

# 多级弯曲磁微梁执行器力磁耦合宏模型

方玉明<sup>1,2</sup>, 黄庆安<sup>1</sup>, 李伟华<sup>1</sup>

(1. 东南大学 MEMS 教育部重点实验室, 江苏南京 210096; 2. 南京邮电学院信息工程系, 江苏南京 210003)

**摘要:** 本文以多级弯曲磁微梁执行器为研究对象, 先采用梁的模式函数线性组合来逼近梁的变形曲线, 再将求模态磁场力的积分项分段求积, 最后利用磁路定律, 建立了考虑力-磁耦合的非线性方程组, 克服了以往的模型不能考虑力-磁耦合的缺点. 方程组的复杂程度(阶数)与所取的模态阶数相关. 计算结果同实验数据对比表明, 模型有足够的精度, 可以作为宏模型使用.

**关键词:** 多级曲折磁芯微梁执行器; 力-磁耦合; 宏模型; 微机械

**中图分类号:** TN402; TN405 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2003) 12A-2194-03

## A Mechanics-Magnetic Coupling Macromodel for a Magnetic Microactuator with a Multilevel Meander

FANG Yu-ming<sup>1,2</sup>, HUANG Qing-an<sup>1</sup>, LI Wei-hua<sup>1</sup>

(1. Key Laboratory of MEMS of Ministry of Education, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 210096, China;

2. Department of Information engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunication, Nanjing, Jiangsu 210003, China)

**Abstract:** A mechanics-magnetic coupling macromodel for a magnetic microactuator with a Multilevel Meander is presented, in which the deformation curve of a microbeam is approximated by linear combination of the cantilever-beam's modal function. The integration for magnetic force is calculated by dividing the microbeam into several intervals, and the nonlinear equation set has been developed based on the magnetic circuit principle. The complexity of the macromodel depends on the selection of modal number. In comparison with previous conventional models, this macromodel accounts for the coupling between the beam deflection and magnetic force. The macromodel in this paper is validated by comparing its results with experimental results available in some literatures.

**Key words:** magnetic microactuator with a multilevel meander; force-magnetic coupling; mems; macromodel; cantilever beam

## 1 引言

磁驱动微执行器作为微执行器中的重要一种, 具有响应速度快、作用力大、驱动电压低等优点, 有着广阔的应用前景. 因此, 尽管磁微执行器在制造工艺等方面存在困难, 但它的研究仍然得到人们的格外重视. 近年来, 人们提出了多种磁微执行器<sup>[1-6]</sup>. 其中, Ahn 提出的多级弯曲磁芯微梁执行器的制造工艺与 CMOS 工艺兼容<sup>[4,5]</sup>, 并且具有高的磁通密度、完全闭合的磁路、高载流能力以及低的制造成本, 具有良好的应用前景. 由于多级弯曲磁微梁执行器中的磁场力与微梁的弹性变形相耦合, 是典型的与弹性变形相关的非线性力, 所以磁微梁执行器的方程是几何非线性的, 这类方程的求解只能采用复杂的迭代法<sup>[7-9]</sup>: 先在结构不变形的情况下计算磁场力, 再计算相应的结构变形量, 然后计算变形后结构的磁场力, 再计算相应的结构变形量, 直到结构变形量不再增加(达到平衡). 为了简化计算, Ahn 提出了忽略弹性变形-磁耦合的理论计算模型<sup>[4]</sup>、改进模型<sup>[6]</sup>及有限元模型<sup>[5,7]</sup>, 这些模型将梁的弹性变

形与磁场力分开计算. 在梁的弹性变形量与磁隙相比很小的情况下, 有良好的近似精度<sup>[4]</sup>. 但当梁的弹性变形量与磁隙相比, 不可忽略时, 采用这些计算模型显然不合适, 而相对大的弹性变形量恰是磁微执行器的关键指标之一.

针对多级弯曲磁微梁执行器, 本文提出一个考虑弹性变形-磁耦合的有足够精度的、且相对简单的宏模型. 采用梁的模式函数线性组合来逼近梁的变形曲线, 将求模态磁场力的积分项分段求积, 并利用磁路定律, 建立了考虑弹性变形-磁耦合的非线性方程组. 方程组的复杂程度(阶数)由所取的模态阶数决定. 计算结果同文献[4]中的实验数据对比表明, 当只用第一阶模态函数时(方程阶数为一), 模型就已具有相当的精度; 当用前二阶模态函数时(方程阶数为二), 模型有足够的精度, 可以作为宏模型使用.

## 2 微梁执行器力-磁耦合模型

图 1 是多级弯曲磁微梁执行器的结构示意图<sup>[4]</sup>. 图中, 磁芯的一部分作为感应部分制作在硅基底上, 磁芯的另一部分

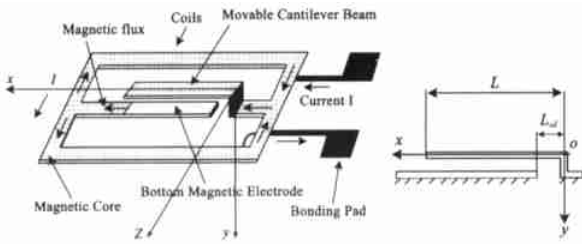


图 1 多级弯曲磁微梁执行器结构示意图 图 2 磁微梁执行器力学模型

则作为执行器的执行部分,其力学模型是一等截面悬臂梁,见图 2 上下极板重叠部分长度为  $L-L_d$ 。当线圈通上电流时,悬臂梁(上极板)在磁场力作用下发生弯曲。不考虑边缘效应,如图 1 建立坐标系,则在磁场力作用下,长度为  $L$  的等截面悬臂梁的运动方程可以写为

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f(x, y, t) \quad (1)$$

式中,  $E$  为弹性模量,  $I$  为梁的截面惯性矩,  $\rho$  为梁的单位长度密度,  $f(x, y, t)$  为作用于梁的磁场分布力,它不仅沿梁的长度方向( $x$  向)分布而且还与梁的弹性变形量  $y$  有关。采用模态分析法求解,取前  $N$  阶模态,其解可以写为

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \quad (2)$$

本文考虑静力问题,则方程(1)、(2)可以简化为

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = f(x, y) \quad (3)$$

$$y(x) = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x) \quad (4)$$

其实质是用前  $N$  阶模态函数的线性组合来逼近梁受磁场力时的变形曲线,  $N$  个系数  $c_i$  是待求解未知量。对几何形状简单规则、边界条件简单的物体,其模态函数有解析式。对几何形状、边界条件复杂的物体可以先用有限元处理,获得数值形式的模态函数。本文中,悬臂梁的模态函数取为<sup>[10]</sup>

$$\phi_i(x) = \cos\beta_i x - \text{ch}\beta_i x + \xi_i \cdot (\sin\beta_i x - \text{sh}\beta_i x)$$

式中  $i = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\xi_i = -\frac{\cos\beta_i L + \text{ch}\beta_i L}{\sin\beta_i L - \text{sh}\beta_i L}$ ,  $\beta_1 L = 1.875, 4.694,$

$7.855, (i = 1, 2, 3), \beta_i L \approx \frac{2i-1}{2}\pi, (i = 4, 5, 6, \dots)$

将式(4)代入(3),利用模态函数的正交性<sup>[10]</sup>,并考虑到在梁的  $x$  方向  $0-L_d$  处无磁场力作用,可以得到如下  $N$  个方程组成的方程组

$$c_i \cdot k_i = \int_0^{L_d} \phi_i(x) f(x, y(x)) dx = \int_{L_d}^L \phi_i(x) f(x, y(x)) dx, \quad i = 1, \dots, N \quad (5)$$

式中,  $k_i$  是第  $i$  阶模态刚度,  $k_i = EI \int_0^L \phi_i(x) \frac{\partial^4 \phi_i(x)}{\partial x^4} dx$ 。为了计算式(5)右边的积分项(模态磁场力),将梁在长度方向磁场力作用区间  $[L_d, L]$  内做  $M$  等分,分段长度  $h = L/M$ ,分段点  $x$  向坐标分别为:  $x_0 = L_d, x_1 = L_d + \frac{L-L_d}{M}, x_2 = L_d + 2 \cdot \frac{L-L_d}{M},$

$\dots, x_M = L$ 。将每个分段内的梁视为与  $x$  轴平行,磁场力在每个分段内分别视为均匀分布,相应的弹性变形量( $y$  方向位移)由两个分段点的弹性变形量做线性插值得到,则式(5)写为

$$c_i \cdot k_i = \sum_{j=1}^M \phi_i\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right) \cdot f\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}, \frac{y(x_{j-1}) + y(x_j)}{2}\right) h, \quad i = 1, \dots, N \quad (6)$$

$$\text{式中 } \frac{y(x_{j-1}) + y(x_j)}{2} = \frac{\sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x_{j-1}) + \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x_j)}{2}$$

现在计算磁场力。磁路中的总能量为<sup>[5-9]</sup>

$$W_{Mag} = \frac{n^2 I_A^2}{2(R_{core} + R_{gp})} \quad (7)$$

式中  $n$  为线圈匝数,  $I_A^2$  为电流强度。磁路中磁芯的磁阻  $R_{core} = \frac{l_{core}}{\mu A_c}$ ,  $l_{core}$  为磁芯长度,  $A_c$  为磁芯截面积,  $\mu$  为磁芯磁导率,极板间磁阻为  $R_{gp}$ 。由于极板(梁)在长度方向被分为  $M$  段,每个分段内的梁视为与  $x$  轴平行,所以极板可以看作由  $M$  个小极板构成。忽略边缘效应,对于第  $j$  个小极板,根据磁路定律<sup>[11]</sup>可以得到其磁阻为

$$R_j(c_1, c_2, \dots, c_N) = M \frac{g - [y(x_{j-1}) + y(x_j)]/2}{\mu_0 A_g} = \frac{Mg}{\mu_0 A_g} - M \frac{\sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x_{j-1}) + \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x_j)}{2\mu_0 A_g} \quad (8)$$

式中  $A_g = w \cdot (L - L_d)$  为上下极板重合面积,  $w$  为极板宽度,则  $M$  个小极板磁阻并联构成的总磁阻就是

$$R_{gp} = 1 \setminus \sum_{j=1}^M \frac{1}{R_j} \quad (9)$$

根据能量与作用力之间的关系<sup>[5]</sup>可以得到作用于第  $j$  个小极板的磁场力为

$$f\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}, \frac{y(x_{j-1}) + y(x_j)}{2}\right) h = \frac{\partial W_{Mag}}{\partial R_{gp}} \frac{\partial R_{gp}}{\partial \left(\frac{y(x_{j-1}) + y(x_j)}{2}\right)} = \frac{n^2 I_A^2 R_{gp}^2}{2(R_{core} + R_{gp})^2 \mu_0 A_g R_j^2} M \quad (10)$$

$R_j, R_{gp}$  是  $N$  个系数  $c_i$  的函数,将式(10)代入式(6)就得到了关于这  $N$  个系数  $c_i$  的  $N$  阶非线性方程组

$$c_i \cdot k_i = I_A^2 \cdot F_i(c_1, c_2, \dots, c_N), \quad i = 1, \dots, N \quad (11)$$

式中

$$F_i(c_1, c_2, \dots, c_N) = \frac{M n^2 R_{gp}^2}{2\mu_0 A_g (R_{core} + R_{gp})^2} \left( \sum_{j=1}^M \frac{\phi_i\left(\frac{x_{j-1} + x_j}{2}\right)}{R_j} \right)$$

求解方程组式(11),可以得到  $c_1, c_2, \dots, c_N$ 。可以看出,对应于不同的电流强度  $I_A^2$ ,将求解出不同的  $N$  个系数  $c_i$ ,将它们带入式(4)可以得到悬臂梁的挠度方程(挠度与电流的关系)

$$y(x) = \sum_{i=1}^N c_i \phi_i(x) = I_A^2 \cdot \left[ \sum_{i=1}^N \frac{F_i(c_1, c_2, \dots, c_N)}{k_i} \phi_i(x) \right] \quad (12)$$

利用式(8)、式(9)、式(10)可以得到磁场合力与电流的关系

$$P = I_A^2 \cdot \left[ \sum_{j=1}^M \frac{n^2 R_{gp}^2}{2(R_{core} + R_{gp})^2} \mu_0 A_g R_j^2(c_1, c_2, \dots, c_N) \right] \quad (13)$$

文献[4]得出的悬臂梁挠度、磁场力与电流强度  $I_A$  关系的结

论是: 悬臂梁的挠度与电流强度  $I_A^2$  的平方成正比, 磁场合力  $P$  也与电流强度  $I_A^2$  的平方成正比. 但由于式(12)、(13)中, 系数  $c_1, c_2, \dots, c_N$  由电流强度  $I_A^2$  决定, 所以文献[4]的结论是在不考虑耦合情况下才成立的. 只有当梁挠度非常小, 才近似有  $y(x_0) = y(x_1) = \dots y(x_{M-1}) = y(x_M) = \hat{y}$  成立时, 文献[4]的结论才成立.

### 3 计算结果及讨论

为了检验本文计算模型的精度, 采用文献[4]中的多层弯曲磁微梁执行器参数, 见表1. 用电流强度  $I_A^2$  作为变量, 按式(11)求解系数  $c_i$ , 再按式(12)令  $x = L$  计算悬臂梁端点的弹性变形量. 以文献[4]中的悬臂梁端点的弹性变形量实验测量结果为准, 将本文的计算结果与其对比.

表1 多层弯曲磁微梁执行器参数

参数(单位)	数值
极板间距( $g/\mu\text{m}$ )	10
梁宽度( $w/\mu\text{m}$ )	25
梁厚度( $t/\mu\text{m}$ )	2.5
梁长度( $L/\mu\text{m}$ )	780
极板重叠长度( $L - L_{od}$ )/ $\mu\text{m}$	760
梁弹性模量 $E/\text{Pa}$	$2.06 \times 10^8$
线圈匝数 $n$	17
磁心长度 $l_{\text{core}}/\mu\text{m}$	3200
真空磁导率 $\mu_0 \text{H/m}$	$4\pi \times 10^{-7}$
磁心相对磁导率 $\mu_r$	500

图3是计算结果与实验测量结果的对比图. 图中, 细实线是实验测量结果; 细单点划线是梁的模式数  $N$  取为 1、积分分段数目  $M$  取为 3 时的计算结果; 细双点划线是梁的模式数  $N$  取为 1、积分分段数目  $M$  取为 5 时的计算结果; 粗虚线则是

模式数  $N$  取为 2、积分分段数目  $M$  取为 5 时的计算结果. 图中可见, 当积分分段数目  $M$  取得越大, 模式数  $N$  取得越多, 计算结果越精确. 并且当电流强度  $I_A$  较小时, 模式数  $N$  和积分分段数目  $M$  对计算结果影响不大. 这是由于电流强度  $I_A$  较小时, 磁场力较小, 梁的变形也很小, 非线性因素不显著, 所以模式数  $N$ 、积分分段数目  $M$  对计算精度影响不大. 当电流强度  $I_A$  大于 0.6A 时, 实验装置的磁路开始饱和<sup>[4]</sup>, 计算误差开始增大.

### 4 结论

本文以多级弯曲磁微梁执行器为研究对象, 采用梁的模式函数线性组合来逼近梁的变形曲线, 将求模式磁场力的积分分段求积, 并利用磁路定律, 建立了考虑弹性变形-磁耦

合的非线性方程组, 克服了以往的模型不能考虑弹性变形-磁耦合的缺点. 方程组的复杂程度(阶数)由所取的模态阶数决定. 计算结果同已有的实验数据对比表明, 当只用第一阶模态函数时(方程阶数为 1), 模型就已具有相当的精度; 当用前二阶模态函数时(方程阶数为 2), 模型有足够的精度, 可以作为宏模型使用.

### 参考文献:

- [1] 朱珂, 黄庆安. 磁微执行器的原理与应用 [J]. 测控技术, 2000, 19(3): 1-5.
- [2] J W Judy, R S Muller. Magnetic microactuator of polysilicon flexure structures [J]. Journal of Microelectromechanical Systems, 1995, 4(4): 162-169.
- [3] L K Lagure, O Brand. Magnetic microactuators based on polymer magnets [J]. Journal of Microelectromechanical Systems, 1999, 8(1): 2-9.
- [4] Chong H Ahn, Mark G Allen. A fully integrated surface micromachined magnetic microactuator with a multilevel meander magnetic core [J]. Journal of Microelectromechanical Systems, 1993, 2(1): 15-22.
- [5] Z Nami, C H Ahn, M G Allen. An energy-based design criterion for magnetic microactuators [J]. J Micromech, Microeng, 1996, 6(3): 337-344.
- [6] 朱珂, 黄庆安. 多层弯曲磁微执行器的宏模型 [J]. 固体电子学研究及进展, 2002, 22(3): 344-347.
- [7] 朱珂, 黄庆安. 多层弯曲磁微执行器的有限元分析 [J]. 固体电子学研究及进展, 2003, 23(3): 339-343.
- [8] 王勖成, 邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1997.
- [9] Gang Li, N R Aluru. A lagrangian approach for electrostatic analysis of deformable conductors [J]. Journal of Microelectromechanical Systems, 2002, 11(3): 245-254.
- [10] 刘延柱, 陈文良. 振动力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.
- [11] 高振华. 电工技术基础 [M]. 北京: 电子工业出版社, 1988.

### 作者简介:



王玉明 女, 1975年2月生于江苏省, 东南大学MEMS教育部重点实验室博士研究生, 南京邮电学院信息工程系讲师, 研究方向为: 微电子学及MEMS.



黄庆安 男, 1963年生于河南洛阳, 博士, MEMS教育部重点实验室主任, 教授, 博士生导师, 研究方向为: 微电子学及MEMS系统与器件, 出版专著1部《硅微机械加工技术》, 科学出版社1996, 发表SCI/EI论文70余篇, 中国发明专利2项, 教育部自然科学一等奖1项, 现任IEEE Senior Member, JAP, APL, JMMS 和 JMM 审稿人, 国家“863”计划MEMS重大专项总体组专家, 国家杰出青年基金获得者.