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R + jW & jM_{12} & 0 & jM_{14} \\ jM_{12} & jW & jM_{23} & 0 \\ 0 & 0 & jM_{23} & jW \\ jM_{14} & 0 & jM_{12} & R + jW \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}$$

只考虑本征模情况,系数矩阵可以省略 R 项,无激励

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} jW & jM_{12} & 0 & jM_{14} \\ jM_{12} & jW & jM_{23} & 0 \\ 0 & jM_{23} & jW & jM_{12} \\ jM_{14} & 0 & jM_{12} & jW \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}$$

对应的信号流图如图 5 所示.

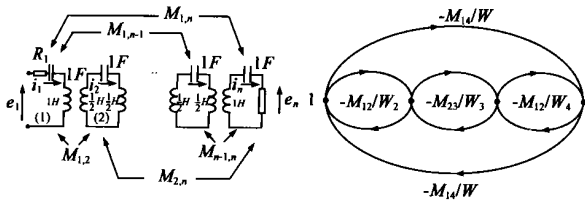


图 4 交叉耦合滤波器

图 5 4 腔交叉耦合信号流图

i_4/i_1 的分子为

$$-M_{12}M_{23}M_{12}/W^3 + (-M_{14}/M)(1 - M_{23}^2/W^2)$$

即: $M_{12}M_{23} - M_{14}W^2 + M_{23}^2M_{14}$

的根是其有限零点.

(1)有限零点和多路耦合有关,如果没有不同的耦合支路就没有有限零点(传统的线性耦合方式);

(2)有限零点和不相关耦合环路有关,就是不接触一阶环、二阶环等等,也就是说传输中可能形成新的环路影响有限零点;

(3)有限零点的个数等于最长路径节点数量与最短路径节点数量之差,最长路径节点数是常数项,最短路径节点数是分子最高次项次数.最长的路径,必然是经过所用耦合腔;其他的路径,最短为 2 点,而且与其不接触环有关.比如,上面的四腔交叉耦合零点个数为 2 个.

三腔交叉耦合^[4],可有一个有限零点,若是图 6 中没有自耦合频偏的话,自由度太少,不能满足任意零点的传输波形.所以不对称响应的交叉耦合实现,一般各谐振腔有自频偏.

源与负载并不只耦合到一个谐振腔^[5],甚至直接耦合,可以得到更多的有限传输零点.此时信号流图中需要把源和负载同样作为节点处理,图 7 中为文献[5]中的 3 腔源/负载多耦合的信号流图,最长路径节点数 5,最短路径极点数 2,共有 3 个有限传输零点.

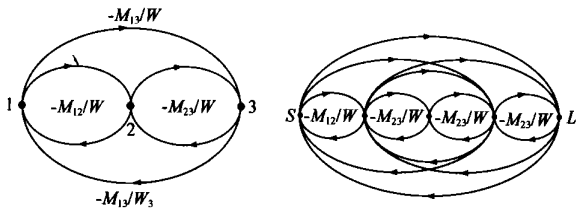


图 6 3 腔交叉耦合信号流图,具有 1 个有限传输零点

图 7 源/负载多耦合的信号流图

根据以上的分析,综合过程中,得到能够满足指标的等波纹广义 Chebyshev 函数,确定有几个有限零点,然后就可以画出满足该要求的信号流图,也就确定了耦合矩阵的形式,而后可通过优化等方法确定矩阵各元素的值.

5 结语

通常有两类问题是最困难的,一是可能性问题(或其反问题,不可能的证明),二是最值问题.本文对具有有限传输零点的滤波器设计进行系统研究,论述了等波纹广义 Chebyshev 函数综合的“最优”问题,并提出怎样由设计指标得到该类函数滤波器的综合方法,最后利用信号流图可以快速得到可实现该函数的网络拓扑,即耦合矩阵形式,进一步完成设计.

同时,需要指出的是近似函数的“最优性”是联系函数综合方法和直接优化方法的有效桥梁.比如,传统的 Butterworth 综合和 Chebyshev 综合可以得到相同的网络结构,但是器件数值不同,此时 Chebyshev 函数具有最优特性.也就是说,网络结构一定,无论器件数值如何变化,能够实现的性能极限就是 Chebyshev 函数.而广义 Chebyshev 函数的最优性质说明,具有有限传输零点的网络性能极限,此时带内带外都是等波纹特性,而且可以实现非对称响应.

参考文献:

[1] A E Atia, A E Williams, R W Newcomb. Narrow-band multiple-coupled cavity synthesis[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1974, Cas-21 (5) : 649 - 655.

[2] Albert E Williams. A four-cavity elliptic waveguide filter [J]. IEEE MITT, MIT-18, 1970 (12) : 1109 - 1114.

[3] Richard J Cameron. General coupling matrix synthesis methods for chebyshev filtering functions[J]. IEEE MITT, 1999, 47 (4) : 433 - 442.

[4] A Garc ía-Lamp éez, M Salazar-Palma, M Padilla, I Hidalgo-Carpintero. Software tool for the design of narrow band band-pass filters[M]. USA: IEEE, 2001.

[5] Smain Amari, Uwe Rosenberg, Jens Bornemann. Adaptive synthesis and design of resonator filters with source/load-multiresonator coupling[J]. IEEE MITT, 2002, 50 (8) : 1969 - 1978.

作者简介:

苏 涛 男,1974 年 8 月生于山东济南,现为西安电子科技大学电磁场与微波技术专业博士研究生,主要从事电磁场数值计算、电磁优化设计、复杂目标建模等方面的研究工作.

梁昌洪 男,1943 年 12 月生于上海,教授,博士生导师,曾任西安电子科技大学校长,中国电子学会会士、IEEE Senior member,研究方向包括计算场论、计算微波、微波网络理论、电磁散射与逆散射和电磁兼容等方面.