第 4 期
2012 年 4 月

电 子 学 报
ACTA ELECTRONICA SINICA

Vol.40 No.4
Apr. 2012

交换超立方体的拓扑性质与嵌入问题研究

王新阳,梁家荣,豆秋丽
(广西大学计算机与电子信息学院,广西南宁 530004)

摘 要: 交换超立方体(Exchanged hypercube)作为超立方体的一种变型网络,降低了网络规模增大时所需要的拓扑连接的开销.本文根据交换超立方体的图形化定义,得到交换超立方体的公式化定义,证明了交换超立方部分子网与超立方网同构,提出 $EHS(s,t)$ 和 $EHT(s,t)$ 的概念,并在此概念的基础上证明了交换超立方体中只存在长度不小于 4 的偶数圈,证明了交换超立方体的顶点连通度和边连通度都为 $\min\{s+1,t+1\}$.为使交换超立方体具有更广阔的应用范围,本文还提出了超立方体在交换立方网中的三种嵌入策略,证明了 $n=s+t+1$ 时,$n-1$ 维超立方体 Q_{n-1} 能够同胚地嵌入到交换超立方体 $EH(s,t)$ 中.

关键词: 互联网络;交换超立方体;超立方体;连通度;同构;同胚;嵌入

中图分类号: TP393 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2012) 04-0669-05

电子学报 URL: http://www.ejournal.org.cn **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.04.008

Research on Topological Properties and Embedding Issues of the Exchanged Hypercube

WANG Xin-yang, LIANG Jia-rong, DOU Qiu-li
(*College of Computer Science and Electronic Information, Guangxi University, Nanning, Guangxi 530004, China*)

Abstract: As a new variant of the hypercube, the exchanged hypercube reduces the cost of topology connecting when the scale of networks increases. According to the graphic definition of Exchanged Hypercube, in this paper, we obtain its formulized definition, prove that the subgraphs of exchanged hypercube are isomorphic to hypercubes, propose the concepts of $EHS(s,t)$ and $EHT(s,t)$, and on the basis of these concepts, prove that there are only even circles with length no more than 4, and that the vertex connectivity and edge connectivity of exchanged hypercube are both $\min\{s+1,t+1\}$. To enlarge the application range of the exchanged hypercube, we put forwards three strategies embedding hypercubes into exchanged hypercubes as well, and prove that, when $n=s+t+1$, Q_{n-1} can be embedded into the exchanged hypercube $EH(s,t)$ homeomorphically.

Key words: interconnecting network; exchanged hypercube; hypercube; connectivity; isomorphic; homeomorphic; embedding

1 引言

网络拓扑结构是多处理机系统中的一个重要研究内容.超立方体(Hypercube)[1]由于具有优秀的结构性质,已成为当前网络拓扑结构的研究热点.但超立方体并非最好的网络拓扑,为了改善超立方体网络的性能,人们在超立方体的基础上提出了各种变体结构,如交叉立方网(Crossed cube)[2,3],梅氏立方网(Möbius cube)[4],交换立方网(Exchanged hypercube)[5~7]等.这些变体网络改善了超立方体网络原有的某些性质.如 n 维交叉立方体的网络半径为$\lceil (n+1)/2 \rceil$,这几乎为超立方体网络直径的一半[2].

在构建网络模型时,除了要考虑网络的各项性能参数,另外一个重要因素是构建网络所需要的硬件开销,衡量网络成本开销的一个重要参数是成本效益 $C=1/(NC_{node}+LC_{link})D$,其中 N、L 表示网络的顶点数和边数,C_{node}、C_{link}表示网络结点和边的开销,D 表示网络的直径.在超立方体网络的很多变体网络中,如高斯超立方体(Gaussian hypercube)[8]和交换超立方体,都是通过去掉网络中的部分连接边来实现网络功能和硬件开销的平衡,以得到最大的成本效益 C.通过文献[5]中的比较可知,在超立方体的众多变体网络中,交换超立方体的成本效益是非常出色的,当网络的规模增大时,无需增加过多开销就可灵活地在原有网络的基础上进行扩展.文献[5]中提出了交换超立方网络的原始定义,并研究了网络的基本性质,但原文对交换超立方体的定义缺

收稿日期:2011-05-17;修回日期:2011-12-14
基金项目:国家自然科学基金(No.61064002);教育部"新世纪优秀人才支持计划"专项(No.NCET-06-0756)

乏公式化描述,不利于实施各种网络计算操作.本文在研究交换超立方体拓扑特性的基础上得到了网络连接函数,提出了 $EHS(s,t)$ 和 $EHT(s,t)$ 的概念,从另外一个角度深入地展示了交换超立方体网络的结构特点.同时,本文利用 $EHS(s,t)$ 和 $EHT(s,t)$ 的概念,分析了交换超立方体中圈及其连通性等拓扑性质,进一步完善了交换超立方体网络性质的研究.

此外,通常把模拟其他网络的能力作为衡量一个网络通用性的标准.网络的模拟理论上即为图的嵌入问题.交换超立方体保持了超立方体的很多优良特性,如在文献[5]中指出了交换超立方体含有 Hamilton 圈,可嵌入线性阵列,mesh 和树等结构.但是并未提及超立方体这种重要的结构在交换超立方体中的嵌入问题,本文在 $EHS(s,t)$ 和 $EHT(s,t)$ 概念的基础上分析了超立方体在交换超立方体中的多种嵌入形式,极大地提高了交换超立方体网络的应用范围.

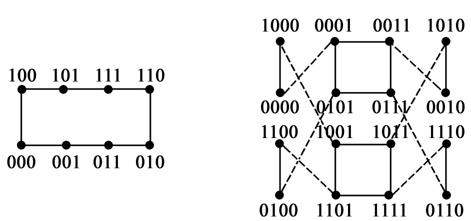
2 预备知识

在无向图 G 中,$V(G)$,$E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集.图 G 中的顶点用二进制字符串表示.(u,v) 表示图中连接相邻两个顶点 u 与 v 的边;$\delta(G)$ 表示图 G 的最小度;$\kappa(G)$ 表示图 G 的顶点连通度;$\lambda(G)$ 表示图 G 的边连通度;$\sigma(u)=i$ 表示对于顶点 u,$u_n=u_{n-1}=\cdots u_{i+1}=0$ 且 $u_i=1$;ε_i 表示二进制字符串第 i 位为 1,其余为 0.

定义 1[5] 交换超立方体定义为以下无向图:$EH(s,t)=(V,E)(s\geqslant 1,t\geqslant 1)$,其中,$V$ 是顶点集 $V=\{a_{s-1}\cdots a_0 b_{t-1}\cdots b_0 c \mid a_i,b_j,c\in\{0,1\},i\in[0,s),j\in[0,t)\}$,$E$ 是边集

$$E=\begin{cases}(v_1,v_2)\in V\times V, & \text{若 } v_1\oplus v_2=1\\ v_1[s+t,t+1]=v_2[s+t,t+1],H(v_1[t:1],v_2[t:1])=1, & \\ & \text{若 } v_1[0]=v_2[0]=1\\ v_1[t,1]=v_2[t,1],H(v_1[s+t:t+1],v_2[s+t:t+1])=1, & \\ & \text{若 } v_1[0]=v_2[0]=0\end{cases}$$

其中,$\oplus$ 表示异或运算,$v[x,y]$ 表示顶点 v 的第 x 位与第 y 位之间的比特串.$H(v_1,v_2)$ 表示顶点 v_1 与 v_2 之间的汉明距离.



(a) $EH(1,1)$ (b) $EH(1,2)$

图1 $EH(1,1)$ 与 $EH(1,2)$

图 1 所示为 $s=1,t=1$ 和 $s=1,t=2$ 的交换超立方体 $EH(1,1)$ 与 $EH(1,2)$.

3 交换超立方体拓扑性质

定理 1 设 G 为 $(s+t+1)$-标号图,$\forall\, x=x_{s+t}x_{s+t-1}\cdots x_0$,$y=y_{s+t}y_{s+t-1}\cdots y_0\in V(G)$,$s\geqslant 1$,$t\geqslant 1$,则交换超立方体的连接函数可表示为:

$$y=x+\varepsilon_i,\text{其中 } i\in\begin{cases}[t+1,s+t]\cup\{0\}, & \text{若 } x_0=0\\ [1,t]\cup\{0\}, & \text{若 } x_0=1\end{cases}$$

证明 根据交换超立方体的定义,有以下三种情况

(1)当 $x\oplus y=1$ 时,有 $y=x+\varepsilon_0$,此时 $i=0$,$x_0\in\{0,1\}$;

(2)$x_0=0$ 且 $x\oplus y\neq 1$ 时,由于 $x[t:1]=y[t:1]$,$H(x[s+t:t+1],y[s+t:t+1])=1$ 则有 $y=x+\varepsilon_i$,此时 $i\in[t+1,s+t]$;

(3)$x_0=1$ 且 $x\oplus y\neq 1$ 时,由于 $x[s+t:t+1]=y[s+t:t+1]$,$H(x[t:1],y[t:1])=1$,则有 $y=x+\varepsilon_i$,此时 $i\in[1,t]$;

综上可得定理 1. 证毕

定义 2 对于两个标号图 G_1 和 G_2,如果存在一个从 $V(G_1)$ 到 $V(G_2)$ 的双射 ϕ,使得 $(u,v)\in E(G_1)$ 当且仅当 $\phi(u)\phi(v)\in E(G_2)$.则称 ϕ 为从 G_1 到 G_2 的一个同构(isomorphic)映射,并称 G_1 同构于 G_2,记为 $G_1\cong G_2$.

定理 2 设交换超立方体 $EH(s,t)=(V,E)$,$u=u_{s+t}\cdots u_{t+1}u_t\cdots u_1 c\in V$,$*^k$ 表示长度为 k 的所有二进制字符串,则 $*^s u_t\cdots u_1 0\cong Q_s$,$u_{s+t}\cdots u_{t+1}*^t 1\cong Q_t$.

证明 先证明 $*^s u_t\cdots u_1 0\cong Q_s$.

令 φ: $*^s u_t\cdots u_1 0\to Q_s$,使得 $\forall\, u=u_{s+t}\cdots u_1 0\in *^s u_t\cdots u_1 0$,$\varphi(u)=u_{s+t}\cdots u_{t+1}$,显然 φ 是双射.$\forall\, u=*^s u_t\cdots u_1 0$,$v=*^s v_t\cdots v_1 0\in V$,令 $m=\varphi(u)$,$n=\varphi(v)$,则 $m_k=u_{t+k}$,$n_k=v_{t+k}(k=1,2,\cdots,s)$,如果 u 与 v 相邻,根据定理 1,则存在 $j\in[t+1,s+t]$,使得 $v=u+\varepsilon_j$,由于 $m_k=u_{t+k}$,$n_k=v_{t+k}(k=1,2,\cdots,s)$,则有 $m=n+\varepsilon_k(k=1,2,\cdots,s)$,即 $\varphi(u)$ 与 $\varphi(v)$ 相邻,因此 φ 是同构映射.又根据超立方体的连接函数可知,$m,n\in Q_s$,所以有 $*^s u_t\cdots u_1 0\cong Q_s$.

同理,可得 $u_{s+t}\cdots u_{t+1}*^t 1\cong Q_t$. 证毕

根据定理 2 可知,在交换超立方体中,$\forall\, u=u_{s+t}\cdots u_1 0\in V$,如果其第 $u_t\cdots u_1$ 位保持不变,则由点集 $u_{s+t}\cdots u_{t+1}\in *^s$ 所构成的交换超立方的子网与 s 维超立方网同构.对于 $\forall\, v=v_{s+t}\cdots v_1 1\in V$,如果其第 $v_{s+t}\cdots v_{t+1}$ 位保持不变,则由点集 $v_t\cdots v_1\in *^t$ 所构成的交换超立方的子网与 t 维超立方网同构.由此可得推论 1.

推论 1 在交换超立方体中,点集 $*^{s+t}0\in V$ 中包

含 2^t 个子网与 Q_s 同构,点集 $*^{s+t}1\in V$ 中包含 2^s 个子网与 Q_t 同构.

根据推论 1,做出以下定义:

定义 3　令点集 $u=*^{s+t}0\in V$ 组成的与 Q_s 同构的子网为 ehs,即 $ehs=\{u_{s+t}\cdots u_1 0\mid u_{s+t}\cdots u_1 0\in(*^s u_t\cdots u_1 0\cong Q_s)\}$;令点集 $u=*^{s+t}1\in V$ 组成的与 Q_t 同构的子网为 eht,即 $eht=\{u_{s+t}\cdots u_1 1\mid u_{s+t}\cdots u_1 1\in(u_{s+t}\cdots u_{t+1}*^t 1\cong Q_t)\}$.定义 $EHS(s,t)$ 为 $EH(s,t)$ 中所有 ehs 的集合,即 $EHS(s,t)=\{ehs\}$;定义 $EHT(s,t)$ 为 $EH(s,t)$ 中所有 eht 的集合,即 $EHT(s,t)=\{eht\}$.

由推论 1 和定义 3 可知,$V(EH(s,t))=V(EHS(s,t))\cup V(EHT(s,t))$,其中,$EHS(s,t)$ 由 2^t 个 ehs 组成,$EHT(s,t)$ 由 2^s 个 eht 组成.根据定义 1,ehs 之间或 eht 之间的连接方式如图 2 所示.

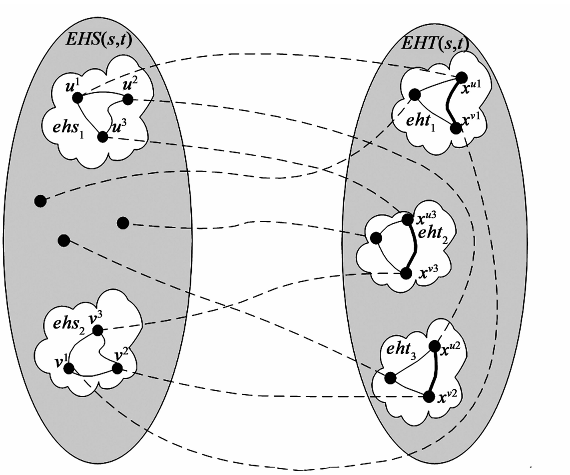


图2　$EH(s,t)$中的$EHS(s,t)$与$EHT(s.t)$

从图 2 可以看到,$EHS(s,t)$中的 ehs 之间是相互独立的,必须跨越 $EHS(s,t)$通过 $EHT(s,t)$中的某些边连接.对于 $EHT(s,t)$中的 eht 之间,也同样需要跨越 $EHT(s,t)$通过 $EHS(s,t)$中的边来连接.图中,虚线表示连接 $EHS(s,t)$与 $EHT(s,t)$中两点的边,实线表示连接同一个 ehs 或 eht 内两点的边,加粗线则表示连接两个 ehs 或 eht 中两点的边.例如图中 ehs_1 与 ehs_2 各点必须通过边 $<x^{ui},x^{vi}>$ 来连接.

在超立方网中有以下两个引理:

引理 1　超立方网中圈的长度最短为 4.

证明　根据超立方网的拓扑特点,以上结论显然成立.　　证毕

引理 2[1]　超立方网中没有长度为奇数的圈.

综合引理 1 和引理 2 可知,超立方网中只有长度≥4 的偶数圈.

一般地,如果圈 $C=<u^1,u^2,\cdots,u^k>$ 中所有的顶点都在图 G 中,则记为 $C\in G$;如果圈 C 中的顶点属于多个图 $G_1,G_2,\cdots,G_n$,则记为 $C\in G_1\cup G_2\cup\cdots G_n$.

定义 4　在 $EH(s,t)$中,$\forall u,v\in EH(s,t)$,如果从 u 到 v 的途径所经过的各顶点两两各不相同,则称该途径为 $EH(s,t)$中的一条初级通路.起点和终点相同的初级通路称为 $EH(s,t)$的圈,表示为 C.

根据定义 4 可知,在 $EH(s,t)$中圈的存在有三种情况,即 $C\in EHS(s,t)$,$C\in EHT(s,t)$及 $C\in EHS(s,t)\cup EHT(s,t)$.

定理 3　交换超立方体 $EH(s,t)$的子网 $EHS(s,t)$和 $EHT(s,t)$中只有长度≥4 的偶数圈.

证明　假设圈 $C=<u^1,u^2,\cdots,u^k>$,根据图 2 可知,如果 $C\in EHS(s,t)$或 $C\in EHT(s,t)$,则一定有 $C\in ehs_i$,$i\in[1,2^t]$或 $C\in eht_j$,$j\in[1,2^s]$,则由定理 2 和引理 1、2 可知,命题成立.　　证毕

定理 4　交换超立方体 $EH(s,t)$中只有长度≥4 的偶数圈 C.

证明

(1)当 $s=1,t=1$ 时,根据图 1(a)可知,$EH(s,t)$是长度为 8 的圈;

(2)当 $s=1,t\geqslant2$ 或 $s\geqslant2,t=1$ 时,易知当 $s=1$ 或 $t=1$ 时,在 $EHS(s,t)$或 $EHT(s,t)$中不存在圈.且为讨论方便,仅考虑 $s=1,t\geqslant2$ 的情况,$s\geqslant2,t=1$ 可类似得到

(ⅰ)若 $C\in EHT(s,t)$,则由定理 3 可知命题成立;

(ⅱ)若 $C\in EHS(s,t)\cup EHT(s,t)$,$\forall u=u_{s+t}\cdots u_{t+1}u_t\cdots u_1 c\in C$,由于 $u^1=u^k$,即 $u^1_{s+t}\cdots u^1_{t+1}u^1_t\cdots u^1_1=u^t_{s+t}\cdots u^t_{t+1}u^t_t\cdots u^t_1$.由引理 2 的证明过程类似可知,$u_{s+t}\cdots u_{t+1}u_t\cdots u_1$ 的改变次数必然为偶数,即由 $u_{s+t}\cdots u_{t+1}u_t\cdots u_1$ 的改变所产生的路数为偶数.又由于圈 C 中如果有路径从 $EHS(s,t)$到 $EHT(s,t)$或从 $EHT(s,t)$到 $EHS(s,t)$,则必然会有路径从 $EHT(s,t)$到 $EHS(s,t)$或从 $EHS(s,t)$到 $EHT(s,t)$返回到起始点,即跨越 $EHS(s,t)$和 $EHT(s,t)$所产生的路数也必然为偶数.综上可知,圈 C 的长也必然为偶数.同时,由于 C 跨越 $EHS(s,t)$和 $EHT(s,t)$,则至少需要三个比特,即 $u_i,i\in[t+1,s+t]$,$u_j,j\in[1,t]$及 c.由此产生的圈长必然大于 4.

综上所述,命题成立.易知,对于 $s\geqslant2,t=1$ 命题同样成立.

(3)当 $s\geqslant2,t\geqslant2$ 时,

(ⅰ)若 $C\in EHS(s,t)$或 $C\in EHT(s,t)$,则由定理 3 可知命题成立;

(ⅱ)若 $C\in EHS(s,t)\cup EHT(s,t)$,由(2)(ⅱ)的证明过程类似可证命题成立.

所以,在交换超立方体 $EH(s,t)$中只有长度≥4 的

偶数圈. 证毕

连通性是图的一个非常重要的性质,决定了当图中出现错误时网络仍能正常通信的能力,即容错性.图的连通度分为点连通度和边连通度.

定义 5[9] 设 G_1 和 G_2 是两个阶数相同的图:$V(G_1)=\{u_1,u_2,\cdots,u_p\}$,$V(G_2)=\{v_1,v_2,\cdots,v_p\}$.令 $H=G_1\odot G_2$,其中,$V(H)=V(G_1)\cup V(G_2)$,$E(H)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup\{(u_i,v_i)\mid u_i\in V(G_1),v_i\in V(G_2),1\leqslant i\leqslant p\}$.

引理 3[5] $EH(s,t)$可分解成两个 $EH(s-1,t)$或 $EH(s,t-1)$.

引理 4[5] $EH(s,t)$中,$c=0$ 的顶点的度为 $s+1$,$c=1$ 的顶点的度为 $t+1$.

引理 5[9] 令 G_1 和 G_2 为定义 5 中的两个连通图,$H=G_1\odot G_2$,则

$$\kappa(H)\geqslant 1+\min(\kappa(G_1),\kappa(G_2))$$

引理 6[10] 对任意图 G,都有

$$\kappa(G)\leqslant\lambda(G)\leqslant\delta(G)$$

定理 5 对于交换超立方体 $EH(s,t)$,有

$$\kappa(EH(s,t))=\lambda(EH(s,t))=\min\{s+1,t+1\}.$$

证明 由定义 5 和引理 3 可知,$EH(s,t)=EH(s-1,t)\odot EH(s-1,t)=EH(s,t-1)\odot EH(s,t-1)$,又根据引理 5 可得

$$\begin{aligned}\kappa(EH(s,t))&\geqslant 1+\kappa(EH(s-1,t))\\&\geqslant 1+[1+\kappa(EH(s-2,t))]\\&\cdots\\&\geqslant(s-1)+\kappa(EH(1,t))\\&\geqslant(s-1)+[1+\kappa(EH(1,t-1))]\\&\cdots\\&\geqslant(s-1)+(t-1)+\kappa(EH(1,1))\end{aligned}$$

根据图 1(a)可知 $EH(1,1)$是 8 长圈,易得 $\kappa(EH(1,1))=2$,且由于 $s\geqslant 1,t\geqslant 1$,所以有 $\kappa(EH(s,t))\geqslant(s-1)+(t-1)+\kappa(EH(1,1))=(s-1)+(t-1)+2=s+t\geqslant\min\{s+1,t+1\}$,再根据引理 4 和引理 6 可得 $\kappa(EH(s,t))\leqslant\lambda(EH(s,t))\leqslant\delta(EH(s,t))=\min\{s+1,t+1\}$,因此 $\kappa(EH(s,t))=\lambda(EH(s,t))=\min\{s+1,t+1\}$. 证毕

4 交换超立方体的嵌入问题

描述嵌入问题的三个指标是扩张率(dilation),拥塞度(congest)和负载(load).如果 $load(G,H)=1$,$congest(G,H)=1$,则称图 G 可同胚嵌入到图 H 中;如果 $load(G,H)=1$,$congest(G,H)=1$,$dilation(G,H)=1$,则称图 G 可同构嵌入到图 H 中.

根据定理 4,可显然得到定理 6.

定理 6 交换超立方体 $EH(s,t)$中只能嵌入长度 $\geqslant 4$ 的偶数圈.

根据定理 2 和推论 1 显然有以下定理 7.

定理 7 交换超立方体 $EH(s,t)$中可以同构嵌入 2^t 个 s 维超立方体,2^s 个 t 维超立方体.

定理 8 给定任意两个长度为 n 的二进制串 $u=u_{n-1}\cdots u_0$,$v=v_{n-1}\cdots v_0$,如果 $u=v+\varepsilon_i$,$i\in[0,n-1]$,且 $n=s+t+1$,则在 $EH(s,t)$中 u 与 v 的关系一定是以下三种情况之一:

(1)$u\in EHS(s,t)$,$v\in EHT(s,t)$且 $u\oplus v=1$;(2)u、$v\in ehs$ 或 u、$v\in eht$,且 u、v 邻接;(3)$u\in ehs_1$,$v\in ehs_2$ 或 $u\in eht_1$,$v\in eht_2$,且 u、v 距离为 3.

证明 根据定义 1 和定义 3 有

(1)若 $i=0$,则有 $u\in EHS(s,t)$,$v\in EHT(s,t)$ 且 $u\oplus v=1$;

(2)若 $u_0=v_0=0$ 且 $i\in[t+1,s+t]$或 $u_0=v_0=1$ 且 $i\in[1,t]$,则 u、$v\in ehs$ 或 u、$v\in eht$;

(3)若 $u_0=v_0=0$ 且 $i\in[1,t]$或 $u_0=v_0=1$ 且 $i\in[t+1,s+t]$,则根据定义 3 可知,$u\in ehs_1$,$v\in ehs_2$ 或 $u\in eht_1$,$v\in eht_2$,又根据定义 1,连接 u、v 需经过 $u_{s+t}\cdots u_i\cdots u_1c\rightarrow u_{s+t}\cdots u_i\cdots u_1\bar{c}\rightarrow u_{s+t}\cdots\overline{u_i}\cdots u_1\bar{c}\rightarrow u_{s+t}\cdots\overline{u_i}\cdots u_1c$,此时 u、v 的距离为 3. 证毕

定理 9 当 $n=s+t+1$ 时,n 维超立方体 Q_n 能够以 $dilation=3$,$congest=2$,$load=1$ 嵌入到交换超立方体 $EH(s,t)$中.

证明 令 $V(Q_n)$到 $V(EH(s,t))$的映射 $\varphi:V(Q_n)\rightarrow V(EH(s,t))$,$\forall u\in V(Q_n)$,$\varphi(u)=u$.明显地,$\varphi$ 是双射.对于$\forall u$、$v\in V(Q_n)$,如果$(u,v)\in E(Q_n)$,则 u 与 v 之间满足 $u=v+\varepsilon_i$,$i\in[0,n-1]$.根据定理 8 可知,对于 $\forall(u,v)\in E(Q_n)$,$\psi((u,v))$总存在,且 $|\psi((u,v))|\leqslant 3$,所以 $dilation(Q_n,EH(s,t))=3$.根据定理 8 中的(3)可知,对于边 $u_{s+t}\cdots u_i\cdots u_1\bar{c}\rightarrow u_{s+t}\cdots\overline{u_i}\cdots u_1\bar{c}$,其既是连接顶点 u、v 所需要经过的一条边,且其自身也对应着超立方体的另一条边 $u_{s+t}\cdots u_i\cdots u_1\bar{c}\rightarrow u_{s+t}\cdots\overline{u_i}\cdots u_1\bar{c}$,因此 $congest(Q_n,EH(s,t))=2$. 证毕

定理 10 当 $n=s+t+1$ 时,$(n-1)$维超立方体 Q_{n-1}能够以 $dilation=3$ 同胚嵌入到 $EH(s,t)$中.

证明 令 $V(Q_{n-1})$到 $V(EH(s,t))$的映射 $\varphi:V(Q_{n-1})\rightarrow V(EH(s,t))$,$\forall u=u_{s+t}\cdots u_{t+1}u_t\cdots u_1\in V(Q_{n-1})$,$\varphi(u)=u_{s+t}\cdots u_1 0$(或 $u_{s+t}\cdots u_1 1$),易知 φ 是双射.根据图 2 和定理 8,对于$\forall(u,v)\in E(Q_{n-1})$,定义

$$\psi((u,v))=\begin{cases}(\varphi(u),\varphi(v)), & 若(\varphi(u),\varphi(v))\in E(ehs)\\(\varphi(u),\varphi(u)+\varepsilon_0)(\varphi(u)+\varepsilon_0,\varphi(u)+\varepsilon_0+\varepsilon_k)(\varphi(u)+\varepsilon_0+\varepsilon_k,v), & \\\quad 若\ \varphi(u)\in ehs_i,\varphi(v)\in ehs_j 且 \varphi(v)=\varphi(u)+\varepsilon_k & \end{cases}$$

由于 $\psi((u,v))$将定理 8(3)中的边 $u_{s+t}\cdots u_i\cdots u_1\bar{c}\rightarrow u_{s+t}\cdots\overline{u_i}\cdots u_1\bar{c}$ 仅限定为连接 u、v 的边,因此实现了同胚嵌入,且 $dilation=3$. 证毕

5 结束语

本文在交换超立方体基本定义的基础上,深入地分析了其结构特点,证明了交换超立方体的部分子网是同构于超立方体的,即交换立方体是局部具有超立方体特性的,并在此基础上提出 $EHS(s,t)$与 $EHT(s,t)$的概念.然后,本文利用 $EHS(s,t)$和 $EHT(s,t)$的概念证明在交换超立方体中,仅存在长度不小于 4 的偶数圈,证明了交换超立方体的点连通度和边连通度是 $s+1$ 和 $t+1$ 两者的较小值,从而为交换超立方体容错性质的研究提供基本依据.本文还在 $EHS(s.t)$和 $EHT(s,t)$概念的基础上,提出在交换超立方体中嵌入超立方体的三种不同策略,证明了 $n=s+t+1$ 时,在交换超立方体 $EH(s,t)$中可以同胚地嵌入超立方体 Q_{n-1}.

由于交换超立方体的网络直径是$(s+t+2)$,而超立方体的变体如交叉立方体(Crossed Cube)的直径都可以达到$\lceil(n+1)/2\rceil$,如果能将这类网络嵌入到交换超立方体中,这将无疑进一步增大交换超立方体的通用性.因此交叉立方体等网络结构在交换超立方体中的嵌入将成为今后研究的重点.此外,还可以根据本文对网络连通性的证明,进一步研究交换超立方体的容错性能.

参考文献

[1] Saad Y, Schultz M H. Topological properties of hypercube [J]. IEEE Trans Comput, 1988, 37(7): 867 – 872.

[2] Kemal Efe. The crossed cube architecture for parallel computation [J]. IEEE Trans on Parallel and Distributed System, 1992, 3(5): 513 – 524.

[3] Ma Mei-jie, Xu Jun-ming. Edge-pancyclicity of crossed cubes [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2005, 35(3): 329 – 333.

[4] Cull P, Larson S M. The M? bius cubes [J]. IEEE Trans Computers, 1995, 44(5): 647 – 659.

[5] Peter K K, Hsu W J, Pan Y. The exchanged hypercube [J]. IEEE Trans on Parallel and Distributed Systems, 2005, 16(9): 866 – 874.

[6] Yu-Wei Chen. A comment on "the exchanged hypercube" [J]. IEEE Trans on Parallel and Distributed Systems, 2007, 18(4): 576.

[7] Yao Chong, Li Ke-qiu, Lin Kai, Shen Yan-ming. Load balancing on the exchanged hypercube [A]. 2009 Fourth ChinaGrid Annual Conference[C]. IEEE, 2009, 32 – 35.

[8] Hsu W J, Chung M J, Hu Z. Guassian networks for scalable distributed systems [J]. The Computer Journal, 1996, 39(5): 417 – 426.

[9] Abdol-Hossein Esfahanian, Lionel M Ni, Bruce E Sagan. The twisted n-cube with application to multiprocessor [J]. IEEE Trans Comput, 1991, 40(1): 88 – 93.

[10] Gray Chartrand, Zhang Ping. Introduction to Graph Theory [M]. 北京:人民邮电出版社, 2007.

作者简介

王新阳 男,1985 年生于山西大同,广西大学计算机与电子信息学院硕士生.研究方向为计算机网络拓扑性质、并行计算、网络容错研究.

E-mail: wxyyuppie@139.com

梁家荣(通信作者) 男,1966 年生于广西玉林,广西大学计算机与电子信息学院教授,博士生导师.研究方向为无线传感器网络、网络可靠性分析.

E-mail: liangjr@gxu.edu.cn