

一种设计 IIR 数字滤波器的参数化方法

徐 红¹,李 刚¹,黄朝耿¹,叶 丰²

(1. 浙江工业大学信息工程学院,浙江杭州 310023; 2. 杭州国芯科技股份有限公司,浙江杭州 310012)

摘 要: 基于连续时间状态空间结构和广义双线性变换,提出了一种设计无限冲激响应(IIR)数字滤波器的参数化方法.优点是稳定区域包含了整个参数空间,因此可以采用无约束优化方法.给出了仿真实例,并与已有的设计方法进行了比较,其通带波动、阻带衰减、群延迟等性能更为优越.

关键词: IIR 数字滤波器设计; 状态空间实现; 广义双线性变换; 参数化

中图分类号: TN713 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2012) 04-0847-05

电子学报 URL: http://www.ejournal.org.cn **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.04.037

A Parametric Approach to IIR Digital Filter Design

XU Hong¹, LI Gang¹, HUANG Chao-geng¹, YE Feng²

(1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou, Zhejiang 310023, China;

2. Hangzhou Nationalchip Science&Technology Co. Ltd., Hangzhou, Zhejiang 310012, China)

Abstract: Based on a continuous-time state-space structure and the generalized bilinear transformation(GBT), a parameterization for IIR digital filter design is proposed. The cost function can be minimized without stability monitoring because the corresponding stability region is the entire parameter space. Simulation shows that the performance of the filters obtained with the proposed approach is better than that of those designed with an existing one in terms of passband ripple, stopband attenuation and group delay.

Key words: infinite impulse response(IIR) digital filter design; state-space realization; GBT; parameterization

1 引言

数字滤波器是数字信号处理系统中重要的组成部分.例如在音频系统中,声音信号要经过传声器、调音台、均衡器、功率放大器、音响等设备,见图1.均衡器就是由一系列数字滤波器构成的,其性能的好坏直接影响着整个音频系统的质量,这是因为语言、音乐及自然声等频谱有很大的差别,为在不同情况下突出不同声音的特点,对频段范围要加以限制.所以设计具有平稳带宽、较窄过渡带、较大阻带衰减的数字滤波器对整个系统的实现起到很关键的作用.

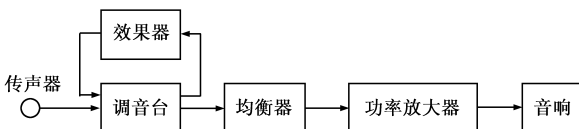


图1 音频系统设备连接方框图

数字滤波器设计的基本问题模型是给定一个期望的频率响应 $D(F)$, 然后去寻找一个稳定的传输函数 $H(z)$:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}} \triangleq \frac{B(z)}{A(z)} \quad (1)$$

使得 $H(e^{j2\pi F})$ 在某种准则下逼近 $D(F)$.有限冲激响应(FIR)数字滤波器由于优化简单,能保证绝对稳定,因此应用广泛^[1,2],但对同样的设计要求,FIR滤波器通常比IIR滤波器需要更高的阶数,因此在某些硬件资源受限的应用中,很难满足要求.但是设计IIR滤波器的代价函数一般是高度非线性的,而且还与滤波器的稳定性有关,因此人们一直在不断研究有效的IIR滤波器设计方法.目前所采用的方法可分为两大类:第一:间接法^[3~7],即先设计出满足特定要求的FIR滤波器,然后利用模型降阶技术转换为低阶的IIR滤波器,这样可以保证其稳定性.但这种方法很难实现精确截止频率的滤波器;第二:直接法^[8~13],即直接对基于 $D(F)$ 所定义的代价函数进行优化.为了同时保证系统的稳定性,可以限制 $z^N A(z)$ 的根在单位圆内,但通常是比较复杂的.而状态空间实现存在一个特殊的性质,即对同一个系统它存在无数种相似变换^[15],而不同的实现结构具有不同的性质,所以,可以应用一些替代的参数化方法简化这

个过程并得到稳定的系统.1998年,Lu基于数字滤波器的级联结构提出了三种指定稳定区域的参数化方法^[11].

一个好的参数化方法应该是完备和紧凸的,完备是指对任何稳定的传输函数都能参数化,紧凸是指参数优化具有唯一性.由于Lu的方法要求式(1)中 $b_0 \neq 0$,所以不是完备的,虽然这一点可以通过对参数模型的修改来解决,但又会引入更多的设计参数.Lu方法的另一个弱点是其参数模型是非紧凸的,这主要是因为系统函数的级联分解不唯一,导致相应的代价函数将面临多模型的问题,引入了过多的驻点.通过对Lu的方法进行仿真我们发现,这种算法很容易停在其中的一个驻点,尤其是在设计高阶滤波器的时候,更不利于得到好的优化结果.受Lu的工作启发,我们基于模拟滤波器的状态方程和GBT,提出了一种参数化方法,其优点在于它是完备和紧凸的,收敛性能更好,且传输函数的极点全部在指定的稳定区域内,设计过程属于无约束非线性规划问题.

2 数字滤波器的直接设计方法

令 $D(F)$ 是期望得到的滤波器频率响应,其中 F 是归一化频率.对于一个给定的参数化方法, $H(z)$ 记为 $H(\theta, z)$,其中 θ 表示相应的设计参数向量.一般 F 取离散值,因此期望的频率响应通常记为 $\{D(F_k)\}$,代价(目标)函数定义为:

$$C(\theta) \triangleq \sum_{k=1}^{N_0} w_k |D(F_k) - H(\theta, e^{j2\pi F_k})|^2 \quad (2)$$

$\{w_k \geq 0\}$ 是加权因子.

最优的滤波器设计问题就是使代价函数最小化,即:

$$\min_{\theta \in S_\theta} C(\theta) \quad (3)$$

若 $H(\theta, z)$ 的第 k 个极点记为 p_k ,则定义:

$$S_\theta \triangleq \{\theta, \text{使得 } |p_k| \leq \rho < 1, \forall k\} \quad (4)$$

表示与极点全部在指定稳定区域 ρ 内的传输函数对应的参数空间,一般 $\rho = 0.995$.

一般来说, S_θ 是整个参数空间的子空间,解决式(3)问题的难点在于 S_θ 一般不能简单的描述.如果可以找到 θ 的可微函数 $g(\theta)$,使得 $S_\theta = \{\theta | g(\theta) < 0\}$,则式(3)可变为:

$$\min_{g(\theta) < 0} C(\theta) \quad (5)$$

此时的优化变得相对方便,但仍然是带约束的非线性规划问题.如果 S_θ 对应的是整个参数空间,则约束问题就变为无约束问题,优化将更加方便.因此,我们的目标是如何得到一种完备且紧凸的参数化方法,并且使 S_θ 能够定义成 $g(\theta) < 0$ 或整个参数空间.

3 设计 IIR 滤波器的参数化方法

根据线性系统理论,一个模拟滤波器的传输函数 $G(s)$ 可以用状态空间实现来表示:

$$G(s) = D + L(sI - \Phi)^{-1}K \quad (6)$$

其中 Φ 为系统矩阵, K 为输入矩阵, L 为输出矩阵, D 为传输矩阵.

本文设计的IIR滤波器是基于下面这种模拟滤波器的结构^[14]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\alpha_1 & 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha_{N-1} & -\alpha_N \end{bmatrix} \\ K = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad \sqrt{2\alpha_N}]^T, \\ L = [l_1 \quad \cdots \quad l_{N-1} \quad l_N], D \in R \end{array} \right. \quad (7)$$

这里, $\alpha_k \in R, k = 1, 2, \dots, N$,对 L 没有特殊的要求.

这种结构参数灵敏度较小,且有限字长效应鲁棒性也很好.其 $G(s)$ 稳定的充要条件^[14,15]为:

$$\alpha_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

定义:

$$\theta \triangleq [\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_N \quad L \quad D]^T \quad (9)$$

显然, $G(s)$ 可以用 θ 来参数化,并且这种参数化方法是完备和紧凸的.

GBT定义为:

$$s = \frac{\rho^{-1}z - 1}{\rho^{-1}z + 1} \quad (10)$$

这里 $\rho > 0$.众所周知, s 平面的左半平面映射到 z 平面是一个圆心在原点、半径为 ρ 的圆.特别地,当 $\rho < 1$ 时,GBT将所有稳定的 $G(s)$ 一一对应地映射到极点在 $|z| \leq \rho$ 内的稳定 $H(z)$ 空间上,见图2,即:

$$H(z) = G(s) \Big|_{s = \frac{\rho^{-1}z - 1}{\rho^{-1}z + 1}} = D + L \left(\frac{\rho^{-1}z - 1}{\rho^{-1}z + 1} I - \Phi \right)^{-1} K \quad (11)$$

因此,式(11)得到的数字滤波器由式(9)中的 θ 参数来决定,只要参数满足式(8),这个数字滤波器就是稳定的,并且有 $1 - \rho$ 的稳定边界.对应的代价函数为:

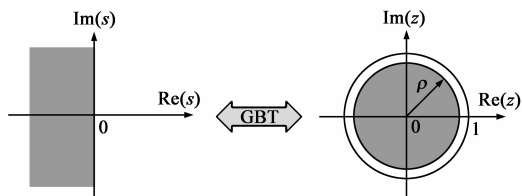


图2 GBT对应的 s 平面与 z 平面的映射关系($\rho < 1$)

$$C(\boldsymbol{\theta}) \triangleq \sum_{k=1}^{N_0} w_k \left| \mathbf{D}(F_k) - [\mathbf{D} + \mathbf{L}(\frac{\rho^{-1}e^{j2\pi F_k} - 1}{\rho^{-1}e^{j2\pi F_k} + 1} \mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi})^{-1} \mathbf{K}] \right|^2 \quad (12)$$

对应的设计问题变为:

$$\begin{cases} \min_{\boldsymbol{\theta}} C(\boldsymbol{\theta}) \\ \text{满足式(8)} \end{cases} \quad (13)$$

这里需要特别指出,在 Lu 的方法中,GBT 是应用于级联结构的每一个二阶子滤波器上,而我们的方法是直接应用于整个 N 阶滤波器 $H(z)$ 上,而此 $H(z)$ 是由一种新的参数 $\boldsymbol{\theta}$ 来决定的.相对 Lu 的方法,我们的方法有如下优点:

- (1) 代价函数梯度的表达式比较简单,在应用优化算法时效率会更高;
- (2) 更少的驻点,可以提高收敛速度;
- (3) 完备的.

4 进一步参数化设计

当我们应用某种优化算法解决式(13)的滤波器设计问题时,需要加入式(8)的限制条件.如果用下面可微的单调递增函数对 $H(z)$ 进一步参数化,则可以去掉约束条件,使优化更简单:

$$\alpha_k \triangleq e^{\beta_k}, \quad \forall k < N, \quad \alpha_N \triangleq \frac{1}{2} e^{2\beta_N} \quad (14)$$

参数向量重新定义为:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} \triangleq [\beta_1 \cdots \beta_N \mathbf{L} \mathbf{D}]^T \quad (15)$$

显然有约束问题变成了无约束问题,优化变得更加方便.

另一方面,在很多应用中,对滤波器的性能要求只关注幅频响应特性,相频响应只要线性就行,即:

$$\mathbf{D}(\tau, F) = e^{-j\tau^2 2\pi F} \mathbf{D}_0(F) \quad (16)$$

这里, $\mathbf{D}_0(F) = \mathbf{D}_0(-F) \geq 0$, 是给定的幅频响应, τ^2 是群迟延.

所以,当给定 τ^2 时,最佳滤波器设计即是在没有任何约束条件下解决下面的最小化问题:

$$\min_{\tilde{\boldsymbol{\theta}}} C(\tilde{\boldsymbol{\theta}}) \quad (17)$$

5 设计举例

下面通过三个例子来验证本文方法设计数字滤波器的性能.在所有的例子中,都先用窗函数法设计一个高阶的 FIR 滤波器,然后通过平衡降阶技术^[6,7],得到对应的低阶 IIR 滤波器近似,把它作为本文方法和 Lu 的方法共同的初始点,然后应用 quasi-Newton 方法进行优化,最后对结果进行比较.

需要指出的是,若 FIR 滤波器的阶数为 M ,则群迟

延 τ^2 取为 $M/2$,这取决于平衡降阶技术.同时,我们规定,所有例子在归一化频率 $[0, 0.5]$ 范围内的采样点数都取 200 个,并且在进行 GBT 时,取 $\rho = 0.995$.

表 1 滤波器的性能要求

	通带边界	阻带边界	通带波动	阻带衰减
例 1(低通)	0.1	0.15	$\leq 0.1\text{dB}$	$\geq 40\text{dB}$
例 2(带通)	0.1, 0.2	0.05, 0.25	$\leq 0.2\text{dB}$	$\geq 40\text{dB}$
例 3(高通)	0.35	0.3	$\leq 0.1\text{dB}$	$\geq 40\text{dB}$

加权因子分别由式(18)~(20)给出:

$$w_{1i} = \begin{cases} 2, & 1 \leq i \leq 41 \\ 0.0005, & 42 \leq i \leq 59 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (18)$$

$$w_{2i} = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq 24, 98 \leq i \leq 200 \\ 2, & 41 \leq i \leq 81 \\ 0.001, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (19)$$

$$w_{3i} = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq 122 \\ 0, & 123 \leq i \leq 139 \\ 2, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (20)$$

三个例子中滤波器都为 10 阶.表 2 对两种方法得到的滤波器进行了比较.图 3~11 中实线为文本的方法,虚线为 Lu 的方法.

表 2 仿真结果比较

	最大通带波动(dB)	最小阻带衰减(dB)	最大通带相位误差(rad)	代价函数
例 1 本文	0.0473	43.43	0.0102	0.0054
例 1 Lu	0.4435	25.05	0.0479	0.0444
例 2 本文	0.1143	41.26	0.0174	0.0242
例 2 Lu	0.2348	20.10	0.0941	0.2127
例 3 本文	0.0614	40.64	0.0031	0.0019
例 3 Lu	0.0963	24.17	0.0184	0.0280

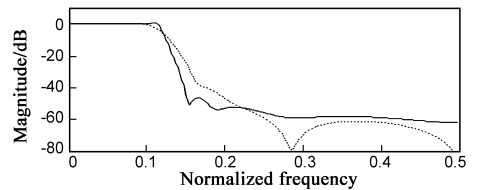


图3 例1的幅频响应

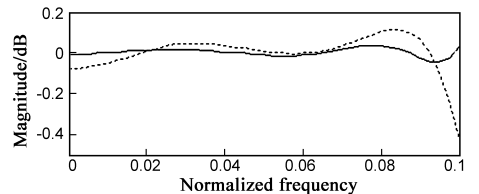


图4 例1的通带波动

从这三个例子可以看到,本文方法得到的滤波器性能要比 Lu 的方法更好,包括通带波动、阻带衰减、群迟延等.

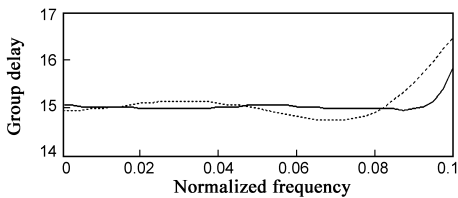


图5 例1的通带群延迟特性

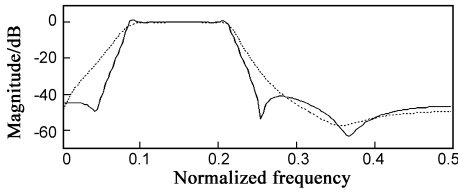


图6 例2的幅频响应

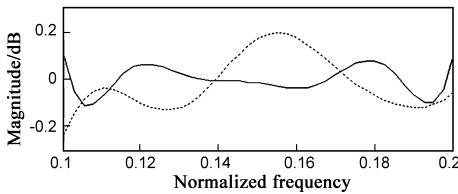


图7 例2的通带波动

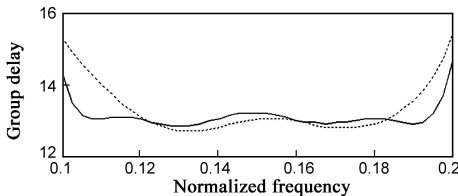


图8 例2的通带群延迟特性

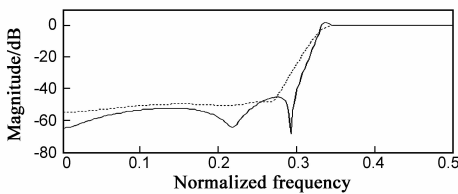


图9 例3的幅频响应

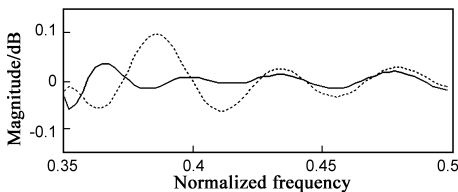


图10 例3的通带波动

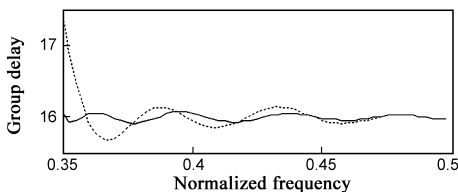


图11 例3的通带群延迟特性

同时通过大量的仿真实例我们发现,对于任意的初始条件, Lu 的方法较难得到满足条件的滤波器,但本文方法却不存在这样的问题.且阶数越高,所提方法较 Lu 方法的优势越明显,这是由于随着阶数的增加, Lu 的方法引入了更多的驻点不利于优化.

6 结语

基于模拟滤波器的状态空间实现和 GBT, 本文提出了一种指定稳定边界的 IIR 滤波器参数化设计方法,它可以方便的应用已有的无约束优化方法.与 Lu 的方法相比,本文的方法具有更少的驻点和更好的收敛性能,通过上一节的例子可以看到,本文方法能够更高效的设计稳定的 IIR 滤波器,使其满足给定的特性要求,对生产实践具有较高的实用价值.

参考文献

- [1] Wu Zhi-jun, Shi Zhen. Filtering LDoS attack by FIR filter[J]. Chinese Journal of Electronics, 2010, 19(2): 275 - 278.
- [2] 马宝山, 朱义胜. 一种用于基因预测的 FIR 数字滤波器[J]. 电子学报, 2007, 35(9): 1710 - 1713.
MA Baoshan, ZHU Yisheng. FIR digital filter for gene prediction application[J]. Acta Electronics Sinicas, 2007, 35(9): 1710 - 1713. (in Chinese)
- [3] N Wong, C U Lei. IIR approximation of FIR filters via discrete-time vector fitting[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2008, 56(3): 1296 - 1302.
- [4] S C Chan, K M Tsui, K W Tse. Design of constrained causal stable IIR filters using a new second-order-cone-programming-based model-reduction technique[J]. IEEE Trans on Circuits and Syst II, 2007, 54(2): 107 - 111.
- [5] H Brandenstein, R Unbehauen. Weighted least-squares approximation of FIR by IIR digital filters[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2001, 49(3): 558 - 568.
- [6] B Beliczynski, I Kale, G D Cain. Approximation of FIR and IIR filters: An algorithm based on balanced model reduction[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1992, 40(3): 532 - 542.
- [7] S Holford, P Agathoklis. The use of model reduction techniques for designing IIR filters with linear phase in the passband[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1996, 44(10): 2396 - 2404.
- [8] X P Lai, Z P Lin. Minimax phase error design of IIR digital filters with prescribed magnitude and phase responses[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2012, 60(2): 980 - 986.
- [9] X P Lai, Z P Lin, H K Kwan. A sequential minimization procedure for minimax design of IIR filters based on second-order factor updates[J]. IEEE Trans on Circuits and Syst II, 2011, 58(1): 51 - 55.
- [10] A Jiang, H K Kwan. IIR digital filter design with new stability constraint based on argument principle[J]. IEEE Trans on Cir-

uits and Syst I, 2009, 56(3): 583 – 593.

- [11] W S Lu. Design of recursive digital filters with prescribed stability margin: A parametrization approach[J]. IEEE Trans on Circuits and Syst II, 1998, 45(9): 1289 – 1298.
- [12] A Jiang, H K Kwan. Minimax design of IIR digital filters using iterative SOCP[J]. IEEE Trans on Circuits and Syst I, 2010, 57(6): 1326 – 1337.
- [13] B Dumitrescu, R Niemistö. Multistage IIR filter design using convex stability domains defined by positive realness [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2004, 52(4): 962 – 974.
- [14] David A Johns, W Martin Snelgrove, Adel S Sedra. Orthonormal ladder filters[J]. IEEE Trans on Circuits and Syst, 1989, 36(3): 337 – 343.
- [15] G Li, M Gevers, Y X Sun. Performance analysis of a new structure for digital filter implementation[J]. IEEE Trans on Circuits and Syst I, 2000, 47(4): 474 – 482.

作者简介



徐 红 女, 1978 年 10 月出生于黑龙江大庆. 2004 年浙江大学获得工学硕士学位, 现工作于浙江工业大学, 博士在读. 主要从事数字滤波器设计方面的研究工作.

E-mail: xhongzxd@zjut.edu.cn



李 刚 男, 教授, 博士生导师. 1961 年 1 月出生于山东淄博. 1982 年在北京工业学院(现北京理工大学)获得学士学位, 1988 年和 1990 年在比利时鲁汶大学分别获得硕士学位和博士学位. 1990 年 11 月至 1992 年 4 月, 在比利时鲁汶大学任博士后研究员, 从事研究工作. 1992 年 5 月至 2007 年 1 月, 在新加坡南洋理工大学电气电子工程学院从事教学与科研工作. 2007 年 2 月作为浙江省“钱江学者”特聘教授进入浙江工业大学信息学院. 主要从事数字系统结构设计、自适应信号处理和信号变换等方面的研究工作.