

# 基于分裂 Bregman 方法的全变差图像去模糊

王 静<sup>1</sup>, 吕 科<sup>1</sup>, 何 宁<sup>2</sup>, 王 茜<sup>1</sup>

(1. 中国科学院研究生院计算与通信工程学院, 北京 100049; 2. 北京联合大学信息学院, 北京 100101)

**摘 要:** 针对全变差图像去模糊问题, 提出一种基于分裂 Bregman 方法的全变差图像去模糊算法, 利用分裂 Bregman 方法来优化其求解问题模型. 首先, 利用辅助变量及其二次惩罚泛函把全变差去模糊优化问题转化为一个等价的无约束优化问题; 其次, 基于 Bregman 迭代将其分解为两个子优化问题采用交替最小化方法进行求解; 最后, 根据子问题结构特点, 采用离散傅立叶变换及收缩技术实现子优化问题的快速计算. 实验结果表明, 在不同尺寸模糊核条件下本文算法能获得有效、稳定的图像复原结果, 相比 FTVd、IRN 去模糊方法, 本文算法复原效果更好, 计算更加快速.

**关键词:** 图像去模糊; 全变差; 分裂 Bregman 方法; 变量分离; 交替最小化方法

**中图分类号:** TN391      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2012) 08-1503-06

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.08.002

## Total Variant Image Deblurring Based on Split Bregman Method

WANG Jing<sup>1</sup>, LÜ Ke<sup>1</sup>, HE Ning<sup>2</sup>, WANG Qian<sup>1</sup>

(1. College of Computing & Communication Engineering, Graduate University of Chinese Academy of Science, Beijing 100049, China;

2. College of Information, Beijing Union University, Beijing 100101, China)

**Abstract:** For total variant image deblurring problem, it was proposed a total variant image deblurring algorithm based on split bregman method, which applied split bregman method to optimizing and solving the problem model. Firstly, taken advantage of auxiliary variable and quadratic penalty function, total variant image deblurring optimization problem was converted into a unconstraint optimization problem. Secondly, based on Bregman iterative, the problem was divided into two sub-problems and use the alternative minimization method to solving. Thirdly, according to the characteristic of subproblem structure, the Discrete Fourier Transform and Shrinkage technologies were used to implement the fast computation of sub-problems. The experimental results indicate that with different size blurry kernels, our algorithm can recover image effectively and steadily. Furthermore, comparing with FTVd and IRN deblurring methods, our algorithm can obtain better recovery results, and compute faster.

**Key words:** image deblurring; total variation; split Bregman method; variable splitting; alternative minimization method

## 1 引言

图像去模糊 (Image Deblurring) 是一类典型的图像复原问题<sup>[1]</sup>. 造成图像模糊退化的主要原因是成像设备的误差 (相机抖动、散焦). 图像去模糊的任务就是依据一定的先验知识 (如: 模糊核), 从已知的模糊图像复原真实图像. 图像模糊退化模型描述如下<sup>[2]</sup>:

$$B = K * I + N \quad (1)$$

$B, I$  分别是模糊图像和真实图像,  $K$  是模糊核矩阵,  $N$  是模糊过程中的噪声影响,  $*$  表示卷积运算. 从退化模型可知, 图像模糊退化过程可以理解为一幅图像与一个模糊核矩阵做卷积运算的结果, 因此图像去模糊可看作是图像模糊的反过程. 然而由于噪声的存在, 图像去模

糊变成了一个病态反问题, 不能用一般的最小二乘方法来简单求解, 而传统的逆滤波、维纳滤波方法也得不到理想的复原结果, 存在振铃 (Ringing) 现象<sup>[3]</sup>.

为了克服去模糊问题本身的病态性, 一类在最小二乘方法模型中加入不同的正则项来调节和改善图像复原效果的正则化方法得到了众多研究者的关注<sup>[4~6]</sup>. 其中, 全变差 (Total Variant, TV) 正则化方法是该类方法的代表, 全变差正则项可以控制复原图像的光滑程度, 能较好地保存图像的边缘细节信息. 该方法最初由 Rudin、Osher 和 Fatemi<sup>[5]</sup> 应用于图像去噪问题, 取得了成功, 而后 Rudin、Osher<sup>[6]</sup> 将全变差扩展到了求解图像去模糊问题, 得到了广泛的研究. 全变差去模糊问题模型描述如下:

$$\min_I \left\{ \| \mathbf{D} \mathbf{I} \|_1 + \frac{\mu}{2} \| \mathbf{K} \mathbf{I} - \mathbf{B} \|_2^2 \right\} \quad (2)$$

式中, 第一项  $\| \mathbf{D} \mathbf{I} \|_1$  就是离散形式的全变差正则项,  $\mathbf{D}$  表示一阶有限差分算子, 因此全变差正则项可看作是图像  $\mathbf{I}$  的梯度的  $L_1$  范数. 第二项  $\| \mathbf{K} \mathbf{I} - \mathbf{B} \|_2^2$  为保真项.  $\mu > 0$ , 是调节前后两项的参数.

全变差图像去模糊问题模型的求解思路是基于变分方法, 把全变差去模糊模型转化为一个偏微分方程来求解. 具有代表性的方法是 Rudin、Osher<sup>[6]</sup> 提出的一种时间追踪策略 (time marching scheme), 以及 Vogel、Oman<sup>[7]</sup> 的定点迭代 (fix point iteration) 方法. 目前的主要求解思路是把全变差去模糊模型看作一个无约束优化问题来优化求解. 例如, Wang Yilun、Yang Junfeng<sup>[8]</sup> 等人基于变量分离方法和半二次惩罚函数法, 提出了一种快速全变差反卷积算法 (Fast Total Variant deconvolution, FTVd) 来计算全变差去模糊问题, 实验结果验证了该算法的有效性, 计算速度快, 且具有较好的复原效果. Manya Fonso、Mário Figueiredo<sup>[9]</sup> 根据增广拉格朗日方法 (Augmented Lagrangian Method, ALM) 来优化全变差复原问题模型, 提出一种分裂增广拉格朗日收缩算法 (Split Augmented Lagrangian Shrinkage Algorithm, SALSA) 来求解. Stanley H Chan<sup>[10]</sup> 采用了一种增广拉格朗日方法的变体——交替方向法 (Alternating Direction Method, ADM) 对全变差模型进行优化求解, 实验结果表明了该方法的鲁棒性. 值得一提的是, Paul Rodriguez<sup>[11]</sup> 提出一种迭代加权范数 (Iteratively Reweighted Norm, IRN) 算法, 通过对全变差问题模型中的范数加权表示成等价的加权范数形式来求解, 实验结果表明了算法的简单有效.

2008 年, Goldstein、Osher<sup>[12]</sup> 提出称为分裂 Bregman 方法的迭代策略, 是一种求解关于  $L_1$  范数正则项优化问题的快速算法. 其基本思路是根据变量分离方法, 借助辅助变量及其二次惩罚泛函把包含  $L_1$  范数正则项的约束优化问题转变为等价的无约束优化问题, 再利用 Bregman 迭代<sup>[13]</sup> 将其分解为几个子优化问题进行交替求解. 该算法的优点在于简化了原问题的求解过程, 且算法收敛速度快. 目前, 其应用主要集中在图像复原问题和基于压缩感知的 MRI 图像稀疏重构问题.

针对全变差图像去模糊问题模型, 本文引入分裂 Bregman 方法来优化求解其问题模型, 提出一种基于分裂 Bregman 方法的全变差图像去模糊算法. 首先利用辅助变量及其二次惩罚泛函把全变差去模糊优化问题转化为一个等价的无约束优化问题, 然后基于 Bregman 迭代将其分解为两个子优化问题采用交替最小化方法进行求解; 接着根据子问题结构特点, 采用离散傅立叶变换及收缩技术实现子优化问题的快速计算. 实验分析中, 在不同尺寸模糊核条件下验证了基于分裂 Bregman

方法的全变差去模糊算法的算法有效性和稳定性, 比较 FTVd、IRN 复原方法, 该算法在图像复原效果及算法计算时间上具有明显的优势.

## 2 分裂 Bregman 方法基本思想

假设一个关于变量  $\mathbf{u}$  的无约束优化问题:

$$\min_{\mathbf{u}} \{ \| \mathbf{l}(\mathbf{u}) \|_1 + f(\mathbf{u}) \} \quad (3)$$

在这里,  $\mathbf{l}(\mathbf{u})$ 、 $f(\mathbf{u})$  都是凸函数. 引入辅助变量  $\mathbf{d}$ , 且令  $\mathbf{d} = \mathbf{l}(\mathbf{u})$ , 得到与其等价的约束优化问题形式:

$$\min_{\mathbf{u}, \mathbf{d}} \{ \| \mathbf{d} \|_1 + f(\mathbf{u}), \text{ s.t. } \mathbf{d} = \mathbf{l}(\mathbf{u}) \} \quad (4)$$

基于变量分离理论, 在式(4)中添加一个有关  $\mathbf{l}(\mathbf{u})$  及其替换变量  $\mathbf{d}$  的二次惩罚项, 可将其转化为关于变量  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{d}$  的无约束优化问题:

$$\min_{\mathbf{u}, \mathbf{d}} \left\{ \| \mathbf{d} \|_1 + \frac{\lambda}{2} \| \mathbf{d} - \mathbf{l}(\mathbf{u}) \|_2^2 + f(\mathbf{u}) \right\} \quad (5)$$

$\lambda > 0$ , 称为惩罚因子. 利用 Bregman 迭代, 式(5)可转化为有关变量  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{d}$  的迭代求解及参数  $\mathbf{b}$  的更新过程:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{d}^{k+1}) = \arg \min_{\mathbf{u}, \mathbf{d}} \left\{ \| \mathbf{d} \|_1 \right. \\ \left. + \frac{\lambda}{2} \| \mathbf{d} - \mathbf{l}(\mathbf{u}) - \mathbf{b}^k \|_2^2 + f(\mathbf{u}) \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mathbf{b}^{k+1} = \mathbf{b}^k + (\mathbf{l}(\mathbf{u}^{k+1}) - \mathbf{d}^{k+1}) \quad (7)$$

由于变量  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{d}$  的优化过程是可分离的, 式(6)可以分解成两个子优化问题来求解. 于是, 得到以下等价的分离形式:

$$\mathbf{u}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{u}} \left\{ \frac{\lambda}{2} \| \mathbf{d}^k - \mathbf{l}(\mathbf{u}^k) - \mathbf{b}^k \|_2^2 + f(\mathbf{u}^k) \right\} \quad (8)$$

$$\mathbf{d}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{d}} \left\{ \| \mathbf{d}^k \|_1 + \frac{\lambda}{2} \| \mathbf{d}^k - \mathbf{l}(\mathbf{u}^{k+1}) - \mathbf{b}^k \|_2^2 \right\} \quad (9)$$

$$\mathbf{b}^{k+1} = \mathbf{b}^k + (\mathbf{l}(\mathbf{u}^{k+1}) - \mathbf{d}^{k+1}) \quad (10)$$

变量  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{d}$  的子优化问题可利用交替最小化方法 (Alternative Minimization Method, AMM) 在迭代过程中交替求解, 参数  $\mathbf{b}$  可以在每次迭代时更新其值. 有关分裂 Bregman 方法的算法收敛性分析和证明详见文献[14].

## 3 基于分裂 Bregman 方法的全变差图像去模糊

为了利用分裂 Bregman 方法来求解全变差去模糊, 全变差图像去模糊优化问题可看作一个无约束优化问题. 故此, 引入辅助变量  $\mathbf{g}$ , 令  $\mathbf{g} = \mathbf{D} \mathbf{I}$ , 式(2)可转换为相应的有关  $\mathbf{I}$  和  $\mathbf{g}$  约束优化模型:

$$\min_{\mathbf{I}, \mathbf{g}} \left\{ \| \mathbf{g} \|_1 + \frac{\mu}{2} \| \mathbf{K} \mathbf{I} - \mathbf{B} \|_2^2, \text{ s.t. } \mathbf{g} = \mathbf{D} \mathbf{I} \right\} \quad (11)$$

添加关于  $\mathbf{I}$  和  $\mathbf{g}$  的二次惩罚项, 得到与式(11)对应的无约束优化模型:

$$\min_{\mathbf{I}, \mathbf{g}} \left\{ \| \mathbf{g} \|_1 + \frac{\lambda}{2} \| \mathbf{g} - \mathbf{D} \mathbf{I} \|_2^2 + \frac{\mu}{2} \| \mathbf{K} \mathbf{I} - \mathbf{B} \|_2^2 \right\} \quad (12)$$

由于  $I$  和  $g$  的优化过程是可分离的,利用 Bregman 迭代,式(12)可以分解成两个子优化问题来求解,于是得到变量  $I$  和  $g$  的迭代求解公式及参数  $b$  的更新:

$$I^{k+1} = \arg \min_I \left\{ \frac{\lambda}{2} \|g^k - DI^k - b^k\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|KI^k - B\|_2^2 \right\} \quad (13)$$

$$g^{k+1} = \arg \min_g \left\{ \|g^k\|_1 + \frac{\lambda}{2} \|g^k - DI^{k+1} - b^k\|_2^2 \right\} \quad (14)$$

$$b^{k+1} = b^k + (DI^{k+1} - g^{k+1}) \quad (15)$$

根据分裂 Bregman 方法,可以利用交替最小化方法来交替求解有关  $I$  和  $g$  的子优化问题,并利用子优化问题在结构上的特点实现对(13)、(14)两式的快速计算.在这里, $I$  的初始值设为  $B$ ,  $g$  和  $b$  的初始值均设为 0. 每一次迭代过程中:

(1)在求解  $I^{k+1}$ 时,式(13)可转化为如下形式的迭代公式:

$$\left( D^T D + \frac{\mu}{\lambda} K^T K \right) I^{k+1} = \frac{\mu}{\lambda} K^T B + D^T (g^k - b^k) \quad (16)$$

由于本文去模糊算法的图像边界条件设定为周期型边界,  $D$  和  $K$  都是块循环矩阵,因此式(16)可利用离散傅立叶变换及其反变换来简化计算,其具体的计算方法请参考文献[2,15],这里不再赘述.

(2)在求解  $g^{k+1}$ 时,根据式(14)的结构特点可利用收缩(Shrinkage)技术来计算,该技术来源于形式如式(17)的一类优化问题的求解:

$$\min_x \frac{\alpha}{2} \|x - y\|^2 + \beta \|x\| \quad (17)$$

其解的形式为:

$$x^* = \max \left\{ \|y\| - \frac{\beta}{\alpha}, 0 \right\} \frac{y}{\|y\|} \quad (18)$$

其中规定  $0 \cdot (0/0) = 0$ . 因此,可得到  $g^{k+1}$ 的求解公式:

$$g^{k+1} = \max \left\{ \|G\|_2 - \frac{1}{\lambda}, 0 \right\} \frac{G}{\|G\|_2} \quad (19)$$

其中  $G = DI^{k+1} + b^k$ .

在这里,变量  $b^{k+1}$ 在迭代过程中随  $I^{k+1}$ 和  $g^{k+1}$ 进行更新.

## 4 实验结果与分析

为了验证算法的有效性和稳定性,一方面选择了  $256 \times 256$  大小的 lena 和 cameraman 两幅灰度仿真图像(见图 1)做为实验数据,在不同大小高斯模糊核 ( $5 \times 5$ 、 $7 \times 7$ 、 $9 \times 9$ 、 $11 \times 11$ )条件下对本文算法进行了测试;另一方面选择了  $512 \times 512$  大小的 lena 和 fruits 两幅彩色仿真图像(见图 2)及  $852 \times 474$  大小的 butterflies 自然图像(见图 3(a))做为实验数据,分别对本文算法及图像去模糊的两种经典算法 FTVd 和 IRN 进行了对比实验.为了客观的评价实验结果,对模糊图像加入了相同的高斯白噪声影响(标准方差为 0.01).实验分析采用了复原图像的信噪比做为客观评价指标,实验平台是 Matlab2009a.

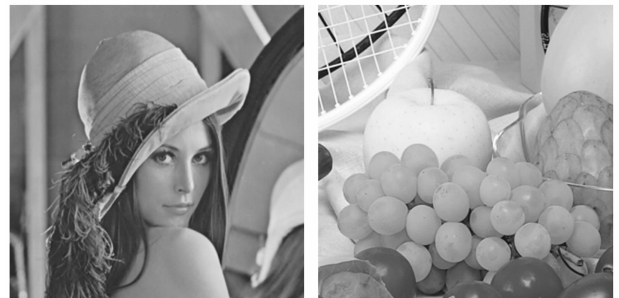
高斯白噪声影响(标准方差为 0.01).实验分析采用了复原图像的信噪比做为客观评价指标,实验平台是 Matlab2009a.



(a) lena

(b) cameraman

图1 仿真图像



(a) lena

(b) fruits

图2 仿真图像



(a) butterflies自然图像



(b) butterflies模糊图像

图3 butterflies自然图像及其模糊图像

图 4 中(a)行图像从左到右依次是 lena 图像与  $5 \times 5$ 、 $7 \times 7$ 、 $9 \times 9$ 、 $11 \times 11$  大小的高斯模糊核卷积得到的模糊图像,(b)行从左到右依次是与其对应的去模糊结果,同样的,(c)行和(d)行则是 cameraman 图像的模糊和复原结果.从视觉效果上来说,复原图像很好的保留了真实图像的边缘细节信息,在模糊核大小逐渐增大的情况下本文算法表现出良好的去模糊效果.图 5 是 lena 和 cameraman 在不同大小模糊核条件下,本文算法在迭代过程中复原图像信噪比的曲线图,从图中可以

看出算法经过较少几次迭代复原图像总能达到一个稳定的信噪比值,算法收敛速度快,且在模糊核大小逐渐

增大的情况下,复原图像的信噪比值相差很小.



(a) lena图像经不同模糊核卷积的模糊图像



(b) lena图像在不同模糊核条件下的去模糊结果



(c) cameraman图像经不同模糊核卷积的模糊图像



(d) cameraman图像在不同模糊核条件下的去模糊结果

图4 不同模糊核条件下lena和cameraman图像的去模糊结果

图6中(a)行从左至右是彩色 lena 图像与  $11 \times 11$  大小高斯模糊核卷积的模糊图像及采用本文算法、FTVd算法和 IRN 算法的去模糊结果.同样的,(b)行则是 fruits 图像的模糊图像及采用本文算法、FTVd算法和 IRN 算法的去模糊结果.图3(b)图是自然图像 butterflies 的模糊图像,其去模糊效果如图7所示.为了更清晰客观的比较算法的性能,分别对 lena、fruits 和 butterflies 模糊图像采用不同去模糊算法得到的复原图像信噪比及

算法计算时间做了统计(见表1、表2和表3).从复原结果及表中统计数据可知,本文算法能得到与 FTVd 算法和 IRN 算法相当甚至更好的复原结果,且算法计算速度更快.

表1 lena 采用不同算法的复原图像信噪比和算法运行时间

	本文算法	FTVd	IRN
信噪比(单位: dB)	15.86	15.37	15.69
算法计算时间(单位: s)	15.49	18.14	37.72

表 2 fruits 采用三种不同算法的复原图像信噪比和算法运行时间

	本文算法	FTVd	IRN
信噪比(单位: dB)	16.53	15.83	15.34
算法计算时间(单位: s)	15.63	22.17	38.22

表 3 butterflies 采用三种不同算法的复原图像信噪比和算法运行时间

	本文算法	FTVd	IRN
信噪比(单位: dB)	15.66	15.39	14.83
算法计算时间(单位: s)	29.97	40.31	56.72

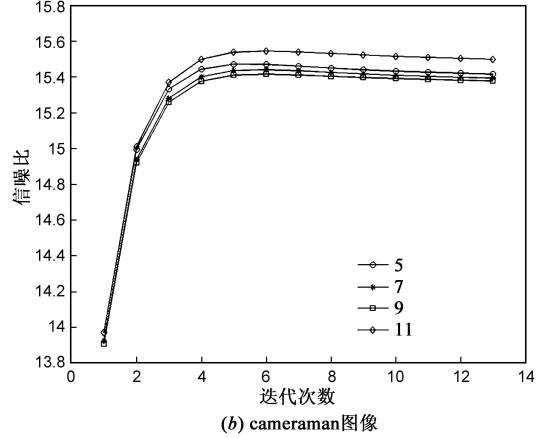
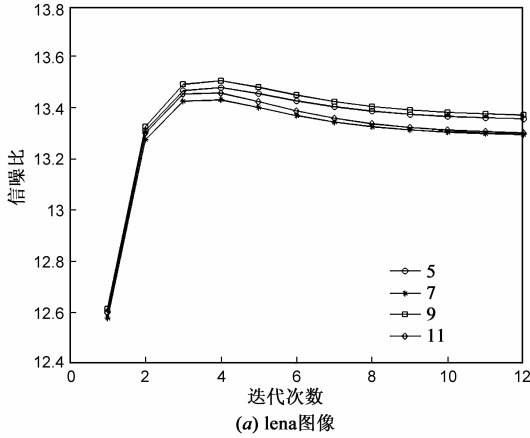
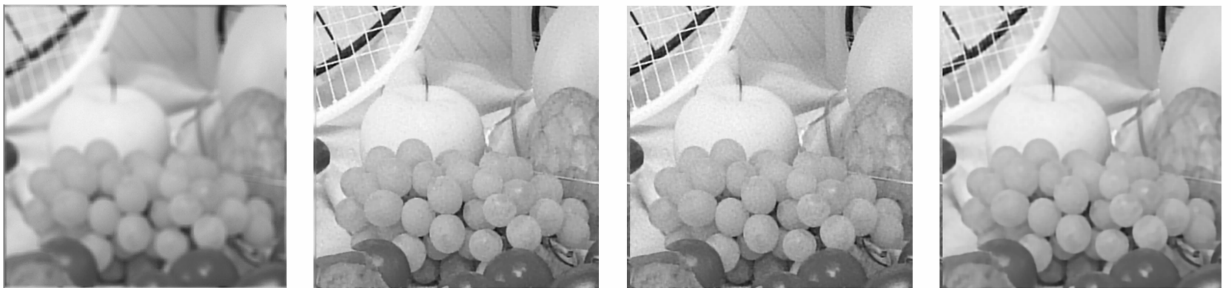


图 5 不同模糊核条件下去模糊结果的信噪比



(a) lena 的模糊图像及采用本文算法、FTVd 算法和 IRN 算法的去模糊结果



(b) fruits 的模糊图像及采用本文算法、FTVd 算法和 IRN 算法的去模糊结果

图 6 lena 和 fruits 采用本文算法、FTVd 算法、IRN 算法去模糊结果



(a) 本文算法



(b) FTVd 算法



(c) IRN 算法

图 7 butterflies 采用不同去模糊算法的复原结果

综合上述的实验分析结果,本文算法在模糊核逐渐增大的情况下,均能得到良好的去模糊效果,验证了

算法的有效性;且相比 FTVd、IRN 两种经典的去模糊算法,本文算法计算更加快速,具有更强的实时处理能

力.

## 5 结论

本文针对经典的图像去模糊问题,提出了一种基于分裂 Bregman 方法的全变差图像去模糊算法.

该算法根据分裂 Bregman 方法,先利用辅助变量及其二次惩罚泛函把全变差去模糊优化问题转化为一个等价的无约束优化问题,然后基于 Bregman 迭代将其分解为两个子优化问题采用交替最小化方法进行求解;最后根据子问题结构特点,采用离散傅立叶变换及收缩技术实现子优化问题的快速计算.该算法能够对一般的模糊图像得到有效的复原结果,算法计算速度快,适合实时处理的情况.需要说明的是,在噪声影响过大的情况下,本文算法的去模糊效果会有所下降,这将在以后的研究工作中做进一步的改进.

## 参考文献

- [1] A K Katsaggelos. Digital Image Restoration[M]. New York: SpringerVerlag, 1991.
- [2] P Hansen, J G Nagy, et al. Deblurring Images: Matrices, Spectra, and Filtering[M]. Philadelphia, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006.
- [3] J Biemond, R L Lagendijk, et al. Iterative method for image deblurring[J]. Proceedings of the IEEE, 1990, 78(5): 856 - 883.
- [4] A Tikhonov, V Arsenin. Solution of Ill-Posed Problems[M]. Washington DC: V.H. Winston & Sons, 1977.
- [5] L Rudin, S Osher, E Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithm[J]. Physica D, 1992, 60: 259 - 268.
- [6] L Rudin, S Osher. Total variation based image restoration with free local constraints[J]. IEEE ICIP, 1994, 1: 31 - 35.
- [7] C R Vogel, M E Oman. Fast, robust total variation based reconstruction of noisy, blurred images [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7: 813 - 824.
- [8] Y L Wang, J F Yang, et al. A new alternating minimization algorithm for total variation image reconstruction[J]. SIAM Journal on Image Sciences, 2008, 1(3): 248 - 272.
- [9] M Afonso, M Figueiredo. Fast image recovery using variable splitting and constrained optimization[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19: 2345 - 2356.

- [10] S H Chan, P E Gill, et al. An augmented lagrangian method for total variation image restoration [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 20(11): 3097 - 3117.
- [11] P Rodriguez, B Wohlberg. Efficient minimization method for a generalized total variation functional[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2009, 18: 322 - 332.
- [12] T Goldstein, S Osher. The split bregman algorithm for L1 regularized problems [J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2009, 2(2): 323 - 343.
- [13] S Osher, M Burger, et al. An iterative regularization method for total variation-based image restoration [J]. Multiscale Modeling and Simulation, 2005, 4(2): 460 - 489.
- [14] 李亚峰, 冯象初. L1 投影问题的分裂 Bregman 方法 [J]. 电子学报, 2010, 38(11): 2471 - 2475.  
Li Ya-feng, Feng Xiang-chu. The split bregman method for L1 projection problems [J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(11): 2471 - 2475. (in Chinese)
- [15] J F Yang, W T Yin, et al. A class of fast algorithm for total variation image restoration [CP/OL]. [http://cnx.org/content/m19059/1.2/centent\\_info](http://cnx.org/content/m19059/1.2/centent_info), 2008-12-26.

## 作者简介



王 静 女, 1984 年出生, 河南省周口市人, 博士研究生, 主要研究方向为数字图像处理.  
E-mail: wangjing09b@mails.gucas.ac.cn



吕 科 男, 1971 年出生, 宁夏西吉人, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为数字图像处理、计算机图形学、智能信息处理技术.  
E-mail: luk@gucas.ac.cn