

基于双区域增强体-面积分方程的 有损互连结构的低频分析

张黎, 童美松*

(同济大学电子与信息工程学院, 上海 201804)

摘要: 在实际应用中互连结构的导体是有损耗的, 在低频时其趋肤深度会很大, 电流会渗入导体内部并覆盖整个导体横截面, 这时传统上采用完全电导体 (Perfect Electric Conductor, PEC) 近似或采用表面阻抗计入损耗的单一区域形式的积分方程可能不再有效, 因此在积分方程法中需要采用双区域积分方程形式来描述. 在低频时电场积分方程 (Electric Field Integral Equation, EFIE) 容易出现崩溃现象, 为此人们提出了采用增强电场积分方程 (Augmented Electric Field Integral Equations, AEFIEs) 来解决单一导体或介质结构中的低频崩溃问题. 文章将有损导体视为可穿透的介质物体, 提出了采用双区域增强混合场积分方程 (Augmented Hybrid Field Integral Equations, AHFIEs) 来解决有损导体互连结构的低频崩溃问题. 混合场积分方程 (Hybrid Field Integral Equations, HFIEs) 由描述导体外部的 EFIE 和描述导体内部的磁场积分方程 (Magnetic Field Integral Equation, MFIE) 组成. 由于磁荷密度出现在 HFIEs 的 \mathcal{L} 算子中, 文章将磁荷密度作为新的独立未知函数并引入磁流密度连续性方程作为附加约束方程描述导体部分, 对互连结构中任意可穿透的介质部分则采用体积分方程 (Volume Integral Equations, VIEs) 描述, 将 2 类方程通过场耦合结合起来便建立了整个结构的双区域增强体-面积分方程 (Augmented Volume-Surface Integral Equations, AVSIEs). 基于 AEFIEs 的传统方法只能求解包含 PEC 和各向同性及均匀介质衬底的封装结构, 而文章提出的基于 AVSIEs 的方法可以求解包含有损耗的导体和任意性质的介质衬底的封装结构, 因而大大增强了求解此类问题的能力. AVSIEs 采用矩量法求解, 其中 RWG (Rao-Wilton-Glisson) 基函数用来表示增强混合场积分方程 (AHFIEs) 中的表面电流密度和表面磁流密度, 而 SWG (Schaubert-Wilton-Glisson) 基函数则用来表示体积分方程 (VIEs) 中的体电流密度或体磁流密度, 脉冲基函数用来表示 AHFIEs 中的电荷密度和磁荷密度. 文章通过数值算例验证了提出方法的有效性和优越性.

关键词: 增强体-面积分方程; 有损导体; 互连结构; 低频崩溃; 双区域

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 62071331); 上海市科技委员会 (No. 21500714400)

中图分类号: TN4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2025)06-1874-11

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20240834

Low-Frequency Analysis of Lossy Interconnect Structures Based on Two-Region Augmented Volume-Surface Integral Equations

ZHANG Li, TONG Mei-song*

(College of Electronic and Information Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China)

Abstract: Real conductors of interconnect structures are lossy and their skin depth becomes large at low frequencies. The traditional one-region formation with the approximation of perfect electric conductor (PEC) or surface impedances may not be valid anymore, and two-region integral equation formations are needed in the integral equation approach. Also, the electric field integral equation (EFIE) tend to break down at low frequencies and augmented electric field integral equations (AEFIEs) have been proposed to remedy the problem. In this work, we treat lossy conductors as penetrable objects and propose two-region augmented hybrid field integral equations (AHFIEs) for low-frequency analysis. The hybrid field integral equations (HFIEs) consist of the EFIE of describing the exterior of a conductor and the magnetic field integral equation (MFIE) of describing its interior. Since the magnetic current density appears in the \mathcal{L} operator in the HFIEs, we select the magnetic charge density as a new unknown function to be solved and introduce the continuity equation of magnetic current

density as an extra equation. By incorporating the volume integral equations (VIEs) of describing the substrate with arbitrary penetrable media in the interconnect structures, the two-region augmented volume-surface integral equations (AVSIEs) are formulated for entire structures. The traditional method based on the AEFIEs can only be used for solving the problems including PEC interconnects and isotropic and homogeneous substrates while the proposed method based on the AVSIEs can be applied to solve the problems with arbitrary materials so the capability of solving problems has been significantly enhanced. The AVSIEs are solved by the method of moments (MoM) where the Rao-Wilton-Glisson (RWG) and Schaubert-Wilton-Glisson (SWG) basis functions are used to represent the surface current densities of AHFIEs and volume current densities of VIEs, respectively, while a pulse basis function is employed to represent the charge densities of AHFIEs. Numerical examples are presented to illustrate the approach and good results have been obtained.

Key words: augmented volume-surface integral equations (AVSIEs); lossy conductor; interconnect structure; low-frequency breakdown; two-region

Foundation Item(s): National Natural Science Foundation of China (No.62071331); Shanghai Science and Technology Commission (No.21500714400)

1 引言

精确的电磁建模和分析对于微电子器件和系统中的互连及封装结构的优化设计不可或缺. 这个问题可以用积分方程来描述, 但想要得到精确解依然具有挑战性^[1]. 这是因为这些结构具有几何多尺度、材料多成分的特点, 即它包括导电介质和不同的非导电介质^[2]. 几何多尺度表示结构中某个位置的结构尺寸比其他位置的尺寸小很多, 因此在几何离散化时必然需要极其不均匀的网格来进行剖分. 材料多成分时也需要不同的网格对材料进行细致剖分, 所以在不同尺寸下完美融合网格具有挑战性^[3]. 上述特点使一些数值方法的几何离散化变得困难, 因为一致性网格在一些数值方法中如传统的矩量法^[4]是被需要的, 传统的矩量法包含 RWG (Rao-Wilton-Glisson) 基函数^[5], 而且由于矩阵元素严重不平衡易导致系统矩阵病态^[6].

还有来自宽带或全波分析要求的挑战, 其中低频分析也是一个瓶颈^[7-9]. 此外, 在互连和封装结构的实际应用中导体通常是有损耗的, 精确的电磁波分析应考虑其有限电导率^[10,11]. 且在低频时, 趋肤深度会非常大, 电流密度可以渗透导电互连结构和地的整个内部, 所以此时传统模型中的理想 PEC (Perfect Electric Conductor) 或阻抗边界条件近似不再适用^[12-14]. 由于有损耗导体具有完全可穿透性, 为了精确建模, 应将其视为类电介质. 在这种情况下就可采用电介质的双区域面积分方程 (Surface Integral Equations, SIEs)^[15]. SIEs 已经广泛应用于有损耗导体的建模^[16-21], 但本文将采用不同的方法对其进行低频分析.

介质双区域面积分方程 (SIEs) 包括电场积分方程 (Electric Field Integral Equations, EFIEs)、磁场积分方程 (Magnetic Field Integral Equations, MFIEs) 或它们的组合, 如组合场积分方程 (Combined-Field Integral Equations, CFIEs)、Poggio-Miller-Chang-Harrington-Wu-Tsai (PMCHWT) 方程、Müller 方程^[1]. 由于 MFIEs 和 CFIEs

需要激发磁场, 而在互连和封装问题中很难获得磁场, 因此一般不使用它们, 而倾向于用 EFIEs 来描述有损耗导体^[15].

EFIEs 有低频崩溃现象, 这是由于矢量位和标量位之间的严重不平衡引起的. 实际上, 包括 \mathcal{L} 算子在外的 SIEs 都有低频崩溃问题. 为了弥补这一缺陷, 对理想导体目标^[22,23]首次提出了采用 AEFIE, 近些年大量学者也对此进行了广泛的研究^[24-31]. 随后, 扩展的电介质 AEFIEs 也被提出^[29]. 理想导体目标的 AEFIE 或电介质目标的 AEFIEs 把电荷密度作为一个新的待求函数, 引入电流密度连续性方程作为一个额外方程, 使用合适的频率缩放联合求解电流密度和电荷密度. 通过这种方法, 电流和电荷密度可以在任意低频率下精确求解且不会出现崩溃. 但是在矩量法 (Method of Moments, MoM) 中电流密度用 RWG 基函数表示时, 电介质目标的 AEFIEs 需要用对偶基函数^[28]来扩展磁流密度, 使阻抗矩阵呈现良态. 由于电介质目标 EFIEs 中 2 个方程的均匀性, 通常需要 2 个空间正交基函数来表示 2 个电流密度^[32-34]. 否则, 如果使用 RWG 基函数扩展这 2 个电流密度, 则应使用 $\hat{n} \times \text{RWG}$ 作为测试函数的特殊测试方法. 对偶基函数在结构上十分复杂, 实现起来很不方便.

本文提出了不同双区域 SIEs 或 HFIEs 来描述有损耗导体, 并扩展得到对低频分析的增强版 AHFIEs. 本文工作不同于我们之前的研究工作, 此前研究工作没有使用 HFIEs, 也没考虑低频情况^[35,36]. 文献^[35]没有考虑导体损耗, 文献^[36]用对偶基函数表示磁流密度, 这也是与本文的不同之处. 对于双区域有损耗导体目标, HFIEs 由外部区域的 EFIE 和内部区域的 MFIE 组成, 文献^[18]首次提出这种组合形式, 既可以避免磁场的激发, 又可以避免使用复杂的对偶基函数^[37,38]. RWG 基函数既可以表示电流密度, 又可以表示磁密度, 由于外区域方程和内区域方程的非均匀性, 所得到的系统

矩阵仍然保持良态. 然而, MFIE 内部区域的 \mathcal{L} 算子会对磁流密度产生影响, 其增强情况是以前从未考虑过的. 本文需要将磁荷密度作为一个新的未知函数来求解, 引入了磁流密度的连续性方程作为增强情况下的附加方程.

另外, 因为互连和封装结构有材料多样性, 如非均匀和各向异性材料的存在. 本文采用 VIEs 来描述它们, 使 VIEs 的推广适用于任何类型的可穿透材料. 结合 AHFIEs 和 VIEs, 形成 AVSIEs, 能解决多样性材料低频情况下问题.

VIEs 包括 \mathcal{L} 和 \mathcal{K} 算子, \mathcal{L} 算子部分也有低频崩溃问题. 但是, VIEs 对低频不敏感, 因为它们属于第二类积分方程(导致良态的矩阵方程). 同时, 导体表面的电流密度比介质基板内部的电流密度更占主导. 为了减少未知数的数量和复杂性, 本文选择不进行增强, 但如果需要也可以很容易地对其进行增强. AVSIEs 可以用 MoM 来求解, 其中 RWG 基函数用来扩展 AHFIE 中的电流密度和磁电流密度, 同时采用 SWG (Schaubert-Wilton-Glisson) 基函数^[39]来表示 VIEs 中的电通量密度和磁通量密度. 此外, AHFIEs 中的电荷密度和磁荷密度用脉冲基函数表示^[40]. 这些基函数也被用来作为测试函数对 AVSIEs 进行交叉测试, 这样就可以得到一个条件良好的系统矩阵^[41]. 本文提出了几个数值例子来证明所提出的方法, 验证了该方法的良好性能.

需要注意的是, 相比基于 AEFIEs 的传统方法, 本文提出的方法在计算成本上有一定的增加(因为方程更复杂), 但它去除了对材料性质的限制, 可以适用于包含任意性质材料的封装结构, 因而大大增强了对问题的适应性和求解复杂问题的能力. 另外, 本文假定结构中的材料电性能参数或本征参数(电导率、介电常数、磁导率)固定不变, 若高温或大电流引起本征参数随时间变化, 则需要采用电磁-热耦合多物理场控制方程来描述并采用对电磁方程与热力学方程交替迭代求解的方法来求解联合控制方程, 我们将在未来工作中考虑这样的情况. 如果材料的本征参数不随温度的变化而变化或变化很小, 则我们提出的方法将保持有效且精确.

2 常规积分方程

如图 1 所示的互连和封装结构, 结构包括导体互连线、地和任意材料的非导电基板. 假定导体有损耗, 它在低频时的趋肤深度很大, 因为趋肤深度与频率呈以下近似关系^[1,2], 如式(1)所示:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (1)$$

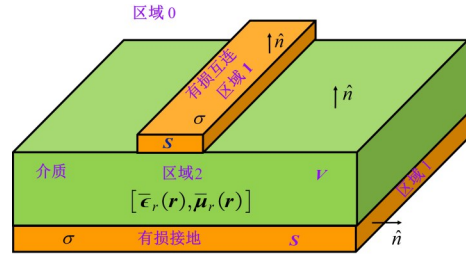


图1 互连和封装结构:含导体互连线、地和任意材料的非导电基板

其中, δ 是趋肤深度, ω 是角频率, μ 是磁导率, σ 是电导率. 在低频时, 本文把这个有损导体作为双区域的类介电材料物体来处理, 将导体内部标记为区域 1, 介质基板内部标记为区域 2, 周围介质(自由空间)标记为区域 0. 使用 EFIE 来描述导体外部问题, 而使用 MFIE 来描述导体内部问题, 相关方程可表示如下:

$$\hat{\mathbf{n}} \times [\mathcal{L}_0^S(\mathbf{J}_S) + \mathcal{K}_0^S(\mathbf{M}_S)] = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{\text{ex}}, \mathbf{r} \in S \quad (2)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times [\mathcal{L}_1^S(\mathbf{M}_S) + \mathcal{K}_1^S(\mathbf{J}_S)] = 0, \mathbf{r} \in S \quad (3)$$

其中, $\hat{\mathbf{n}}$ 是导体表面 S 的单位法向量; 根据等效原理, \mathbf{J}_S 和 \mathbf{M}_S 分别为定义在 S 上的等效电流密度和等效磁流密度^[1]; “ $\hat{\mathbf{n}} \times$ ” 表示得到场的切向分量, 可以用 $\hat{\mathbf{t}}$ 代替, 这里 $\hat{\mathbf{t}}$ 是切线向量, 类似 MoM 中的 RWG 测试函数. 此外, \mathbf{E}^{ex} 是一个激发的电场, 它通常是由 δ 间隙源产生的; 上标 S 表示算子属于 SIEs, 它们实际上是导体的 HFIEs. 另外, 上式中算子 \mathcal{L} 和 \mathcal{K} 定义为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_j^S[\mathbf{A}(\mathbf{r}')] &= t_j \int_S \bar{\mathbf{G}}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}') dS' \\ &= t_j \left[\int_S \mathbf{g}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}') dS' \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{k_j^2} \int_S \nabla \mathbf{g}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \cdot \vec{\mathbf{A}}(\mathbf{r}') dS' \right] \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_j^S[\mathbf{A}(\mathbf{r}')] &= (-1)^j \int_S \mathbf{A}(\mathbf{r}') \times \nabla \mathbf{g}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \\ &= (-1)^{j+1} \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \\ &\quad + \int_S \mathbf{A}(\mathbf{r}') \times \nabla \mathbf{g}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \end{aligned} \quad (5)$$

其中, $\mathbf{A}(\mathbf{r}')$ 是 $t_j = i\omega\mu_j$ 时的电流密度 $\mathbf{J}_S(\mathbf{r}')$ 或者 $t_j = i\omega\epsilon_j$ 时的磁流密度 $\mathbf{M}_S(\mathbf{r}')$, $j=0$ 或 1 表示区域 0 或区域 1 的索引. 表面电流密度的散度(或其基函数)是如式(3)所示的表面散度, 式(4)中 \mathcal{K} 算子的积分定义在柯西主值(Cauchy-Principal-Value, CPV)意义上. 又有并矢格林函数如下:

$$\bar{\mathbf{G}}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(\bar{\mathbf{I}} + \frac{\nabla \nabla}{k_j^2} \right) \mathbf{g}_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (6)$$

其中, $\bar{\mathbf{I}}$ 是自并矢, $g_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^{ik_j R} / (4\pi R)$ 是标量格林函数, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ 是观测点 \mathbf{r} 与源点 \mathbf{r}' 之间的距离. 另外, $k_j = \omega \sqrt{\epsilon_j \mu_j}$ 是波数, ϵ_j 和 μ_j 分别是第 j 区域的介电常数和磁导率, ω 是被激发电场的角频率. 电导率为 σ 的有损耗导体, 其介电常数 $\epsilon \approx i\sigma/\omega$. 对于具有任意可穿透介质基板 V , 本文使用广义 VIE 来描述, 即

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^{\text{ex}}(\mathbf{r}) + \mathcal{L}_0^V(\mathbf{J}_V) - \mathcal{K}_0^V(\mathbf{M}_V), \mathbf{r} \in V \quad (7)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^{\text{ex}}(\mathbf{r}) + \mathcal{L}_0^V(\mathbf{M}_V) + \mathcal{K}_0^V(\mathbf{J}_V), \mathbf{r} \in V \quad (8)$$

其中,

$$\mathbf{J}_V(\mathbf{r}') = i\omega\epsilon_0[\bar{\mathbf{I}} - \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_r(\mathbf{r}')] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') \quad (9)$$

$$\mathbf{M}_V(\mathbf{r}') = i\omega\mu_0[\bar{\mathbf{I}} - \bar{\boldsymbol{\mu}}_r(\mathbf{r}')] \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}') \quad (10)$$

分别是介质基板内部的体电流密度和磁流密度. 假设材料是非均匀和各向异性的, 相对介电常数张量为 $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_r(\mathbf{r}') = \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{r}')/\epsilon_0$, 相对磁导率张量也可能是介磁性的^[36]. VIEs 的 \mathcal{L} 算子和 \mathcal{K} 算子如下:

$$\mathcal{L}_0^V[\mathbf{A}(\mathbf{r}')] = t_0 \int_V \bar{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}') dV' \quad (11)$$

$$\mathcal{K}_0^V[\mathbf{A}(\mathbf{r}')] = \int_V \mathbf{A}(\mathbf{r}') \times \nabla g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \quad (12)$$

其中, 上标 V 代表 VIEs, \mathbf{A} 是 $t_0 = i\omega\mu_0$ 时的 \mathbf{J}_V 或 $t_0 = i\omega\epsilon_0$ 时的 \mathbf{M}_V . 另外, $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 和 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 分别为基板内部的总电场和总磁场, 且 $\mathbf{E}^{\text{ex}}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^{\text{ex}}(\mathbf{r}) = 0$, 这表示可穿透基板内部的一般没有激励. 这里 \mathcal{K} 算子没有定义在 VIEs 的柯西主值 CPV 上^[37]. 但是如果用带有 SWG 函数的 MOM 方法求解, 本文需要选择电通量密度 \mathbf{D}_V 和磁通量密度 \mathbf{B}_V 作为待解的未知函数, 这样在非均匀各向异性介质中, 可以保持单元边界的连续性. 磁通量密度与电流密度关系可以表示为

$$\mathbf{J}_V(\mathbf{r}') = i\omega[\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_r^{-1}(\mathbf{r}') - \bar{\mathbf{I}}] \cdot \mathbf{D}_V(\mathbf{r}') \quad (13)$$

$$\mathbf{M}_V(\mathbf{r}') = i\omega[\bar{\boldsymbol{\mu}}_r^{-1}(\mathbf{r}') - \bar{\mathbf{I}}] \cdot \mathbf{B}_V(\mathbf{r}') \quad (14)$$

将上述的 \mathcal{L} 算子和 \mathcal{K} 算子改写为

$$\mathcal{L}_0^V[\mathbf{D}_V(\mathbf{r}')] = i\omega\mu_0 \int_V \bar{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \bar{\mathbf{t}}_\epsilon \cdot \mathbf{D}_V(\mathbf{r}') dV' \quad (15)$$

$$\mathcal{L}_0^V[\mathbf{B}_V(\mathbf{r}')] = i\omega\epsilon_0 \int_V \bar{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \bar{\mathbf{t}}_\mu \cdot \mathbf{B}_V(\mathbf{r}') dV' \quad (16)$$

$$\mathcal{K}_0^V[\mathbf{D}_V(\mathbf{r}')] = \int_V \bar{\mathbf{t}}_\epsilon \cdot \mathbf{D}_V(\mathbf{r}') \times \nabla g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \quad (17)$$

$$\mathcal{K}_0^V[\mathbf{B}_V(\mathbf{r}')] = \int_V \bar{\mathbf{t}}_\mu \cdot \mathbf{B}_V(\mathbf{r}') \times \nabla g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \quad (18)$$

其中,

$$\bar{\mathbf{t}}_\epsilon(\mathbf{r}') = i\omega[\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_r^{-1}(\mathbf{r}') - \bar{\mathbf{I}}],$$

$$\bar{\mathbf{t}}_\mu(\mathbf{r}') = i\omega[\bar{\boldsymbol{\mu}}_r^{-1}(\mathbf{r}') - \bar{\mathbf{I}}].$$

通过耦合导体表面电流密度和介质基板磁通密度

产生的场, 将导体的 SIEs 与基板的 VIEs 结合, 可以得到 VSIEs 如下:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{\text{ex}}(\mathbf{r}) = & -\hat{\mathbf{n}} \times i\omega\mu_0 \int_S \bar{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') dS' \\ & + \int_S \mathbf{M}_S(\mathbf{r}') \times \nabla g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \\ & + i\omega\mu_0 \int_V \bar{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \bar{\mathbf{t}}_\epsilon \cdot \mathbf{D}_V(\mathbf{r}') dV' \\ & - \int_V \bar{\mathbf{t}}_\mu \cdot \mathbf{B}_V(\mathbf{r}') \times \nabla g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV', \mathbf{r} \in S \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} 0 = & \hat{\mathbf{n}} \times \left\{ i\omega\epsilon_0 \int_S \bar{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}_S(\mathbf{r}') dS' \right. \\ & \left. + \int_S \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') \cdot \nabla g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \right\}, \mathbf{r} \in S \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_V(\mathbf{r}) = & i\omega\mu_0\epsilon_0\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_r(\mathbf{r}) \cdot \int_S \bar{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') dS' \\ & + \epsilon_0\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_r(\mathbf{r}) \cdot \int_S \mathbf{M}_S(\mathbf{r}') \times \nabla g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \\ & + i\omega\mu_0\epsilon_0\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_r(\mathbf{r}) \cdot \int_V \bar{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \bar{\mathbf{t}}_\epsilon(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{D}_V(\mathbf{r}') dV' \\ & - \epsilon_0\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_r(\mathbf{r}) \cdot \int_V \bar{\mathbf{t}}_\mu(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{B}_V(\mathbf{r}') \cdot \nabla g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV', \mathbf{r} \in V \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_V(\mathbf{r}) = & i\omega\mu_0\epsilon_0\bar{\boldsymbol{\mu}}_r(\mathbf{r}) \cdot \int_S \bar{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}_S(\mathbf{r}') dS' \\ & + \mu_0\bar{\boldsymbol{\mu}}_r(\mathbf{r}) \cdot \int_S \mathbf{J}_S(\mathbf{r}') \times \nabla g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \\ & + i\omega\mu_0\epsilon_0\bar{\boldsymbol{\mu}}_r(\mathbf{r}) \cdot \int_V \bar{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \bar{\mathbf{t}}_\mu(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{B}_V(\mathbf{r}') dV' \\ & + \mu_0\bar{\boldsymbol{\mu}}_r(\mathbf{r}) \cdot \int_V \bar{\mathbf{t}}_\epsilon(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{D}_V(\mathbf{r}') \cdot \nabla g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV', \mathbf{r} \in V \end{aligned} \quad (22)$$

式(19)~式(22)为常用 VSIEs, 可用于求解中高频未知电通量密度或磁通量密度. 但对于低频求解, 需要增强常用 VSIEs.

3 增强混合场积分方程

前面提到的 VSIEs, 即式(18)~式(21) 在低频情况下可能难以很好地工作, 因为 HFIEs 中的 \mathcal{L} 算子矢量位和标量位之间存在严重的不平衡, 所以需要采用 AH-FIEs. 尽管在 VIEs 中的 \mathcal{L} 算子也存在同样的不平衡性, 但由于 VIEs 属于第二类积分方程, 所以生成的矩阵对角元素能占主导地位的, 从而呈现良态, 因此只需要增强 HFIEs. 目前的增强方法只能工作在导体目标的 EFIE^[20] 或者介质目标的 EFIEs^[27], 本文可以直接将它们用在这部分. 将导体表面离散成 N_t 个共边的 N_c 个三角形片, 其中 $N_t = 1.5N_c$, 导体表面的电流密度可由 RWG 基函数展开为

$$\mathbf{J}_S(\mathbf{r}') = \sum_{n=1}^{N_t} J_{Sn} \mathbf{A}_n(\mathbf{r}') \quad (23)$$

其中,

$$A_n(\mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_n^+}{2A_n^+}, & \mathbf{r}' \in T_n^+ \\ \frac{\mathbf{r}'_n^- - \mathbf{r}'}{2A_n^-}, & \mathbf{r}' \in T_n^- \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (24)$$

是定义在第 n 个三角形对 T_n^\pm 上的 RWG 基函数, 面积为 A_n^\pm . \mathbf{r}'_n^\pm 分别是三角形对 T_n^\pm 的自由顶点. J_{S_n} ($n=1, 2, \dots, N_t$) 是展开系数. 将 \mathcal{J}_S 的 \mathcal{L} 算子中的电荷密度作为一个新的未知函数求解, 并引入电流密度的连续性方程作为一个额外的控制方程^[22], 可以将式(1)增强为

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}}_0^v & \bar{\mathbf{D}}^T \cdot \bar{\mathbf{P}}_0 \\ \bar{\mathbf{D}} & k_0^2 \bar{\mathbf{I}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ik_0 \mathbf{J}_S^c \\ c_0 \rho_e^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_0^{-1} \mathbf{b}_e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

其中, 临时省略了 \mathcal{K}_0^s 算子, 根据文献[22]作出的定义如下:

$$[\bar{\mathbf{L}}_0^v]_{mn} = \int_{\Delta T_m^\pm} dS A_m(\mathbf{r}) \cdot \int_{\Delta T_n^\pm} g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Lambda_n(\mathbf{r}') dS' \quad (26)$$

$$[\bar{\mathbf{L}}_0^s]_{mn} = \int_{\Delta T_m^\pm} dS \nabla \cdot \Lambda_m(\mathbf{r}) \int_{\Delta T_n^\pm} g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \cdot \Lambda_n(\mathbf{r}') dS' \quad (27)$$

$$[\bar{\mathbf{P}}_0]_{mn} = \int_{\Delta S_m} dS h_m(\mathbf{r}) \int_{\Delta S_n} g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') h_n(\mathbf{r}') dS' \quad (28)$$

$$[\mathbf{b}_e]_m = \int_{\Delta T_m^\pm} A_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^{ex}(\mathbf{r}) dS \quad (29)$$

式(25)中, 算子 $\bar{\mathbf{D}}$ 是^[22]定义的关联矩阵, 上标 v 表示向量势, S 表示 \mathcal{L} 算子中的标量势. 此外, 用式(30)表示电荷密度如下:

$$\rho_e(\mathbf{r}') = \sum_{n=1}^{N_c} \rho_{en} h_n(\mathbf{r}') \quad (30)$$

其中,

$$h_n(\mathbf{r}') = \begin{cases} \frac{1}{A_n}, & \mathbf{r}' \in S_n \\ 0, & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (31)$$

是一个脉冲基函数. 用 RWG 基函数和脉冲基函数作为测试函数, 分别对 2 个方程进行测试. 因为 RWG 基函数的散度和测试函数分别变成脉冲基函数和测试函数, 可以用式(27)来表示式(26). 在式(24)中, $\mathbf{J}_S^c = [J_{S1}, J_{S2}, \dots, J_{SN_t}]^T$ 是由电流密度的展开系数形成的向量形式, $\rho_e^c = [\rho_{e1}, \rho_{e2}, \dots, \rho_{e(N_c-1)}]^T$ 是由电荷密度的展开系数形成的向量形式, 其中立约束是强制性的^[6].

式(2)中, \mathcal{L} 算子作用于磁流密度 \mathbf{M}_S , 但其增强前没有处理过. 将磁荷密度作为一个新的未知函数来求解, 并引入磁流密度的连续性方程作为一个额外的控制方程, 使式(2)可以增强. 磁流密度的连续性方程为

$$\nabla' \cdot \mathbf{M}_S(\mathbf{r}') = -\frac{\partial \rho_m(\mathbf{r}')}{\partial t} = i\omega \rho_m(\mathbf{r}') \quad (32)$$

其中, $\rho_m(\mathbf{r}')$ 是磁荷密度, 由麦克斯韦方程第 1 个等式推导为

$$\nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}') = -\mathbf{M}_S(\mathbf{r}') - \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}')}{\partial t} \quad (33)$$

通过取散度, 利用麦克斯韦方程第 4 个式 $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}') = \rho_m(\mathbf{r}')$ (\mathbf{r} 和 ∇ 上的 $'$ 表示它是源点或作用于源点), 增强后式(2)可以写成如下:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}}_1^v & \bar{\mathbf{D}}^T \cdot \bar{\mathbf{P}}_1 \\ \bar{\mathbf{D}} & k_0^2 \bar{\mathbf{I}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ik_0 \mathbf{M}_S^c \\ c_0 \rho_m^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

其中,

$$[\bar{\mathbf{L}}_1^v]_{mn} = \frac{\mu_1}{\mu_0} \int_{\Delta T_m^\pm} dS A_m(\mathbf{r}) \cdot \int_{\Delta T_n^\pm} g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') A_n(\mathbf{r}') dS' \quad (35)$$

$$[\bar{\mathbf{L}}_1^s]_{mn} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \int_{\Delta T_m^\pm} dS \nabla \cdot A_m(\mathbf{r}) \int_{\Delta T_n^\pm} g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla' \cdot A_n(\mathbf{r}') dS' \quad (36)$$

$$[\bar{\mathbf{P}}_1]_{mn} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \int_{\Delta S_m} dS h_m(\mathbf{r}) \int_{\Delta S_n} g_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') h_n(\mathbf{r}') dS' \quad (37)$$

本文省略了 \mathcal{K}_1^s 算子. 由于式(35)等同于式(36), 类似在式(26)和式(27)中提到的, 只使用了式(36), 式(35)就不再使用了. 在上式中, 还利用 RWG 基函数和脉冲基函数分别对磁电流和电荷密度进行了扩展, 即

$$\mathbf{M}_S(\mathbf{r}') = \sum_{n=1}^{N_t} M_{Sn} A_n(\mathbf{r}') \quad (38)$$

$$\rho_m(\mathbf{r}') = \sum_{n=1}^{N_c} \rho_{mn} h_n(\mathbf{r}') \quad (39)$$

采用这 2 个基函数作为测试函数, 分别对 2 个方程进行测试. 在式(33)中, $\mathbf{M}_S^c = [M_{S1}, M_{S2}, \dots, M_{SN_t}]^T$ 是磁流密度的展开系数所形成的向量, $\rho_m^c = [\rho_{m1}, \rho_{m2}, \dots, \rho_{m(N_c-1)}]^T$ 是受中性约束的磁荷密度展开系数所形成的向量. 将省略的 \mathcal{K} 算子再加回来, 并结合以上 2 个方程的增强形式, 即式(24)和式(33), 可以得到导体的 AHFIEs 如下:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}}_0^v & \bar{\mathbf{D}}^T \cdot \bar{\mathbf{P}}_0 & \eta_0^{-1} \bar{\mathbf{K}}_0 & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{D}} & k_0^2 \bar{\mathbf{I}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \eta_0^{-1} \bar{\mathbf{K}}_1 & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{L}}_1^v & \bar{\mathbf{D}}^T \cdot \bar{\mathbf{P}}_1 \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{D}} & k_0^2 \bar{\mathbf{I}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ik_0 \mathbf{J}_S^c \\ c_0 \rho_e^c \\ ik_0 \mathbf{M}_S^c \\ c_0 \rho_m^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_0^{-1} \mathbf{b}_e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

其中,

$$[\bar{\mathbf{K}}_j]_{mn} = \int_{\Delta T_m^\pm} dS A_m(\mathbf{r}) \cdot \int_{T_n^\pm} \nabla' g_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times A_n(\mathbf{r}') dS' + (-1)^{j+1} \int_{\Delta T_m^\pm} A_m(\mathbf{r}) \cdot \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}} \times A_m(\mathbf{r}) dS, j=0, 1 \quad (41)$$

4 增强体-面积分方程

在上节中增强了导体的 SIEs 或 HFIEs, 其互连结构还包括用 VIEs 描述非导电基板. VIEs 属于对低频不敏感的第 2 类积分方程, 尽管 \mathcal{L} 算子的矢量位和标量位在低频时严重不平衡, 但不需要对其进行增强. VIEs 包括待求函数电通密度 \mathbf{D}_V 和磁通密度 \mathbf{B}_V , 可以用 MoM 中的 SWG 基函数展开得到, 即

$$\mathbf{D}_V(\mathbf{r}') = \sum_{n=1}^{N_d} D_{Vn} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \quad (42)$$

$$\mathbf{B}_V(\mathbf{r}') = \sum_{n=1}^{N_d} B_{Vn} \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \quad (43)$$

将介质基板离散化为 N_v 个四面体单元, N_d 是成对四面体单元的数量, 其中定义 SWG 基函数为 $\mathbf{f}(\mathbf{r}')$. D_{Vn} 和 B_{Vn} 分别是 \mathbf{D}_V 和 \mathbf{B}_V 的展开系数. 当通过场耦合将导体的 AHFIEs 与非导电基板的 VIEs 结合时 (例如介质基板内部的场受到导体表面电流密度的作用, 导体表面的场受到介质基板内部磁通量密度的作用), 可以得到以下 AVSIEs 来控制整个结构:

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}}_0^v & \bar{\mathbf{D}}^T \cdot \bar{\mathbf{P}}_0 & \eta_0^{-1} \bar{\mathbf{K}}_0 & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{L}}_a & \eta_0^{-1} \bar{\mathbf{K}}_a \\ \bar{\mathbf{D}} & k_0^2 \bar{\mathbf{I}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \eta_0^{-1} \bar{\mathbf{K}}_1 & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{L}}_1^v & \bar{\mathbf{D}}^T \cdot \bar{\mathbf{P}}_1 & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{D}} & k_0^2 \bar{\mathbf{I}} & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{L}}_b^\epsilon & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{K}}_b^\epsilon & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{L}}_c^\epsilon - \bar{\mathbf{I}} & \bar{\mathbf{K}}_c^\epsilon \\ \bar{\mathbf{K}}_b^\mu & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{L}}_b^\mu & \bar{\mathbf{0}} & \bar{\mathbf{K}}_c^\mu & \bar{\mathbf{L}}_c^\mu - \bar{\mathbf{I}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ik_0 \mathbf{J}_S^c \\ c_0 \boldsymbol{\rho}_e^c \\ ik_0 \mathbf{M}_S^c \\ c_0 \boldsymbol{\rho}_m^c \\ ik_0 \mathbf{D}_V^c \\ ik_0 \mathbf{B}_V^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_0^{-1} \mathbf{b}_e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

其中,

$$[\bar{\mathbf{L}}_a]_{mn} = \int_{\Delta T_n^\pm} dS A_m(\mathbf{r}) \cdot \int_{\Delta V_n^\pm} \bar{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \bar{\mathbf{t}}_a(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dV' \quad (45)$$

$$[\bar{\mathbf{K}}_a]_{mn} = \int_{\Delta T_n^\pm} dS A_m(\mathbf{r}) \cdot \int_{\Delta V_n^\pm} \bar{\mathbf{t}}_\mu(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \times \nabla' g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \quad (46)$$

$$[\bar{\mathbf{L}}_b^\epsilon]_{mn} = \int_{\Delta V_m^\pm} dV f_m(\mathbf{r}) \cdot i\omega\mu_0 \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{r}) \cdot \int_{\Delta T_n^\pm} \bar{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{A}_n(\mathbf{r}') dS' \quad (47)$$

$$[\bar{\mathbf{K}}_b^\epsilon]_{mn} = \int_{\Delta V_m^\pm} dV f_m(\mathbf{r}) \cdot \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{r}) \cdot \int_{\Delta T_n^\pm} \mathbf{A}_n(\mathbf{r}') \times \nabla g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \quad (48)$$

$$[\bar{\mathbf{L}}_c^\epsilon]_{mn} = \int_{\Delta V_m^\pm} dV f_m(\mathbf{r}) \cdot i\omega\mu_0 \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{r}) \cdot \int_{\Delta V_n^\pm} \bar{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \bar{\mathbf{t}}_\epsilon(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dV' \quad (49)$$

$$[\bar{\mathbf{K}}_c^\epsilon]_{mn} = \int_{\Delta V_m^\pm} dV f_m(\mathbf{r}) \cdot \bar{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{r}) \cdot \int_{\Delta V_n^\pm} \bar{\mathbf{t}}_\mu(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \nabla' g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \quad (50)$$

$$[\bar{\mathbf{L}}_b^\mu]_{mn} = \int_{\Delta V_m^\pm} dV f_m(\mathbf{r}) \cdot i\omega\epsilon_0 \bar{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r}) \cdot \int_{\Delta T_n^\pm} \bar{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{A}_n(\mathbf{r}') dS' \quad (51)$$

$$[\bar{\mathbf{K}}_b^\mu]_{mn} = \int_{\Delta V_m^\pm} dV f_m(\mathbf{r}) \cdot \bar{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r}) \cdot \int_{\Delta T_n^\pm} \mathbf{A}_n(\mathbf{r}') \times \nabla g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \quad (52)$$

$$[\bar{\mathbf{L}}_c^\mu]_{mn} = \int_{\Delta V_m^\pm} dV f_m(\mathbf{r}) \cdot i\omega\epsilon_0 \bar{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r}) \cdot \int_{\Delta V_n^\pm} \bar{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \bar{\mathbf{t}}_\mu(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') dV' \quad (53)$$

$$[\bar{\mathbf{K}}_c^\mu]_{mn} = \int_{\Delta V_m^\pm} dV f_m(\mathbf{r}) \cdot \bar{\boldsymbol{\mu}}(\mathbf{r}) \cdot \int_{\Delta V_n^\pm} \bar{\mathbf{t}}_\epsilon(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \cdot \nabla g_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' \quad (54)$$

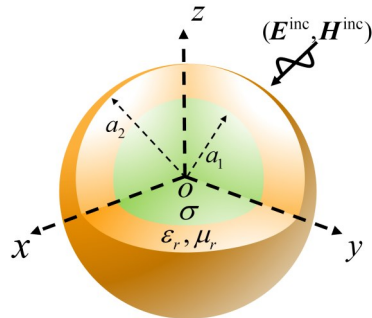
并且 $\bar{\mathbf{t}}_a(\mathbf{r}') = i\omega\mu_0 \bar{\mathbf{t}}_\epsilon(\mathbf{r}')$, $\bar{\mathbf{t}}_b(\mathbf{r}') = i\omega\epsilon_0 \bar{\mathbf{t}}_\mu(\mathbf{r}')$.

另外, $\mathbf{D}_V^c = [D_{V1}, D_{V2}, \dots, D_{VN_d}]^T$ 是电通量密度展开系数的向量形式, $\mathbf{D}_V^\epsilon = [B_{V1}, B_{V2}, \dots, B_{VN_d}]^T$ 是磁通量密度展开系数的向量形式. 需要注意, 上面的矩阵元素在 $m=n$ 时包含奇异被积项, 需要谨慎处理^[42]. 文献[43, 44]提出了鲁棒的奇异性处理技术, 可以用来精确估算奇异积分, 即使在高导电性介质中也可以使用. 上述矩阵方程可通过矩阵求解器求解得到展开系数, 用来计算未知电流密度、电荷密度和通量密度.

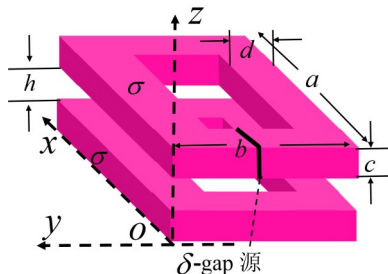
5 数值算例验证及结果分析

本节给出几个数值算例来验证所提出的方法. 当结构中不包含可穿透介质时求解 AHFIEs, 当结构中同时包含导体和可穿透介质时求解 AVSIEs. 增强的式也可以用来求解中高频问题 (尽管不必要), 本文展示了频率为 1 GHz 的求解过程. 假设在所有算例中导体是有损的, 电导率为 $\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m. 在第 1 个算例中, 考虑涂 1 层介质的有损导电球体的电磁散射, 如图 2 所示. 之所以选择这个例子, 是因为它具有与互连结构相似的材料结构, 但它具有精确的 Mie 级数解, 可以验证数值解. 内导电球半径为 $a_1 = 0.5$ m, 表面网格划分为 $N_c = 6316$ 个三角形块. 介质层相对介电常数为 $\epsilon_r = 4.0$, 相对磁导率 $\mu_r = 1.0$, 外部半径 $a_2 = 1$ m, 它的体积被网格化为 $N_d = 7535$ 个四面体单元. 入射波是沿 z 方向的平面波, 频率为 $f = 1.0 \times 10^{-6}$ GHz. 在垂直和水平极化下的

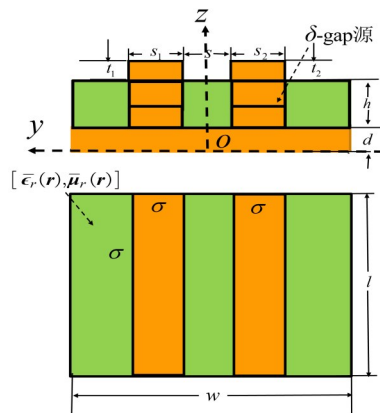
双基地雷达截面(Radar Cross Section, RCS)解如图3所示,它们与相应的Mie级数解接近.



(a) 涂覆1层介质的有损导电球体



(b) 2个有损耗导体组成的矩形回路



(c) 2个有损耗互连线放置在介质基板和有损地上的侧视图和顶视图

图2 几何结构

为了解系统矩阵在低频时的情况,选择了3种不同的网格划分方案,并计算频率从 $f=1.0 \times 10^{-7}$ GHz到 $f=1.0$ GHz的条件数. 网格A方案离散划分了导电球表面为 $N_c=4\ 178$ 个三角形,离散划分介质层为 $N_d=5\ 437$ 个四面体. 网格B方案是前面采用的 $N_c=6\ 316, N_d=7\ 535$, 网格C方案采用 $N_c=8\ 348, N_d=9\ 572$. 未知数的数量大概为 $N=2(1.5N_c+N_c)+2 \times 3N_d$,所以在网格C方案中,未知量可达 10^5 个左右. 图4给出了3种网格划分方案

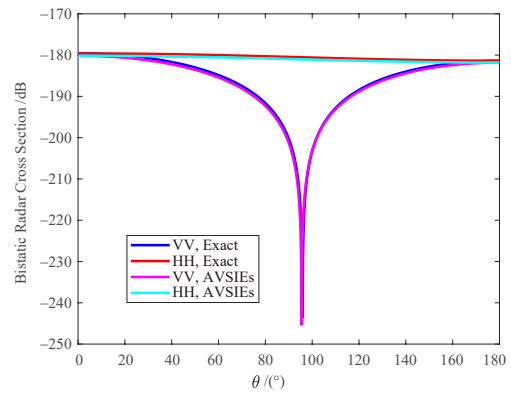


图3 涂有介质层导电球体的双基地RCS解

条件数随频率变化的情况,可以看出条件数在低频范围内保持稳定. 同时,基于 \mathcal{L} 算子的频谱,随着网格数量的增加,条件数也会增加^[29].

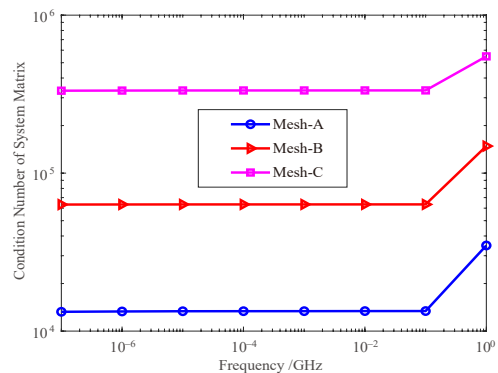


图4 3种不同网格划分方案的系统矩阵条件数与带介质层导电球体散射的频率关系

算例1,如表1所示记录的计算成本,即CPU运行时间(s)和内存使用量(MB),并将所提出的AVSIEs方法与需要使用对偶基函数的传统AEFIEs方法^[27]进行比较. 用广义极小值残差(Generalized Minimal RESidual method, GMRES)迭代法在3.06 GHz CPU和64 GB RAM的T7500 Dell Precision平台上求解了矩阵方程. 正如预期,所提出的方法消耗了更多的计算资源,因为它使用VIEs作为可穿透介质,以及AHFIEs作为导体介质(AHFIEs比AEFIEs包含更多的方程). 虽然计算成本有小幅度增加,但是采用的双区域面积分方程适用于有损耗的导体材料,而采用的体积分方程则适用于任意可穿透介质衬底材料. 因此所提出的方法去除了对材料性质的限制,具有更强大的求解问题能力和对复杂问题的适应性,基于传统AEFIEs方法不能求解的问题(如包含各向异性、非均匀、非线性、色散材料的封装结构),它都能求解.

算例2,考虑了如图2(b)所示的由2个相同的矩形导电回路组成的结构. 每个环的长度为 $a=1\ 988\ \mu\text{m}$,宽度

表 1 算例 1 中 AVSIEs 方法与传统 AEFIEs 方法的计算成本比较

计算成本		网格 A 方案	网格 B 方案	网格 C 方案
AVSIEs	CPU 运行时间/s	418	623	845
	内存使用量/MB	836	1 025	1 287
AEFIEs	CPU 运行时间/s	342	563	738
	内存使用量/MB	725	946	1 132

为 $b=126 \mu\text{m}$, 高度为 $c=4 \mu\text{m}$, 截面方形的边长为 $d=4 \mu\text{m}$. 在短边(宽度边)的中心点施加一个 δ 缝隙电压源来激励结构. 将环路表面离散为 5 742 个小三角形, 利用该方法来计算频率范围从 $1.0 \times 10^{-6} \text{ GHz}$ 到 1.0 GHz 的输入导纳, 得到趋肤深度为 $2.090 \sim 2.09 \mu\text{m}$. 图 5~图 8 显示了 Y_{11} 实部、 Y_{11} 虚部、 Y_{12} 实部、 Y_{12} 虚部的计算结果, 它们与著名的 FastHenry 求解器的结果一致, FastHenry 求解器采用准静态近似方法建立^[45], 当结构(截面尺寸)小于波长的 $1/10$ 时, 被认为是准确的^[13].

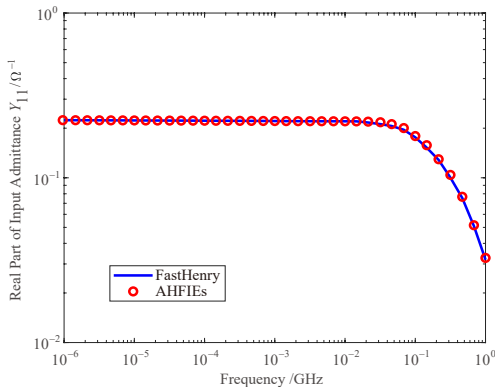


图 5 2 个矩形导电环路的输入导纳 Y_{11} 的实部

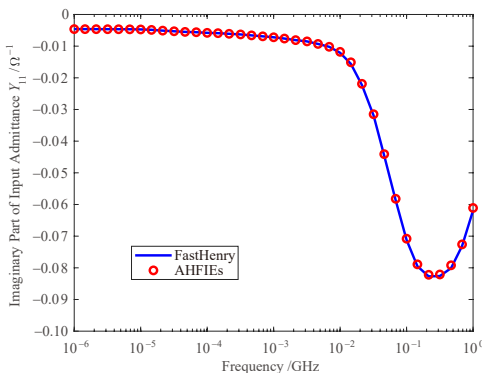


图 6 2 个矩形导电环路的输入导纳 Y_{11} 的虚部

本文还比较了提出的 AVSIEs 方法(因为没有不导电部件, 所以实际使用了 AHFIEs)和传统 AEFIE 方法在算例 2 中的计算成本, 结果如表 2 所示. 算例 2 中的网格 A、B、C 方案使用在离散环结构时, 得到的三角形个数分别为 3 320、5 742 和 7 825, 结论和之前的算例一样, 但由于 VIEs 部分不存在, 所以差异减小了.

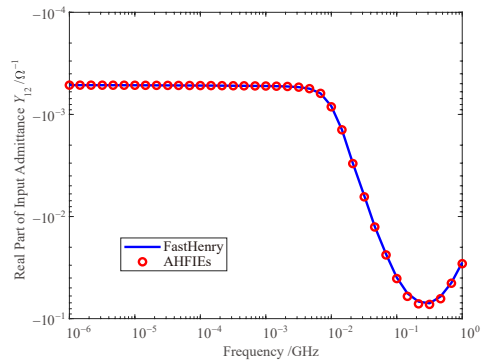


图 7 2 个矩形导电环路的输入导纳 Y_{12} 的实部

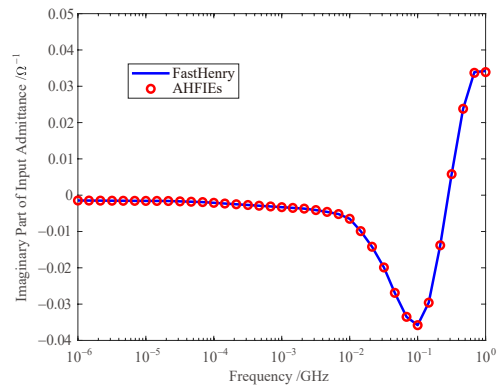


图 8 2 个矩形导电环路的输入导纳 Y_{12} 的虚部

表 2 算例 2 中 AVSIEs 方法与传统 AEFIEs 方法的计算成本比较

计算成本		网格 A 方案	网格 B 方案	网格 C 方案
AVSIEs	CPU 运行时间/s	186	227	312
	内存使用量/MB	357	476	689
AEFIEs	CPU 运行时间/s	181	219	298
	内存使用量/MB	349	465	662

本文前面只显示了频率在 $f=1.0 \times 10^{-6} \text{ GHz}$ 的计算成本, 因为本文关注的是低频分析, 且这是最典型的例子. 表 3 显示了算例 2 在其他频率上的计算成本. 当 $f=1.0 \times 10^{-5} \text{ GHz}$ 时, 采用 Mesh-A 方案; 当 $f=1.0 \times 10^{-3} \text{ GHz}$ 时, 采用 Mesh-B 方案; 当 $f=1.0 \times 10^{-1} \text{ GHz}$ 时, 采用 Mesh-C 方案. 实际上, 在使用相同数值方法时, 计算成本主要取决于几何离散化. 因为频率的变化会影响迭代次数或系统矩阵的条件, 所以 $f=1.0 \times 10^{-3} \text{ GHz}$ 比 $f=1.0 \times 10^{-6} \text{ GHz}$ (表 2) 的成本略有增加, 即使它们在低频范围内使用相同的几何离散化(网格 B 方案).

算例 3, 如图 2(c) 所示 2 个互连线位于接地的单层介质基板上, 尺寸设计为 $l=10.0 \text{ mm}$, $w=5.0 \text{ mm}$, $h=0.3 \text{ mm}$, $d=0.1 \text{ mm}$, 其中 l 为地面、基板和互连线共同具有的长度, w 为地面和基板共同具有的宽度, d 为地的厚度. 2 个互连线的宽度为 $S_1 = S_2 = 0.2 \text{ mm}$, 厚度为 $t_1 = t_2 = 0.05 \text{ mm}$, 互连线间距为 $S = 0.2 \text{ mm}$. 此外, 基板为连续非均匀各向异

表3 算例2中 AVSIEs 方法与传统 AEFIEs 方法在不同频率下的计算成本比较

计算成本		$f=1.0\times 10^{-5}$	$f=1.0\times 10^{-3}$	$f=1.0\times 10^{-1}$
		GHz	GHz	GHz
AVSIEs	CPU 运行时间/s	189	243	337
	内存使用量/MB	358	481	693
AEFIEs	CPU 运行时间/s	183	231	321
	内存使用量/MB	351	469	667

性材料,其相对介电常数张量 $\bar{\epsilon}_r$ 由非零元素定义,非零元素为 $\epsilon_{11}=\epsilon_{22}=2.0[1+(z-d)/h]$, $\epsilon_{33}=2.5[1+(z-d)/h]$, $\epsilon_{12}=\epsilon_{21}=1.5[1+(z-d)/h]$. 基板具有各向异性的磁性,其相对磁导率张量 $\bar{\mu}_r$ 由非零元素 $\mu_{11}=\mu_{22}=1.5$ 和 $\mu_{33}=2.0$ 表征. 本文将导体部分网格化为3748个三角形块,将非导体部分网格化为6256个四面体. 在互连线中,传播信号由位于基板侧边中心(在 $y-z$ 平面)的 δ 空腔电压源激发. 图9给出了 S 参数 S_{11} 和 S_{14} 的解,图10给出了该结构 S 参数 S_{12} 和 S_{13} 的解,与之前提出的有限元FEM求解器得到的解非常接近. 由于结构的对称性和材料的各向异性,所有其他的 S 参数都可以通过 S_{11} 、 S_{12} 、 S_{13} 和 S_{14} 得到. 例如, $S_{44}=S_{33}=S_{22}=S_{11}$, $S_{24}=S_{13}$, $S_{23}=S_{14}$. 在计算成本方面,当 $f=1.0\times 10^{-6}$ GHz时,该方法分别消耗583 s的CPU运行时间和857 MB的内存使用量,而FEM求解器分别消耗612 s的CPU运行时间和892 MB的内存使用量. 在这个算例中,本文不能将提出的AVSIEs方法和传统AEFIEs方法的计算成本进行比较,因为它不能由AEFIEs描述.

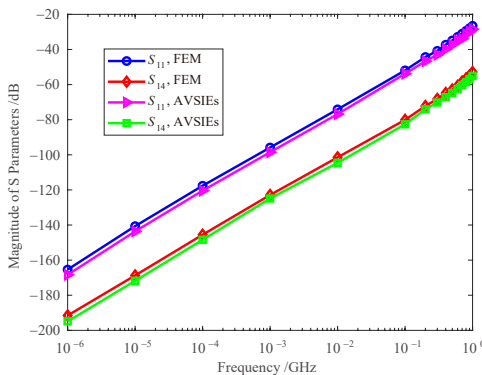


图9 放置在连续非均质且各向异性基板上的2个导电互连结构的 S 参数 S_{11} 和 S_{14} 的解

需注意的是,在不同的数值方法之间做一个公平的比较需要指定的精度,如果没有供比较的解析解,通常使用网格非常细(或成本非常高)的数值解作为“精确”解^[46]. 为了获得这样的“精确”解,需要像多层快速多极子算法(Multi-Layer Fast Multipole Algorithm, MLFMA)^[46]来加速求解过程,本文目前做不到这样. 此

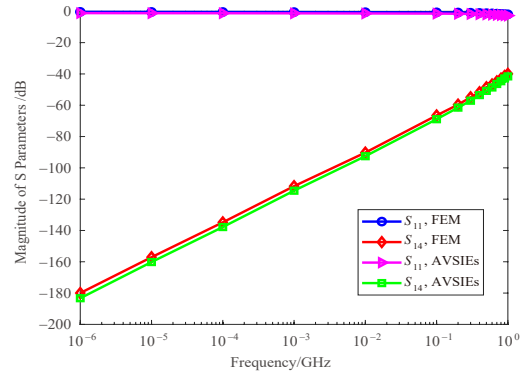


图10 放置在连续非均质且各向异性基板上的2个导电互连结构的 S 参数 S_{12} 和 S_{13} 的解

外,有限元法是一种微分方程求解器(Differential Equation Solver, DES),而本文提出的是一种积分方程求解器(Integral Equation Solver, IES),通常这2种不同的求解器不必要互相比,因为它们的优缺点已经非常清楚,并普遍被知晓^[46]. 例如,DES需要采用吸收边界条件(Absorbing Boundary Condition, ABC),具有较大的求解域,而IES不需要采用吸收边界条件,并且具有较小求解域. 因为这个原因,在计算成本方面,DES可能不如IES有优势. 但是,IES需要对格林函数进行奇异处理,并且其生成的系统矩阵是一个稠密矩阵,这对于解决大问题需要快速算法的加速,而DES不存在任何奇点问题,其生成的系统矩阵是一个稀疏矩阵^[42].

此外,本文提出的增强方法只用于低频分析,因为低频崩溃(Low-Frequency Breakdown, LFB)问题是一个需要特殊处理的大问题. 对于合理的高频,不存在低频崩溃问题,可以采用传统的非增强方法求解. 如果想要建立一个既能覆盖低频又能覆盖高频的代码,只需要把低频部分的代码(使用增强方法)和低频部分的代码(使用传统非增强方法)合并在一起,在这2个部分之间建立一个频率转换点,如此按照给出的频率就可以单独进行处理.

6 结论

本文给出了有损导体互连结构的低频分析方法,由于低频时有损导体有较大的趋肤深度,电流密度分布于导体横截面. 将有损耗导体视为介质目标,采用双区域HFIEs来描述其电磁特性,即外部区域用EFIE而内部区域用MFIE来描述. 已证明AEFIEs能有效地克服低频崩溃问题,在 \mathcal{L} 算子中通过选择磁荷密度作新的独立未知函数,并引入磁流密度连续性方程作为附加约束方程,从而将AEFIEs扩展为AHFIEs. 另外,使用一般化的VIEs来描述含多种材料的介质体,将其与AHFIEs相结合便形成针对整个结构的AVSIEs. 本文采用MoM求解AVSIEs,其中的RWG、SWG和脉冲基函数

分别表示 AHFIEs 中的表面电流密度和表面磁流密度、VIEs 中的体电通量密度和体磁通量密度及 AHFIEs 中的电荷密度和磁荷密度. 数值算例表明, 该方法能很好地模拟和分析低频情况下的有损互连结构. 本文提出的方法相比基于传统 AEFIEs 方法在计算成本上有一定的增加(因为方程更复杂), 但它可以适用于由任意性质材料构成的封装结构, 因而大大增强了对问题的适应性和求解复杂问题的能力.

参考文献

- [1] CHEW W C, TONG M S, HU B. Integral Equation Methods for Electromagnetic and Elastic Waves[M]. San Rafael: Morgan & Claypool Publishers, 2009.
- [2] TONG M S. Efficient electromagnetic analysis for interconnect and packaging structures using dual basis function in the method of moments[J]. IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology, 2011, 1(7): 1089-1097.
- [3] LI M K, CHEW W C. Multiscale simulation of complex structures using equivalence principle algorithm with high-order field point sampling scheme[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2008, 56(8): 2389-2397.
- [4] HARRINGTON R F. Field Computation by Moment Methods[M]. London: Macmillan, 1968.
- [5] RAO S, WILTON D, GLISSON A. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1982, 30(3): 409-418.
- [6] QIAN Z G, CHEW W C. Fast full-wave surface integral equation solver for multiscale structure modeling[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2009, 57(11): 3594-3601.
- [7] MORSEY J D, OKHMATOVSKI V I, CANGELLARIS A C. Finite-thickness conductor models for full-wave analysis of interconnects with a fast integral equation method[J]. IEEE Transactions on Advanced Packaging, 2004, 27(1): 24-33.
- [8] CHEN R, ULKU H A, ANDRIULLI F P, et al. On the low-frequency behavior of vector potential integral equations for perfect electrically conducting scatterers[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2022, 70(12): 12411-12416.
- [9] HENRY C, MERLINI A, RAHMOUNI L, et al. On a low-frequency and contrast-stabilized full-wave volume integral equation solver for lossy media[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2023, 71(3): 2571-2586.
- [10] RONG A S, CANGELLARIS A C, DONG L M. Comprehensive broadband electromagnetic modeling of on-chip interconnects with a surface discretization-based generalized PEEC model[C]//Electrical Performance of Electrical Packaging. Piscataway: IEEE, 2003: 367-370.
- [11] DE ZUTTER D, ROGIER H, KNOCKAERT L, et al. Surface current modelling of the skin effect for on-chip interconnections[J]. IEEE Transactions on Advanced Packaging, 2007, 30(2): 342-349.
- [12] GLISSON A W. Electromagnetic scattering by arbitrarily shaped surfaces with impedance boundary conditions[J]. Radio Science, 2016, 27(6): 935-943.
- [13] HOPPE D J, RAHMAT-SAMII Y. Impedance Boundary Conditions in Electromagnetics[M]. Bristol: Taylor & Francis, 1995.
- [14] SENIOR T B A, VOLAKIS J L. Approximate Boundary Conditions in Electromagnetics[M]. Stevenage: IET, 1995.
- [15] QIAN Z G, CHEW W C, SUAYA R. Generalized impedance boundary condition for conductor modeling in surface integral equation[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2007, 55(11): 2354-2364.
- [16] SONG B, ZHU Z H, ROCKWAY J D, et al. A new surface integral formulation for wideband impedance extraction of 3-D structures[C]//ICCAD-2003. International Conference on Computer Aided Design. Piscataway: IEEE, 2003: 843-847.
- [17] HUYNEN M, KAPUSUZ K Y, SUN X, et al. Entire domain basis function expansion of the differential surface admittance for efficient broadband characterization of lossy interconnects[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2020, 68(4): 1217-1233.
- [18] SHARMA S, TRIVERIO P. SLIM: A well-conditioned single-source boundary element method for modeling lossy conductors in layered media[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2020, 19(12): 2072-2076.
- [19] SHEIKH H L F, MENSHOV A, GHOLAMI R, et al. Novel single-source surface integral equation for scattering problems by 3-D dielectric objects[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2018, 66(2): 797-807.
- [20] CHAI W W, JIAO D. Direct matrix solution of linear complexity for surface integral-equation-based impedance extraction of complicated 3-D structures[J]. Proceedings of the IEEE, 2013, 101(2): 372-388.
- [21] WANG Y, GOPE D, JANDHYALA V, et al. Generalized Kirchoff's current and voltage law formulation for coupled circuit-electromagnetic simulation with surface Integral equations[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 2004, 52(7): 1673-1688.
- [22] QIAN Z G, CHEW W C. An augmented electric field integral equation for high-speed interconnect analysis[J]. Microwave and Optical Technology Letters, 2008, 50(10): 2658-2662.
- [23] CHEN Y P, JIANG L J, QIAN Z G, et al. An augmented electric field integral equation for layered medium Green's function[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2011, 59(3): 960-968.
- [24] LIU J, JIANG L J. Alternative AEFIE-EFIE method for broadband CEM simulations[J]. Microwave and Optical Technology Letters, 2012, 54(7): 1737-1740.
- [25] YOUNG J C, XU Y, ADAMS R J, et al. High-order nys-

- tröm implementation of an augmented electric field integral equation[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2012, 11: 846-849.
- [26] TIAN X Z, XIAO G B. Time-domain augmented electric field integral equation for a robust marching on in time solver[J]. IET Microwaves, Antennas & Propagation, 2014, 8(9): 688-694.
- [27] XIA T, GAN H, WEI M, et al. An integral equation modeling of lossy conductors with the enhanced augmented electric field integral equation[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2017, 65(8): 4181-4190.
- [28] GAN H H, XIA T, DAI Q I, et al. Augmented electric-field integral equation for inhomogeneous media[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2017, 16: 2967-2970.
- [29] XIA T, GAN H, WEI M, et al. An enhanced augmented electric-field integral equation formulation for dielectric objects[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2016, 64(6): 2339-2347.
- [30] CHEN W J, SUN S, LIU Y, et al. Improved A-EFIE system for electromagnetic simulation in low frequency regime[J]. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 2022, 21(9): 1752-1756.
- [31] CHIQOVANI G, DEMUROV A, EREMYAN D, et al. PEEC solution of EM-circuit problems for combined metallic and dielectric structures based on the augmented integral equations[C]//2023 International Symposium on Electromagnetic Compatibility-EMC Europe. Piscataway: IEEE, 2023: 1-5.
- [32] CHEN Q L. Electromagnetic Modeling of Three-Dimensional Piecewise Homogeneous Material Bodies of Arbitrary Composition and Geometry[D]. Houston: University of Houston, 1990.
- [33] RAO S M, WILTON D R. E-field, H-field, and combined field solution for arbitrarily shaped three-dimensional dielectric bodies[J]. Electromagnetics, 1990, 10(4): 407-421.
- [34] SHENG X Q, JIN J M, SONG J, et al. Solution of combined-field integral equation using multilevel fast multipole algorithm for scattering by homogeneous bodies[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1998, 46(11): 1718-1726.
- [35] HE Y, TONG M S. Accurate electromagnetic analysis of interconnect structures based on a mixed method[J]. IEEE Microwave and Wireless Components Letters, 2020, 30(8): 733-736.
- [36] TONG M S, YIN G Z, CHEN R P, et al. Electromagnetic modeling of packaging structures with lossy interconnects based on two-region surface integral equations[J]. IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology, 2014, 4(12): 1947-1955.
- [37] CHU Y H, CHEW W C. A robust surface-integral-equation formulation for conductive media[J]. Microwave and Optical Technology Letters, 2005, 46(2): 109-114.
- [38] CHU Y H, CHEW W C, ZHAO J S, et al. A surface integral equation formulation for low-frequency scattering from a composite object[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2003, 51(10): 2837-2844.
- [39] SCHAUBERT D, WILTON D, GLISSON A. A tetrahedral modeling method for electromagnetic scattering by arbitrarily shaped inhomogeneous dielectric bodies[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1984, 32(1): 77-85.
- [40] YANG G M, XING X, DAIGLE A, et al. Electronically tunable miniaturized antennas on magnetoelectric substrates with enhanced performance[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2008, 44(11): 3091-3094.
- [41] TONG M S, CHEW W C. The Nystrom Method in Electromagnetics[M]. Singapore: Wiley, 2020.
- [42] CHAKRABORTY S, JANDHYALA V. Evaluation of Green's function integrals in conducting media[C]//IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium Digest Held in Conjunction With: USNC/CNC/URSI North American Radio Sci Meeting. Piscataway: IEEE, 2003: 320-323.
- [43] SHENG W T, ZHU Z Y, YANG K, et al. Efficient evaluation of weakly singular integrals arising from electromagnetic surface integral equations[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2013, 61(6): 3377-3381.
- [44] TONG M S, CHEW W C. A novel approach for evaluating hypersingular and strongly singular surface integrals in electromagnetics[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2010, 58(11): 3593-3601.
- [45] KAMON M, TSUK M J, WHITE J K. FASTHENRY: A multipole-accelerated 3-D inductance extraction program[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, 1994, 42(9): 1750-1758.
- [46] CHEW W C. Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics[M]. Boston: Artech House, 2001.

作者简介



张黎女. 同济大学电磁场与微波技术专业博士研究生, 慕尼黑工业大学国家公派联合培养博士研究生. 于2021年获得国家留学基金委奖学金. 主要研究方向为无芯片RFID标签、分形天线和计算电磁学.

E-mail: 1910692@tongji.edu.cn



童美松男. 华中科技大学学士、硕士, 美国亚利桑那州立大学博士, 美国伊利诺伊大学香槟分校博士后. 现任同济大学微电子学院副院长、特聘教授、长聘教授、博士生导师. 主要研究方向为电磁场理论、天线理论与设计、微波电路设计、芯片电子封装、电磁逆散射与微波成像、多物理电磁学、计算电磁学等. E-mail: mstong@tongji.edu.cn