

# 基于 OSV 分解的图像多尺度特征表示

李 敏, 徐 晨

(深圳大学数学与计算科学学院, 广东深圳 518060)

**摘 要:** 本文给出一种新的图像多尺度表示算法. 首先, 应用 OSV 模型得到图像的单尺度分解; 其次, 针对上一步的信息亏损, 引入不同的单调尺度参数, 迭代 OSV 变分模型, 从而为图像的不同特征提供一种非线性的分级自适应表达式. 同时, 本文也给出有关新算法的离散格式. 数值实验表明, 与已有的 Nezzar 算法相比, 新算法的多尺度分解效果更佳.

**关键词:** 多尺度分解; OSV 模型; 变分极小化

**中图分类号:** TN911      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2012)04-0769-04

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.04.024

## A Multiscale Image Representation Based on OSV Decomposition

LI Min, XU Chen

(College of Mathematics and Computational Science, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China)

**Abstract:** We propose a new multiscale image representation based on OSV model. We obtain with OSV model, in which we give single scale decomposition. Then we give a hierarchical adaptive representation for the different features in images by iterating OSV model for different monotone scale parameters, applying the decomposition to the residual information of the previous step. The result multiscale decomposition is nonlinear. We discuss the numerical discretization of the new method. The numerical results show an excellent decomposition effect and significant improvement over Nezzar method.

**Key words:** multiscale decomposition; OSV model; variational minimization

### 1 引言

图像分析中一个很重要的问题就是区分图像中不同的特征. 近来, 图像分解成为低层视觉和图像处理中一项新的前沿领域. 从本质上讲, 图像分解是对图像恢复研究的深入, 可以将其看作一个反问题, 因此可以用变分 PDE 的方法分解图像.

在分解任务中, 通常考虑的线性模型为

$$f = u + v.$$

其中,  $u$  是真实图像,  $v$  是加性噪声或纹理,  $f$  是观测图像, 它由同质均匀区域, 轮廓和振荡模式组成. 在变分 PDE 中, 获取结构  $u$  的经典方法是 Rudin-Osher-Fatemi 的全变差极小化模型(简称 ROF 模型)<sup>[2]</sup>:

$$\inf F(u) = \lambda \int_{\Omega} (f - u)^2 dx dy + \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy \quad (1)$$

其中,  $\lambda > 0$  是尺度参数, 第一项是忠诚项, 第二项是正则项, 通常被称为全变差(简称 TV). 假设  $u \in BV(\Omega)$ , 那么上述能量(1)有限并存在极小值. 虽然, 该模型能够

有效地解决保持边缘和抑制噪声这一对矛盾, 但是尺度参数  $\lambda$  的选取却依赖于噪声层的先验知识. 当  $\lambda$  很小时, 图像中有意义的小纹理或振荡细节就会完全被丢弃; 相反, 当  $\lambda$  很大时, 观测图像  $f$  几乎不发生任何改变.

针对 ROF 模型的不足, Meyer 建议用有界变差空间(简称 BV 空间)的对偶空间对图像纹理等细小特征建模, 提出了基于 TV 极小化框架下的振荡函数建模理论<sup>[3]</sup>. 但是, 遗憾的是 Meyer 理论模型并不存在可行的数值求解. 于是, 激发人们去探求其相应的数值松弛模型<sup>[5-14]</sup>. 例如 Vese-Osher 建议用  $L^p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) 向量场的一阶导数刻画振荡成分  $v$ (简称 VO 模型)<sup>[4]</sup>. Osher 等建议用齐次 Sobolev 空间  $\dot{H}^1(\Omega)$  的二阶导数来刻画  $v$ (简称 OSV 模型)<sup>[5]</sup>, 即

$$\begin{aligned} \inf F(u) &= \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy + \lambda \int_{\Omega} |\nabla \Delta^{-1}(f - u)|^2 dx dy \\ &= \|u\|_{BV(\Omega)} + \lambda \|f - u\|_{\dot{H}^{-1}(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (2)$$

众所周知, 对于任何一幅真实图像(通常被认为是

$L^2$  中的目标),最明显的特征莫过于边缘.于是,人们采用有界变差空间  $BV \subset L^2$  来量化边缘特征.但是,除边缘外,每一幅真实图像也会包含一些介于同质均匀区域  $u$  与振荡模式(纹理或噪声)  $v$  间的其它特征.从数学角度讲,包含这些特征的图像应该属于  $L^2$  与  $BV$  间的插值空间.因此,量化包含这些特征的  $L^2$  子类就成为令人感兴趣的问题.例如,Suzanne Nezzar 针对 ROF 模型给出基于  $(L^2, BV)_\theta (\theta \in [0, 1])$  的图像特征刻画<sup>[1,6]</sup>.受上述问题驱动,本文考虑基于 OSV 模型的一种多尺度特征分解,即图像在插值空间  $(BV, H^{-1})_\theta (\theta \in [0, 1])$  中的分级表示方法.

## 2 基于 OSV 模型的图像多尺度特征表示

已知  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $\lambda > 0$  为起始参数(其作用是捕获  $f$  中的最小振荡尺度).假设  $u_\lambda$  是 OSV 模型(2)的极小值,  $v_\lambda := f - u_\lambda$ , 那么就有  $f = u_\lambda + v_\lambda$ . 其中,  $u_\lambda \in BV(\Omega)$ ,  $v_\lambda \in L^2(\Omega)$  并且  $\int_\Omega v_\lambda dx dy = 0$ <sup>[5]</sup>. 换言之,极小化问题(2)就可以被解释为单尺度分解  $f = u_\lambda + v_\lambda$ . 其中,  $u_\lambda$  提取包含边缘的结构,  $v_\lambda$  表示纹理.

用  $v_\lambda$  和  $2\lambda$  分别代替(2)中的  $f$  和  $\lambda$ , 那么,相应的极小化问题为

$$\inf_{u \in BV(\Omega)} F_{2\lambda}(u) = \int_\Omega |\nabla u| dx dy + 2\lambda \int_\Omega |\nabla \Delta^{-1}(v_\lambda - u)|^2 dx dy \quad (3)$$

其中,  $u_{2\lambda}$  为极小值,  $v_{2\lambda}$  为纹理成分, 并且  $v_{2\lambda} := v_\lambda - u_{2\lambda}$ . 这表明  $u_{2\lambda}$  和  $v_{2\lambda}$  之间的差别在于对尺度的依赖, 即在已知尺度  $\lambda$  下的纹理  $v_\lambda$  包含了细尺度  $2\lambda$  下的重要边缘信号  $u_{2\lambda}$ . 这样,我们就获得了图像  $f$  的两尺度表示方式:

$$f = u_\lambda + v_\lambda = u_\lambda + u_{2\lambda} + v_{2\lambda}$$

同理,在尺度  $2\lambda$  下仍有未被决定的纹理和边缘. 因此重复上述过程(3).

假设  $\lambda_n = 2^n \lambda$ , 在第  $n (n \geq 0)$  步时,有  $v_{\lambda_{n-1}}$  和相应的

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u_{\lambda_{n+1}}}{|\nabla u_{\lambda_{n+1}}|} \right) &= \frac{u_{\lambda_{n+1}, i+1, j} - u_{\lambda_{n+1}, i, j}}{h^2 \sqrt{e^2 + \left( \frac{u_{\lambda_{n+1}, i+1, j} - u_{\lambda_{n+1}, i, j}}{h} \right)^2 + \left( \frac{u_{\lambda_{n+1}, i, j+1} - u_{\lambda_{n+1}, i, j-1}}{2h} \right)^2}} \\ &\quad - \frac{u_{\lambda_{n+1}, i, j} - u_{\lambda_{n+1}, i-1, j}}{h^2 \sqrt{e^2 + \left( \frac{u_{\lambda_{n+1}, i, j} - u_{\lambda_{n+1}, i-1, j}}{h} \right)^2 + \left( \frac{u_{\lambda_{n+1}, i-1, j+1} - u_{\lambda_{n+1}, i-1, j-1}}{2h} \right)^2}} \\ &\quad + \frac{u_{\lambda_{n+1}, i, j+1} - u_{\lambda_{n+1}, i, j}}{h^2 \sqrt{e^2 + \left( \frac{u_{\lambda_{n+1}, i+1, j} - u_{\lambda_{n+1}, i-1, j}}{2h} \right)^2 + \left( \frac{u_{\lambda_{n+1}, i, j+1} - u_{\lambda_{n+1}, i, j}}{h} \right)^2}} \end{aligned}$$

极小化问题:

$$\inf_{u \in BV(\Omega)} F_{\lambda_n}(u) = \int_\Omega |\nabla u| dx dy + \lambda_n \int_\Omega |\nabla \Delta^{-1}(v_{\lambda_{n-1}} - u)|^2 dx dy \quad (4)$$

其中,  $u_{\lambda_n}$  表示极小值,  $v_{\lambda_n} := v_{\lambda_{n-1}} - u_{\lambda_n}$ . 这样,  $f$  在  $n$  步迭代后的多尺度分解为:

$$\begin{aligned} f &= u_{\lambda_0} + v_{\lambda_0} = u_{\lambda_0} + u_{\lambda_1} + v_{\lambda_1} = u_{\lambda_0} + u_{\lambda_1} + u_{\lambda_2} + v_{\lambda_2} = \dots \\ &= u_{\lambda_0} + u_{\lambda_1} + u_{\lambda_2} + \dots + u_{\lambda_{n-1}} + u_{\lambda_n} + v_{\lambda_n} \end{aligned}$$

其中,  $\lambda_0 = \lambda$ .

综上所述,就获得图像  $f$  独立于先验参数的一种非线性多尺度表示:  $f \sim u_{\lambda_0} + u_{\lambda_1} + u_{\lambda_2} + \dots + u_{\lambda_{n-1}} + u_{\lambda_n}$ . 随着迭代次数  $n$  的增加,  $u_{\lambda_n}$  提取了渐增尺度  $2^n \lambda$  时的特征. 假设  $(BV, H^{-1})$  表示一般的插值空间, 那么,多尺度分解  $f \sim \sum_j u_{\lambda_j}$  就量化了图像在插值空间  $(BV, H^{-1})_\theta (\theta \in [0, 1])$  中的一大类特征. 其中,  $BV \subset H^{-1}$ ,  $(BV, H^{-1})_{\theta=0} = H^{-1}$ ,  $(BV, H^{-1})_{\theta=1} = BV$ .

## 3 基于 OSV 模型多尺度分解算法的数值离散

在多尺度分解算法中,需要考虑的变分问题为

$$\inf_{u \in BV(\Omega)} F_{\lambda_{n+1}}(u) = \int_\Omega |\nabla u| dx dy + \lambda_{n+1} \int_\Omega |\nabla \Delta^{-1}(v_{\lambda_n} - u)|^2 dx dy$$

其相应的 Euler-Lagrange 方程为

$$\begin{aligned} u_{\lambda_{n+1}} &= v_{\lambda_n} - \frac{1}{2\lambda_{n+1}} \Delta \left[ \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u_{\lambda_{n+1}}}{|\nabla u_{\lambda_{n+1}}|} \right) \right], \\ \frac{\partial u_{\lambda_{n+1}}}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} &= 0, \quad \frac{\partial \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u_{\lambda_{n+1}}}{|\nabla u_{\lambda_{n+1}}|} \right)}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

其中,  $n \geq 0$ ,  $\lambda_0 = \lambda$ ,  $v_{\lambda_0} = f$ . 假设  $h > 0$  表示空间步长,  $(ih, jh)$  表示离散点  $(0 \leq i, j \leq M)$ . 那么,经典的表示形式为:  $u_{i, j} \approx u(ih, jh)$ . 为了避免(5)中分母  $|\nabla u_{\lambda_{n+1}}| = 0$ , 采取参数提升梯度, 即  $|\nabla u_{\lambda_{n+1}}|_e = \sqrt{|\nabla u_{\lambda_{n+1}}|^2 + e^2}$  ( $e > 0$ ). 因此,散度算子  $\operatorname{div}(\cdot)$  的离散格式为

$$-\frac{u_{\lambda_{n+1},i,j} - u_{\lambda_{n+1},i,j-1}}{h^2 \sqrt{e^2 + \left(\frac{u_{\lambda_{n+1},i+1,j-1} - u_{\lambda_{n+1},i-1,j-1}}{2h}\right)^2 + \left(\frac{u_{\lambda_{n+1},i,j} - u_{\lambda_{n+1},i,j-1}}{h}\right)^2}}$$

令  $D_{\lambda_{n+1}} = \text{div}\left(\frac{\nabla u_{\lambda_{n+1}}}{|\nabla u_{\lambda_{n+1}}|}\right)$ , 拉普拉斯算子  $\Delta(\cdot)$  的

离散格式为

$$\Delta D_{\lambda_{n+1}} = -4D_{\lambda_{n+1},i,j} + D_{\lambda_{n+1},i-1,j} + D_{\lambda_{n+1},i+1,j} + D_{\lambda_{n+1},i,j-1} + D_{\lambda_{n+1},i,j+1}$$

### 4 数值实验

在这部分实验中,采用纹理特征丰富的 Barbara 截取图来检验新算法. 首先, 阐述纹理图像的多尺度分解, 其中,  $\lambda_0 = 0.013$ , 提升梯度参数  $e$  取为 0.00001. 图 1 分别给出原始图像和噪声图像, 其中白噪声方差  $\sigma$  为

20, 信噪比 (SNR) 为 14.1954; 同时也给出原始图像迭代 9 次的分解结果和原始图像在迭代 9 次过程中不同尺度  $\lambda_i (0 \leq i < 9)$  上  $v_{\lambda_i}$  的表示. 实验结果表明: 新算法可以有效克服 OSV 模型中存在的信号亏损 (即 OSV 模型准备丢弃的特征  $v_{\lambda}$  中依然含有少量有用信息比如边缘和纹理, 见图  $v_{\lambda_0}$ ). 具体地讲就是, 随着迭代次数的增加和尺度参数的改变 (即  $\lambda \rightarrow \lambda_n = 2^n \lambda$ ), 新算法可以将每个尺度上失去的特征  $v_{\lambda_i}$  逐步添加到下一尺度得到的图像  $u_{\lambda_i}$  中. 当迭代次数达到无穷大时, 均方误差就趋于零, 这时失去的纹理特征为零, 得到的处理结果就是原始图像.

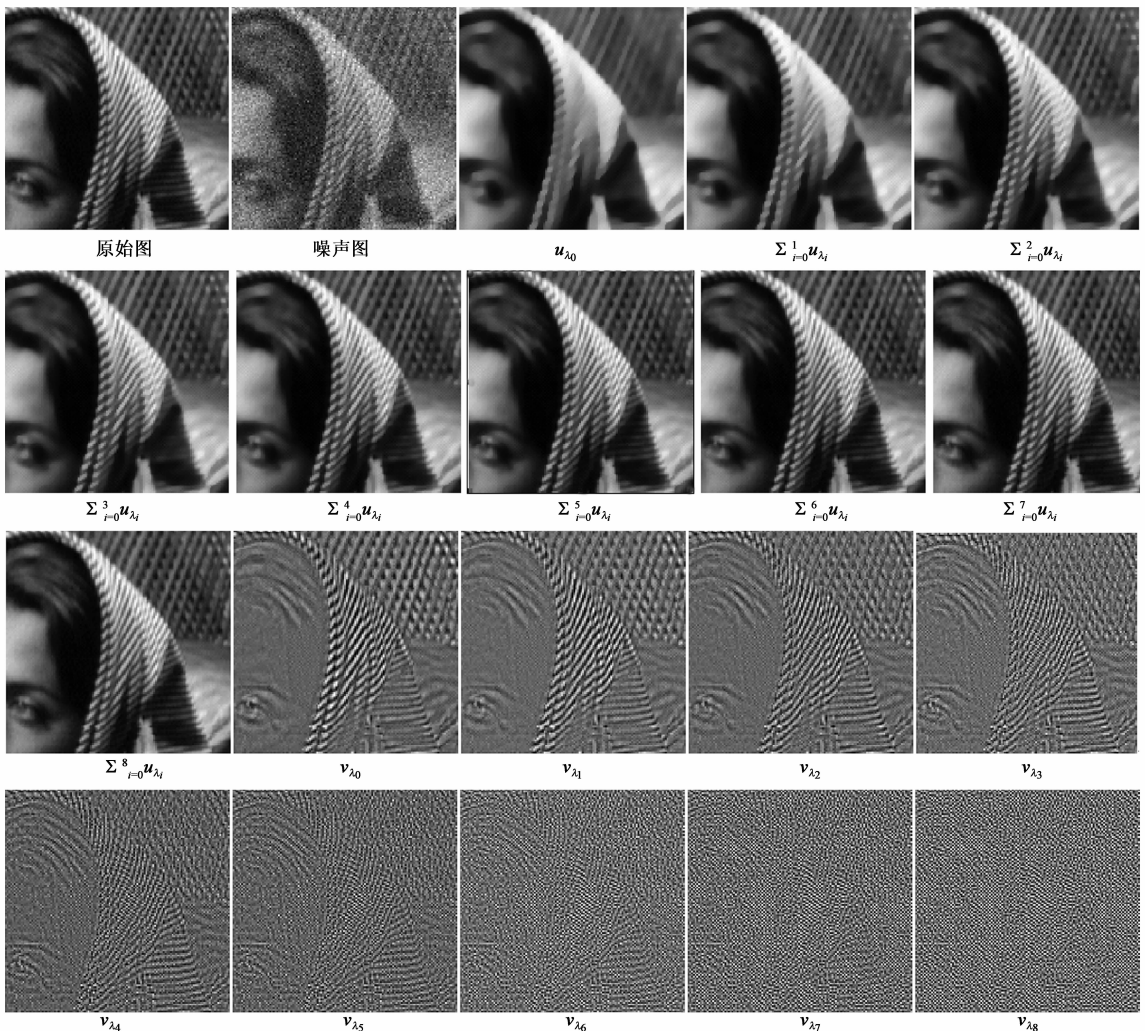


图1 新算法针对原始图像迭代9次后的结果和每次迭代后  $v_{\lambda_i}$  的表示结果, 其中  $0 \leq i < 9$

其次, 给出噪声图像的多尺度分解, 其中,  $\lambda_0 = 0.01$ . 图 2 给出基于新算法和 Nezzar 算法迭代 3 次后的分解结果; 图 3 给出新算法和 Nezzar 算法在尺度  $\lambda_i (1 \leq$

$i \leq 5)$  时 SNR 的比较. 由这些实验结果可知: 在同一尺度  $\lambda_j$  上, 新算法不仅可以更有效地抑制 Barbara 前额的噪声, 同时也可以更多地恢复图像的纹理信息 (见头

中).此外,数值结果也表明图像结构、纹理和噪声的分解是依赖于不同尺度的.当尺度参数  $\lambda$  较小时,算法得到图像的结构特征;随着尺度参数  $\lambda$  的增大,图像的细节

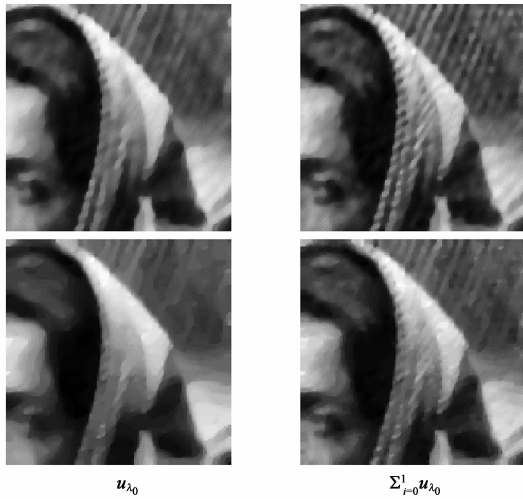


图2 新算法(第一行)和Nezzar算法(第二行)对噪声图像迭代3次的结果

小特征(比如纹理)就逐渐增多(见图  $\sum_{i=0}^2 u_{\lambda_i}$  结果);当算法在适当时刻停止,那最终丢弃的将是噪声(本算法的停止标准为  $\|f - u\|_{r^2} \approx \sigma$ ).

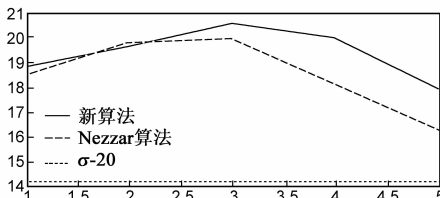
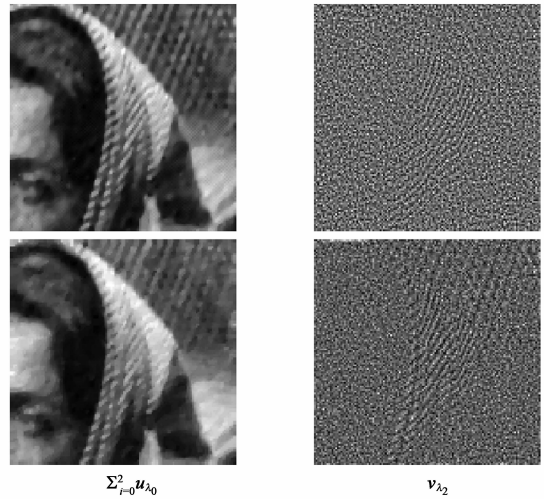


图3 新算法和Nezzar算法在尺度  $\lambda_i (1 \leq i \leq 5)$  时SNR的比较

## 5 结论

本文提出一种基于 OSV 变分模型的图像多尺度特征分解方法.该方法通过单调尺度参数,从 OSV 模型丢失的成分中提取信息,为图像在插值空间  $(H^{-1}, BV)_\theta$  ( $\theta \in [0, 1]$ ) 的特征刻画提供了一种分级的自适应表达式.同时,本文也讨论了该算法的理论性质,并给出这种等级分解的数值离散格式.实验表明新算法是有意义的.

## 参考文献

- [1] S Nezzar. A multiscale image representation using hierarchical  $(BV, L^2)$  decompositions, Ph. D. Thesis, University of California, Los Angeles, CA, 2003.
- [2] L. Rudin, S. Osher and E. Fatemi. Nonlinear total variation based noise removal algorithms, Phys. D, 1992, 60: 259 – 268.
- [3] Y Meyer. Oscillating patterns in image processing and nonlinear evolution equations, AMS, Providence, RI, 2001.
- [4] L Vese and S Osher. Modeling texture with total variation minimization and oscillatory patterns in image processing, J. Sci. Comput., 2003, 19: 553 – 572.
- [5] S Osher, A Sole and L Vese. Image decomposition and restoration using total variation minimization and the  $H^{-1}$  norm, Mul-

tiscale Model. Simul., 2003, 1: 349 – 370.

- [6] E Tadmor, S Nezzar and L Vese. A multiscale image representation using hierarchical  $(BV, L^2)$  decompositions, Multiscale. Model. Simul., 2004, Vol2(4): 554 – 579.
- [7] Jerome Gilles and Yves Meyer. Properties of BV-G Structures + Textures Decomposition Models. Application to Road Detection in Satellite Images, IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(11): 2793 – 2800.
- [8] I Daubechies and G Teschke. Variational image restoration by means of wavelets: simultaneous decomposition, deblurring and denoising, Applied and Computational Harmonic Analysis, 2005, 19(1): 1 – 16.

(下转第 761 页)

## 作者简介



李 敏 女, 2008 年毕业于西安电子科技大学, 获博士学位. 2008 年 9 月任职于深圳大学数学与计算科学学院, 讲师, 主要从事偏微分方程理论、小波理论及其在图像处理中的应用研究.

E-mail: limin800@szu.edu.cn



徐 晨 深圳大学数学与计算科学学院教授, 博士生导师. 从事信息与计算科学领域的研究. 在国内外发表学术论文 50 余篇. 其中数十余篇论文被美国《工程索引(EI)》、美国《科学引文(SCI)》、《美国数学评论(Math. Rev.)》等收录或评论. 专著《小波应用算法》由科学出版社出版. 兼任广东省工业与应用数学学会副理事长.

E-mail: xuchen\_szu@szu.edu.cn

- [J]. Computer Integrated Manufacturing Systems, 2009, 15(9): 1765 - 1769. (in Chinese)
- [6] P Wim, P Henk. A new bidirectional search algorithm with shortened postprocessing[J]. European Journal of Operational Research, 2009, 198(2): 363 - 369.
- [7] 刘立嘉, 盛业华, 路明月, 等. 双向半序网在两点间最优路径算法中的应用[J]. 计算机工程, 2008, 34(7): 73 - 75.  
Liu Li-jia, Sheng Ye-hua, Lu Ming-yue, et al. Application of bidirectional semioorder net in best path of two nodes[J]. Computer Engineering, 2008, 34(7): 73 - 75. (in Chinese)
- [8] 林澜, 闫春钢, 辛肖刚, 等. 基于稳定分支的变权网络最优路径算法[J]. 电子学报, 2006, 34(7): 1222 - 1225.  
Lin Lan, Yan Chun-gang, Xin Xiao-gang, et al. Optimal path algorithm in varying-weight networks based on stable branch [J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(7): 1222 - 1225. (in Chinese)
- [9] 葛雷. 新型路网模型及路径搜索算法研究[D]. 上海: 同济大学工学硕士学位论文, 2008, 3.

Ge Lei. Research on a novel road network model and its optimal path searching algorithm[D]. Shanghai: Dissertation for the Master Degree in Engineering of Tongji University, 2008, 3. (in Chinese)

- [10] 王文峰. 扩展 RBM 下的动态最短路径搜索算法的研究与实现[D]. 上海: 同济大学工学硕士论文, 2009, 3.  
Wang Wen-feng. Research and implementation of the dynamic shortest path searching algorithm based on the expanded RBM [D]. Shanghai: Dissertation for the Master Degree in Engineering of Tongji University, 2009, 3. (in Chinese)

#### 作者简介



曹政才 男, 1974 年出生于黑龙江富裕县, 博士, 副教授, 主要研究方向: 复杂系统建模、优化与控制。

E-mail: giftzcc@163.com

(上接第 772 页)

- [9] Li Min and Feng Xiangchu. Wavelet shrinkage and a new class of variational models based on Besov spaces and negative Hilbert-Sobolev spaces, Chinese Journal of Electronics, 2007, 16(2): 276-280.
- [10] G Aubert and P Kornprobst. Mathematical problems in image processing-partial differential equations and the calculus of variations, Springer, Applied Mathematical Sciences, 2006.
- [11] Liu Guojun and Feng Xiangchu. Curvelet-based iterative regularization and inverse scale space methods, Chinese Journal of Electronics, 2010, 19(3): 548 - 552.

- [12] 冯象初, 王卫卫. 图像处理的变分和偏微分方程方法. 科学出版社, 2009.
- [13] Wenye Ma and Stanley Osher. A tv bregman iterative model of retinex theory, CAM Report, 2010, 10 - 13.
- [14] 江玲玲, 冯象初, 殷海青. 基于 Curvelet 域的图像复原和分解模型, 电子学报, 2008, 36(9): 1790 - 1794.  
JIANG Ling-ling, FENG Xiang-chu, YIN Hai-qing. Image Restoration and Decomposition Based on Curvelet Domain [J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(9): 1790 - 1794.