

分数阶傅里叶滤波在欺骗干扰中的应用研究

郭 波, 宋李彬, 周贵良

(南京电子技术研究所, 江苏南京 210039)

摘 要: 分数阶傅里叶变换较之于传统傅里叶变换能更有效地将线性调频信号与噪声分离. 但分数阶傅里叶域频谱能量的聚集性受信号占空比及调频带宽两方面影响, 当占空比较小并且调频带宽很宽时, 往往难以得到尖锐的谱峰. 本文提出短时滑窗方式的分数阶傅里叶滤波方法, 分析了时频域截断对其频谱的影响, 在此基础上提供一种低信噪比情况下线性调频信号的检测准则, 进而详细论述分数阶傅里叶域滤波的流程. 仿真结果表明, 运用这种准流水方式的滤波方法处理盲信号, 信噪比可提高 10dB 以上, 而有用信号的能量损失却极小. 在雷达的欺骗干扰领域应用此方法可提高干扰性能.

关键词: 分数阶傅里叶变换; 时频域截断; 分数阶滤波; 欺骗干扰

中图分类号: TN974 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2012) 07-1328-05

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.07.007

Application Research on Fractional Fourier Filtering in Deception Jamming

GUO Bo, SONG Li-bin, ZHOU Gui-liang

(Nanjing Research Institute of Electronic Technology, Nanjing, Jiangsu 210039, China)

Abstract: The LFM signal and noise could be separated more effectively by FRFT than by traditional FFT. The energy gathering of FRFT spectrum is effected by duty ratio and FM bandwidth. With small duty ratio and wide FM bandwidth, the spectrum peak of FRFT would not be very sharp. The article presents a new slipping window way used in fractional Fourier filtering of LFM signal. The effect of time and frequency intercept in FRFT is also analyzed. A differentiation principle used in LFM signal detection under the condition of low SNR is provided based on the analysis before. Also, the filtering process in fractional Fourier domain is discussed in detail. It is indicated by the emulation result that blind signal could be processed by the filtering way in pipelining mode with little noise energy. The SNR could increase more than 10dB. It also indicates that the effect is improved in radar deception jamming domain.

Key words: fractional Fourier transform (FRFT); time and frequency intercept; fractional filtering; deception jamming

1 引言

分数阶傅里叶变换 (FRFT, Fractional Fourier Transform) 最早由 Wiener 在二十世纪二十年代末开始研究^[1], 但直到八十年代才提出两种严格的数学定义——特征值、特征函数形式^[2]以及积分形式^[3], 为以后的理论推导及应用奠定了基础. 之后人们发现 FRFT 容易在光学系统上实现, 所以在光学领域很快得以广泛运用^[4]. 又因为连续 FRFT 算子 F_α 的特征函数是 Hermite-Gaussian 函数, 此函数由微分方程 $\frac{d^2 f(t)}{dt^2} - 4\pi^2 t^2 f(t) = \lambda f(t)$ 定义, 其算子形式为 $(D^2 + FD^2 F^{-1})f(t) = \lambda f(t)$, ($D = d/dt$, F 表示标准傅里叶变换算子), 与量子力学中谐振子的 Hamiltonian 函数极为相似, 因此 FRFT 很快

应用于量子力学中^[5].

具体到信号处理领域, 1993 年 Almeida 指出 FRFT 可以理解为时频面的旋转^[6], 解决了其在信号处理应用中的物理解释, 随后 Ozaktas 以及台湾的贝书章 (Soo-Chang Pei) 等人提出一系列 FRFT 的离散算法^[7,8], 解决了 FRFT 的快速计算问题, 自此, 信号处理领域 FRFT 的研究才大量涌现.

线性调频信号在雷达领域应用十分广泛, 如脉冲压缩雷达、合成孔径雷达等. 由于电磁波在传播过程中受到各种噪声的干扰, 雷达干扰机接收到的雷达信号与传播噪声混杂甚至被淹没, 若不进行预处理, 对盲信号直接实行转发式干扰会使得相当一部分干扰能量为无用噪声. 因此, 在干扰之前如果能对接收信号实施预处理, 滤除一部分噪声, 可以显著提高干扰效果. 但由于干扰

方在没有先验知识的情况难以预估滤波器参数,普通的带通滤波器对于宽带调频信号几乎没有滤波效果;同时,实际应用中又必须满足实时性要求,必然要求计算不能过于复杂.因此,寻找一种好的滤波方法对于提高宽带线性调频信号的干扰效能意义重大.

由于 FRFT 对于线性调频信号有很好的聚集性,能将信号与噪声有效分离,并且近年来这方面的一些快速算法不断被提出,使得 FRFT 运用于雷达干扰领域的前景越来越广阔.

本文首先从连续 FRFT 出发,探讨信号时频域截断对离散处理的影响,然后给出线性调频信号判别准则和寻找正确阶次的快速方法,详细论述分数阶滤波的实施步骤,最后对滤波前后的信号进行干扰仿真,并比较滤波前后的干扰性能.

2 连续时间分数阶傅里叶变换及时频域截断分析

由于实际系统的存储空间和允许带宽都有限,必然会对信号造成时域和频域截断,因此研究时频域截断对连续 FRFT 的影响显得很有必要.

函数 $x(t)$ 的 p 阶分数阶傅里叶变换的积分形式如下:

$$X_p(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_\alpha e^{j\pi(u^2 \cot\alpha - 2ut \csc\alpha + t^2 \cot\alpha)} x(t) dt \quad (1)$$

其中 $A_\alpha = \sqrt{1 - j \cot\alpha}$, $\alpha = p\pi/2$, $p \neq 2n$, n 为整数.

因为复指数信号的傅里叶变换是冲击函数,即 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$, 令线性调频信号 $x(t) = e^{j(2\pi f_0 t + \pi K t^2 + \varphi_0)}$, 其中 f_0 为调频初始频率, K 为调频斜率(点频信号可以看作是调频斜率为 0 的 Chirp 信号,在本文中不再区分点频与线性调频信号), φ_0 为信号初始相位,代入式(1),并令 $\cot\alpha = -K$, 则:

$$\begin{aligned} X_p(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A_\alpha e^{j\pi(u^2 \cot\alpha - 2ut \csc\alpha + t^2 \cot\alpha)} e^{j(2\pi f_0 t + \pi K t^2 + \varphi_0)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} A_\alpha e^{j\varphi_0} e^{-j\pi u^2 K} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(2\pi t)j(f_0 - u \csc\alpha)} d(2\pi t) \\ &= A_\alpha e^{j\varphi_0} e^{-j\pi u^2 K} \delta(u - f_0 \sin\alpha) \end{aligned} \quad (2)$$

表明线性调频信号的 FRFT 是一冲击函数.

实际信号为有限长,即起始时刻为 0,终止时刻为 t_{end} ,所以实际信号表示为:

$$x(t) = \begin{cases} e^{j(2\pi f_0 t + \pi K t^2 + \varphi_0)}, & 0 \leq t \leq t_{\text{end}} \\ 0, & t < 0 \text{ 或 } t > t_{\text{end}} \end{cases}$$

同样令 $\cot\alpha = -K$, 其 FRFT 为:

$$\begin{aligned} X_p(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A_\alpha e^{j\pi(u^2 \cot\alpha - 2ut \csc\alpha + t^2 \cot\alpha)} x(t) dt \\ &= A_\alpha e^{j\varphi_0} e^{-j\pi u^2 K} \int_0^{t_{\text{end}}} e^{2j\pi t(f_0 - u \csc\alpha)} dt \end{aligned}$$

$$= \frac{j A_\alpha e^{j\varphi_0} e^{-j\pi u^2 K}}{2\pi(u \csc\alpha - f_0)} [e^{2j\pi t_{\text{end}}(f_0 - u \csc\alpha)} - 1] \quad (3)$$

其包络类似 Sinc 函数,幅度谱不再只集中一点.因此对信号的时域截断会造成分数阶傅里叶频谱的泄露.当 $u = u_0 = f_0 \sin\alpha$ 时,利用洛必达法则,得:

$$X_p(u_0) = A_\alpha t_{\text{end}} e^{j\varphi_0} e^{-j\pi u_0^2 K} \quad (4)$$

一般情况,幅度 $|X_p(u)| = \frac{|A_\alpha| \times |e^{2j\pi t_{\text{end}}(f_0 - u \csc\alpha)} - 1|}{2\pi|u \csc\alpha - f_0|}$, 关于峰值点 $u = u_0 = f_0 \sin\alpha$

对称,其第一零点处为 $u = u_0 \pm \frac{\sin\alpha}{t_{\text{end}}}$, 即主瓣宽度为 $\frac{2\sin\alpha}{t_{\text{end}}}$. 频谱的能量与 f_0 无关,令 $f_0 = 0$, 则频谱能量为:

$$\begin{aligned} E(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |X_p(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{+\infty} X_p(u) \times X_p^*(u) du \\ &= |A_\alpha|^2 \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{-j2\pi t_{\text{end}} u \csc\alpha} - 1) \times (e^{j2\pi t_{\text{end}} u \csc\alpha} - 1)}{(2\pi u \csc\alpha)^2} du \\ &= \frac{|A_\alpha|^2 t_{\text{end}}}{\pi \csc\alpha} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi t_{\text{end}} u \csc\alpha)}{(\pi t_{\text{end}} u \csc\alpha)^2} d(\pi t_{\text{end}} u \csc\alpha) \\ &= \frac{|A_\alpha|^2 t_{\text{end}}}{\pi \csc\alpha} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv \\ &= t_{\text{end}} \end{aligned} \quad (5)$$

上式中令 $v = \pi t_{\text{end}} u \csc\alpha$, 并应用了 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 v}{v^2} dv = \pi$.

当 $u = \pm \frac{\sin\alpha}{t_{\text{end}}}$, 即 $v = \pm \pi$ 时,区间内的能量为: $E_{\text{main}}(v) \approx 0.9028 t_{\text{end}}$, 即主瓣能量约占总能量的 90.28%. 当 $f_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $t_{\text{end}} = 1$ 时,式(3)在 $u \in (-10, 10)$ 的幅值如图 1 所示.

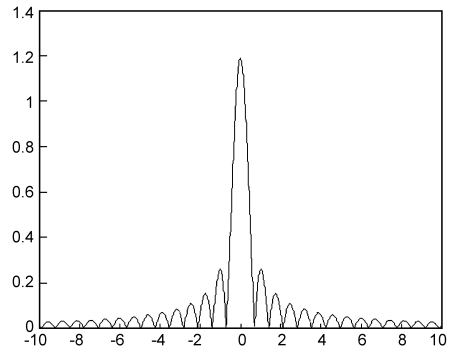


图1 时域截断后的FRFT幅度谱

与傅里叶变换类似,对信号进行离散采样而引起的频域截断会造成分数阶傅里叶域频谱的混叠,在此不再赘述.

3 线性调频信号的判别与阶次寻找

线性调频信号采样后得到 $x(n) = e^{j(2\pi f_0(n/f_s) + \pi K(n^2/f_s^2) + \varphi_0)}$, ($n = 1, \dots, N$), f_s 是采样率, N 为

采样点数.将采样信号延时共轭相乘 $x^*(n) \times x(n+M)$, 得 $e^{j\pi(2f_0/f_s)M + K(M^2/f_s^2)} e^{j2\pi K(M/f_s)n}$, M 为延时点数 ($M < N$), 对其做 FFT 测得峰值点频率 $f = K \frac{M}{f_s}$, 可推出 $K = \frac{f \times f_s}{M}$, 进而求出旋转阶次 $\alpha_0 = \arccot(-K)$, ($0 < \alpha_0 < \pi$). 但由于噪声干扰及采样点数限制, K 不可能测得精确值. 其分辨率如下: 延时相乘后有效点数变为 $N - M$, f 的分辨率为 $\frac{f_s}{N - M}$, 故 K 的分辨率为 $\frac{f_s}{M(N - M)}$, 易求得当 $M = \frac{N}{2}$ 时, K 的精度最高, 为 $\frac{4f_s}{N^2}$. 当然, 测量频率 f 还可用其他方法以提高分辨率.

找出粗略的旋转阶次 α_0 后, 取一个较小的 Δ , 旋转阶次的精确值 α 就在区间 $[\alpha_0 - \Delta, \alpha_0 + \Delta]$ 之内, 在此区间内运用二分法原则选择 α 对 $x(n)$ 做 DFRFT, 比较谱峰的最大值, 如此重复 L 次, α 的阶次精度可达到 $\frac{\Delta}{2^{L-1}}$.

运用上述算法, 不论 Chirp 信号是否存在, 都可以得到一个 α 值. 实际情况中, 往往希望当 Chirp 信号不存在时, 输出结果为零, 此时便需要一种判别信号有无的准则. 下面介绍一种利用上述算法结果进行判别的方法.

由于对信号时频域截断会造成连续 FRFT 频谱的泄漏与混叠, 相应的 DFRFT 的频谱能量聚集性也会降低. 当 Chirp 信号的起始频率位于离散化的相邻频点正中时, 会出现两个幅度相同的峰值, 此时能量聚集性最低, 单峰能量占信号总能量的 40.61%, 图 2 表示 Chirp 信号的起始频率在相邻频点间变换时峰值能量占总能量比重的变化曲线.

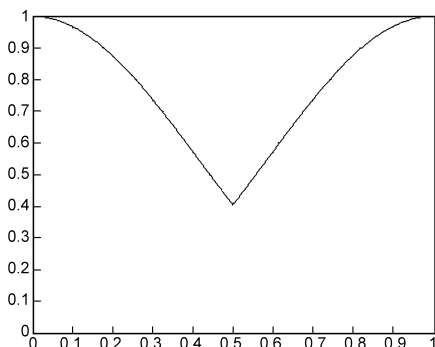


图2 不同起始频率Chirp信号的谱峰能量

当信号 S_p 与噪声 S_n 混合成信号 $S = S_p + S_n$ 时, 选择正确的阶次对 S 作 DFRFT, 会得到图 3 所示谱图.

峰值点能量占总能量的比率为:

$$\frac{E_{\text{peak}}}{E_{\text{sp}} + E_{\text{sn}}} = \frac{\frac{E_{\text{peak}}}{E_{\text{sp}}}}{1 + \frac{1}{\text{SNR}}}$$

式中 E_{peak} 为峰值能量, E_{sp} 为纯净信号的能量, E_{sn} 为噪声能量, 因为噪声在各频率点分布相同, 可以近似认为 E_{peak} 与纯净信号 S_p 的 DFRFT 峰值能量相等, 故有 $(\frac{E_{\text{peak}}}{E_{\text{sp}}})_{\text{min}} \approx 0.4061$, $\frac{E_{\text{peak}}}{E_{\text{sp}} + E_{\text{sn}}} = \frac{0.4061 \times \text{SNR}}{\text{SNR} + 1}$. $\text{SNR} \geq -3\text{dB}$ 时, 峰值能量至少占总能量的 13.54%.

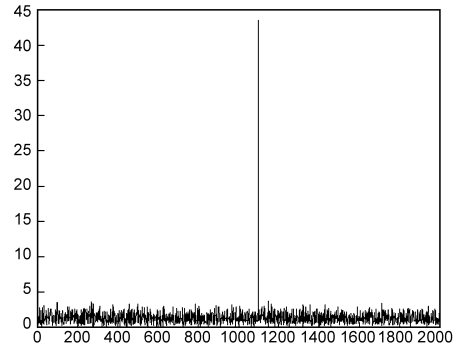


图3 含噪声信号的分分数阶傅里叶变换

因此可以提出一种判别准则: 信噪比高于 -3dB 时, 倘若接收信号 DFRFT 后峰值点能量占信号总能量比率小于 13.54%, 那么可以认为此时间段内不含线性调频信号.

4 分数阶滤波

当检测到信号片段内含有线性调频信号, 并做阶次 p 的 DFRFT, 对变换数据作尖峰遮隔, 只保留谱峰附近的数据点, 其他区域赋零值, 然后对遮隔后的数据做 $-p$ 阶 DFRFT 变换, 即得到滤波后信号的时域数据^[9,10]. 这里的 DFRFT 方法采用 S-C Pei 提出的采样型算法, 这种算法虽然不满足旋转相加性, 但是可逆的, 即对 $X_p(u)$ 做 $-p$ 阶分数阶傅里叶变换可以完全还原信号 $x(t)$.

其结果可由式(6)计算得到:

$$X_p(m) = \sum_{n=-N}^N K_p(m, n) x(n) \quad (6)$$

其中:

$$K_p(m, n) = \sqrt{\frac{\text{sgn}(\sin\alpha)(\sin\alpha - j\cos\alpha)}{2M+1}} \cdot e^{(j/2)\cot\alpha m^2 \Delta u^2} e^{-j\text{sgn}(\sin\alpha)2\pi nm/(2M+1)} e^{(j/2)\cot\alpha n^2 \Delta t^2}$$

$$\alpha = p\pi/2, -M \leq m \leq M.$$

在这种算法里, 要求: $\Delta t \Delta u = \frac{2\pi |\sin\alpha|}{2M+1}$, 且 $\Delta t = \Delta u$.

在实际运用中 $n = 1, \dots, N$, 且所作 DFRFT 点数 $M = N$, 这时对上式变换, 并用 FFT 快速算法, 步骤如下:

(1) 令 $z(n) = e^{(j/2)\cot\alpha n^2 \Delta t^2} x(n)$, ($n = 1, \dots, N$); 然后排序 $z(n) = [z(N), z(1), \dots, z(N-1)]$;

(2) 若 $\sin\alpha > 0$, 则计算 $z(n)$ 的 FFT: $Z(m) = \text{fft}(z(n))$, 若 $\sin\alpha < 0$, 则计算 $z(n)$ 的 IFFT: $Z(m) = N \times \text{ifft}$

$(z(n)), (m = 1, \dots, N)$;

(3) 排序 $Z(m) = [Z(2), \dots, Z(M), Z(1)]$;

(4) 再与 Chirp 信号相乘, 得到 $X_p(m) =$

$$\sqrt{\frac{\text{sgn}(\sin \alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha)}{N}} e^{(j/2)\cot \alpha \Delta u^2} \times Z(m).$$

这种方法的计算量为 $2N + \frac{N}{2} \log_2 N$ 次复数乘法。

上述方法得到的频谱能量聚集性受信号占空比及调频带宽两方面影响, 当占空比较小且调频带宽很宽时上述方法得到的谱峰不再尖锐, 这种情况通常出现在雷达脉冲的边缘处。

在未知信号脉冲前后沿的情况下, 为克服这种弊端, 可以采用短时滑窗的方式。采用这种方式, 在脉冲前后沿, 即使信号占空比较小, 但由于信号片段内的调频带宽较短, 也能保证谱峰聚集, 可以很好地保持脉冲前后沿。例如, 当原始信号信噪比为 3dB, 调频边界为 $\frac{0.1f_s}{2} \sim \frac{0.8f_s}{2}$ 时, 采用每 128 点作为一个信号片段进行短时滑窗处理, 遮隔处理取峰值左右各 4 点, 经滤波后信噪比为 14.23dB, 提高了 11.23dB。根据第二节的分析, 由于时频域截断引起频谱的泄露与混叠, 遮隔处理时会造成能量损失, 但这种能量损耗很小。在上述参数仿真下, 滤波后信号较原始信号能量只降低 3.32%。图 4 为线性调频信号经分数阶滤波前后的波形及频谱。

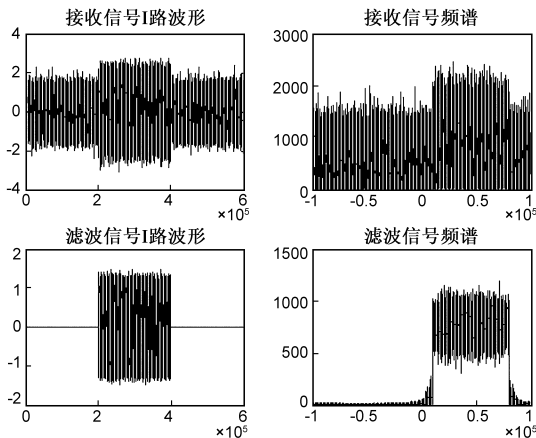


图4 分数阶滤波前后的时频域对比图

采用 128 点 4 遮隔方式, 信噪比为 $-1 \sim 14$ dB 时, 改善因子均大于 10dB, 即噪声能量减小为滤波前的 1/10。从图 5 中可以看出, 信噪比为 3dB 时, 改善效果最大, 达到 11.23dB。图中横轴表示信噪比, 纵轴表示运用此种滤波方式在不同信噪比下的改善因子。

当遮隔参数不同时, 改善因子往往不同, 图 6 左图表示 64 点 2 遮隔方式的改善因子, 右图表示 256 点 8 遮隔方式的改善因子。可以看出: 信号片段点数越多, 改善效果越好。但是此时信号前后沿的畸变也将增大。

在实际运用中, 应根据不同需要选择不同的片段长度。

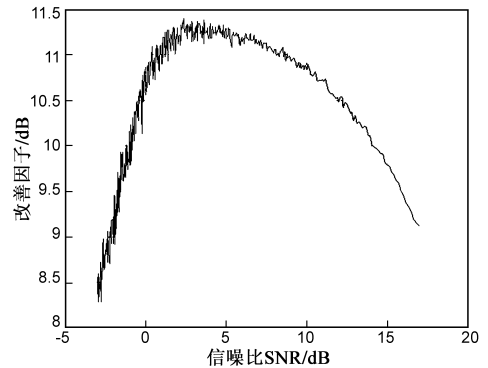


图5 128点4遮隔方式的改善因子

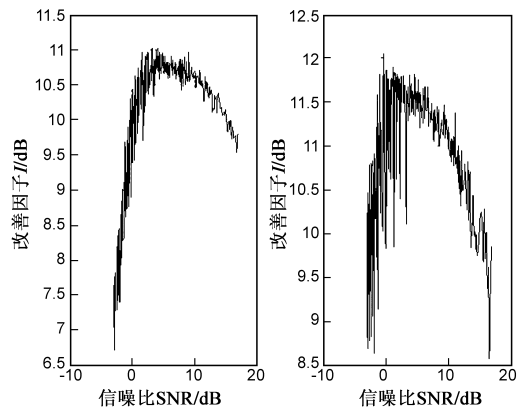


图6 不同遮隔方式的改善因子

5 在雷达欺骗干扰中的应用

在现代雷达对抗领域, 基于卷积调制的高密度假目标欺骗干扰是一种有效的干扰方法, 其处理过程是将接收到的雷达信号与某视频信号相卷积, 再经过放大后转发^[11]。该干扰方法的干扰效果受接收信号质量的影响, 因此提高接收信号的质量对于提高干扰性能具有重要的现实意义。

将分数阶滤波应用在这种干扰模式中, 可以有效提高干扰信号的质量。图 7 是 256 点 8 遮隔方式滤波前后的欺骗信号时域对比图(幅度均作归一化处理)。

可以看出, 使用滤波后信号的欺骗波形, 与纯净信号的欺骗波形大致相同; 而未滤波信号的欺骗波形则畸变严重。同时, 在峰值功率相同的情况下, 分数阶滤波后的欺骗干扰, 有用信号的功率比不作滤波要大, 欺骗效果提高。

图 8 是欺骗信号与原始纯净信号的脉压对比图, 纵轴单位为 dB, 由图中可以看出, 在欺骗干扰信号功率恒定的情况下, 分数阶滤波后可以显著降低脉压基底, 同时提高脉压幅度。

图 9 是 64 点 2 遮隔方式的时域与脉压对比图。由第四节的分析可知此时滤波效果较 256 点 8 遮隔方式

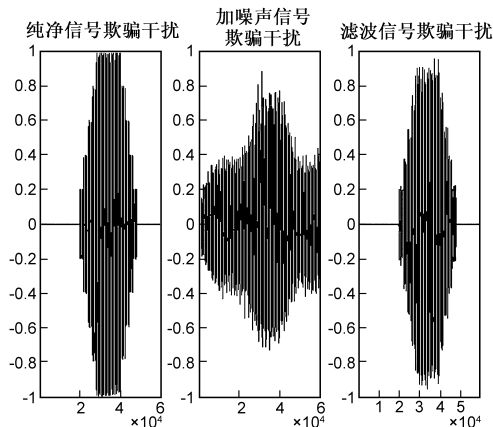


图7 256点4遮隔方式欺骗信号时域对比图

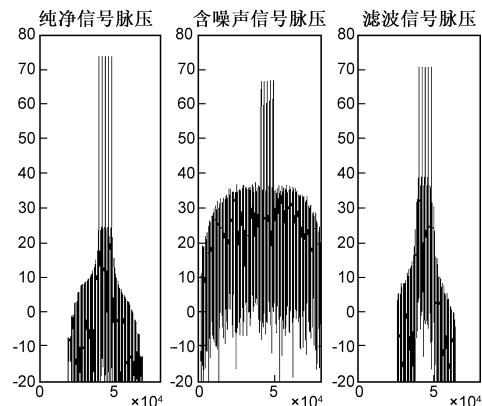


图8 256点4遮隔方式欺骗信号脉压对比图

要差,但是因为经滤波后,噪声已经很小,有用信号的功率较前一种方式几乎未变,所以脉压幅度变化很小,但是脉压基底有所抬升,这与前面的分析是吻合的。

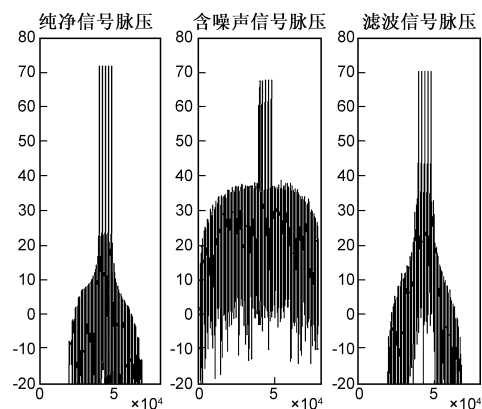


图9 64点2遮隔方式欺骗信号脉压对比图

6 结论

本文运用分数阶傅里叶变换的方法,探讨了对雷达宽带线性调频信号进行预测、滤波进而实施欺骗干扰的方法,论述时域与频域截断对信号能量聚集性的影响,并从频域角度出发,讨论分数阶滤波对于信号还原的效果。通过仿真表明,在通常傅里叶域无法滤波的

线性调频信号,在分数阶傅里叶域能够有效滤除噪声,大幅度提高雷达脉冲的信噪比,增强干扰性能。

参考文献

- [1] N Wiener. Hermitian polynomial and Fourier analysis [J]. Journal of Mathematics Physics MIT, 1926, 18: 70 - 73.
- [2] V Namias. The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics [J]. Journal of the Institute of Mathematics and Its Applications, 1980, 25(3): 241 - 265.
- [3] A C McBride, F H Kerr. On namias' fractional Fourier transform [J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 1987, 39(2): 159 - 175.
- [4] H M Ozaktas, O Aytur. Fractional Fourier domains [J]. Signal Processing, 1995, 46(1): 119 - 124.
- [5] Çagatay Candan, M Alper Kutay, Haldun M Ozaktas. The discrete fractional Fourier transform [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2000, 48(5): 1329 - 1337.
- [6] L B Almeida. The fractional Fourier transform and time-frequency representations [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(11): 3084 - 3091.
- [7] H M Ozaktas, Orhan Arıkan, et al. Digital computation of the fractional Fourier transform [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1996, 44(9): 2141 - 2150.
- [8] S C Pei, J J Ding. Closed-form discrete fractional and affine Fourier transform [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2000, 48(5): 1338 - 1353.
- [9] 陶然, 邓兵, 王越. 分数阶傅里叶变换及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2009. 98-101.
- [10] 赵兴浩, 陶然, 等. 分数阶傅里叶变换的快速计算新方法[J]. 电子学报, 2007, 35(6): 1089-1093.
ZHAO Xing-hao, TAO Ran, et al. New methods for fast computation of fractional Fourier transform [J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(6): 1089 - 1093. (in Chinese)
- [11] 汤礼建, 等. 基于卷积调制的脉内多假目标干扰技术研究[J]. 电子信息对抗技术, 2008, 23(3): 43 - 45.
TANG Li-jian, et al. Multi-fake-target jamming within pulse based on convolution modulation [J]. Electronic Information Warfare Technology, 2008, 23(3): 43 - 45. (in Chinese)

作者简介

郭波 男, 1981年生, 硕士研究生, 工程师, 主要从事雷达电子对抗的信号处理研究. E-mail: Buminghead@sina.com

宋李彬 男, 1973年生, 高级工程师, 主要从事电子对抗侦察与干扰信号处理研究。

周贵良 男, 1982年生, 硕士研究生, 工程师, 主要从事雷达电子对抗的信号产生及处理研究。