

# 一种基于高阶矢量叠层基函数去除复杂谐振腔三维有限元仿真中的伪直流模式的新方法

徐 立,李 斌,杨中海

(电子科技大学物理电子学院,四川成都 610054)

**摘 要:** 基于高阶矢量叠层基函数,提出了一种去除复杂谐振腔三维有限元仿真中产生的伪直流模式的新方法.该方法可以非常方便、高效地将谐振腔有限元仿真中所有伪直流模式完全去除.利用该方法可以得到一个精确、高效和稳定的有限元本征求解器.该本征求解器在仿真三维复杂谐振腔上和目前流行的电磁场商业软件的本征模式求解器相比具有相当的精度并且具有更高的效率.

**关键词:** 谐振腔;有限元法;伪直流模式;多注速调管;叠层基函数

**中图分类号:** TN82      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2012)06-1171-06

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.06.017

## A Novel Approach of Removing Spurious DC Modes in 3-D Finite-Element Modeling of Complex Cavity Based on Higher-Order Vector Hierarchical Basis

XU Li, LI Bin, YANG Zhong-hai

(School of Physical Electronics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 610054, China)

**Abstract:** A convenient and efficient approach of removing the spurious DC modes in three-dimensional finite-element solution for modeling complex cavity is proposed. This method is based on higher-order hierarchical basis functions. Application of this approach results in a robust, accurate and efficient eigenmode solver of complex cavity which significantly saves the memory as well as computational time compared with the commercial electromagnetic software.

**Key words:** cavity; finite-element method; spurious modes; multi-beam klystron; hierarchical basis

### 1 引言

复杂谐振腔电磁场分析在微波工程、光学工程、电真空器件以及粒子加速器等领域有着重要而广泛的应用<sup>[1,2]</sup>.由于大部分谐振腔复杂的几何结构,一般理论求解往往不可行,数值分析成为一种有效的手段.有限元法凭借其善于模拟任意几何模型以及处理各种复杂介质的能力而成为谐振腔数值仿真中的一种精确、高效的算法<sup>[3]</sup>.采用矢量有限元法仿真复杂谐振腔可以成功地去除传统节点有限元法带来的伪解<sup>[3]</sup>,但同时却引入了大量的频率为零的没有物理意义的本征模<sup>[4]</sup>,我们称其为伪直流模式.这些伪直流模式的个数随着有限元网格的加密而不断增加.产生这些伪直流模式的原因是在矢量有限元法求解的边值问题中未强加电场散度约束方程.这些伪直流模式的产生不但增加了计算谐振腔主模(低次模)的困难,更重要是直接导致了最后的有限元

矩阵为严重病态矩阵,从而使得求解谐振腔本征模的迭代过程收敛很慢.因此如何去除这些伪直流模式,对于提高复杂谐振腔电磁场仿真的效率有着重要的意义.另一方面,当腔体的几何结构变得复杂并且谐振频率升高时,仅仅采用低阶基函数即边棱元基函数,要达到给定的精度时,需要大量的网格,从而导致产生的有限元矩阵的维数大幅增加使得迭代求解收敛变慢.而采用高阶基函数能有效提升复杂腔体有限元仿真的精度和效率.

目前用于去除复杂谐振腔三维有限元仿真中的伪直流模式的方法主要有以下几种.(1)一种位移求逆预处理法<sup>[5]</sup>.该方法是通过频谱转换,求解出某一个预估频率附近的本征模,从而可以将没有物理意义的伪直流模式去除.但是这种方法要求在求解有限元本征矩阵方程的Arnoldi算法<sup>[6]</sup>中,每一步Arnoldi迭代都需要求解一个大型稀疏的病态线性矩阵方程.普通的迭代法求解这样的矩阵方程基本上是不收敛的,快速多波前LU分

解<sup>[7]</sup>在矩阵维数较小的时候可以求解出这个矩阵方程,但是随着矩阵维数增大,所耗的时间和内存将迅速增大,导致该矩阵方程基本不能求解.(2)基于强加电场散度约束方程的一类方法<sup>[4,8,9]</sup>.这类方法在强加电场散度约束方程时非常不便,需要在每次 Arnoldi 迭代中求解一个 Poisson 方程<sup>[4]</sup>,或者另外引入附加的点基函数<sup>[8]</sup>,或者构造一个离散积分矩阵<sup>[9]</sup>.并且这些方法采用的都是最低阶的基函数.上述这些不足使得目前的这些方法都不能简便、高效地去除复杂谐振腔三维有限元仿真中的伪直流模式,从而进行准确快速的仿真.

本文基于高阶矢量叠层基函数提出了一种更方便、高效地去除复杂谐振腔三维有限元仿真中的伪直流模式的方法.利用该方法产生的复杂谐振腔三维本征求解器比起目前流行的电磁场商业仿真软件具有更高的计算精度,而在计算时间和内存上却有着大幅的节省.

## 2 理论分析

### 2.1 复杂谐振腔电磁场边值问题及 Galerkin 弱形式

一般地,可以将复杂谐振腔电磁场边值问题写成:

$$\begin{cases} \nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E} - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = 0, & \text{in } \Omega \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0, & \text{on } \Gamma_{\text{pec}} \\ \mathbf{n} \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E} = 0, & \text{on } \Gamma_{\text{pmc}} \end{cases} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \mathbf{E}) = 0, \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

上述公式中, $\Omega$ 为计算区域, $\Gamma_{\text{pec}}$ 与 $\Gamma_{\text{pmc}}$ 分别表示理想电壁和理想磁壁, $\epsilon_r$ 与 $\mu_r$ 分别为 $\Omega$ 中材料的相对介电常数及相对磁导率, $k_0$ 为自由空间波数, $\mathbf{n}$ 为边界外法向单位矢量.对式(1)中的频域矢量波动方程两边同时取散度,可以看出:当 $k_0 \neq 0$ 时,波动方程的解还满足式(2)电场散度方程;当 $k_0 = 0$ 时,波动方程的解却不再满足式(2).此时的解对应的本征频率为零,这些解就是谐振腔三维有限元仿真中产生的伪直流模式.因此伪直流模式产生的本质原因就是谐振腔三维有限元仿真的边值问题中未强加电场散度方程.我们可以将式(2)作为约束方程强加到边值问题式(1)中来去除伪直流模式.

根据 Galerkin 法可以得出边值问题(1)的弱形式:

找出一对 $\mathbf{E} \in \mathbf{H}_0(\text{curl}; \Omega)$ 和 $k_0 \in \mathbf{C}$ 满足下式成立

$$(\nabla \times \mathbf{u}, \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E})_{\Omega} = (k_0)^2 (\mathbf{u}, \epsilon_r \mathbf{E})_{\Omega}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\text{curl}; \Omega) \quad (3)$$

上式中, $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega} = \int_{\Omega} \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{v} \, d\Omega$ 为矢量内积.试探电场函数 $\mathbf{E}$ 和检验电场函数 $\mathbf{u}$ 所在的函数空间为旋度连续

函数的函数空间即 $\mathbf{H}_0(\text{curl}; \Omega)$ .在微波工程中, $\mathbf{H}_0(\text{curl}; \Omega)$ 是电场强度和磁场强度函数所在的函数空间.

电场散度方程(2)的 Galerkin 弱形式可以由如下推导得出:对于一个试探电场函数 $\mathbf{E} \in \mathbf{H}_0(\text{curl}; \Omega)$ ,式(2)可以表示成残差 $R_{\Omega}(\mathbf{E})$ :

$$R_{\Omega}(\mathbf{E}) = \nabla \cdot (\epsilon_r \mathbf{E}) \quad (4)$$

由电场高斯定律可知, $R_{\Omega}(\mathbf{E})$ 的物理意义为该残差表示为一个电荷密度误差 $\rho^{\text{error}}$ .从物理的观点来看,一个准确的试探函数与检验函数组成的对偶对(dual pairing)最后一定是产生一个具有能量密度的物理量如 $\rho\phi$ .因此,我们选择一个电势 $\phi$ 作为 $R_{\Omega}(\mathbf{E})$ 的检验函数.那么,式(2)的 Galerkin 弱形式可以写成:

找出一个 $\mathbf{E} \in \mathbf{H}_0(\text{curl}; \Omega)$ 满足下式成立

$$(\phi, R_{\Omega}(\mathbf{E}))_{\Omega} = (\phi, \nabla \cdot (\epsilon_r \mathbf{E}))_{\Omega} = 0, \quad \forall \phi \in H_0(\Omega) \quad (5)$$

上式中,标记 $(u, v)_{\Omega} = \int_{\Omega} u^* v \, d\Omega$ 为标量内积.电势检验函数 $\phi$ 所在的空间为梯度连续函数的函数空间即 $H_0(\Omega)$ .由矢量高斯定理及 $\phi$ 在理想电壁上为零电位可得:

$$\begin{aligned} (\phi, \nabla \cdot (\epsilon_r \mathbf{E}))_{\Omega} &= (\nabla \phi, \epsilon_r \mathbf{E})_{\Omega} - \int_{\Gamma_{\text{pec}}} \phi^* \epsilon_r \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} \, d\Gamma \\ &= (\nabla \phi, \epsilon_r \mathbf{E})_{\Omega} \end{aligned} \quad (6)$$

### 2.2 有限维离散弱形式

在有限元分析中,我们需要将区域 $\Omega$ 采用四面体网格离散成 $\Omega^h$ ,这里 $h$ 表示为四面体网格中的最大的四面体直径.那么2.1节中所得的复杂谐振腔电磁场边值问题的有限维离散弱形式可以写成:

找出 $\mathbf{E}^h \in \mathbf{V}^h \subset \mathbf{H}_0(\text{curl}; \Omega)$ 和 $k_0^h \in \mathbf{C}$ 使下述两式成立:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{u}^h, \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}^h)_{\Omega^h} &= (k_0^h)^2 (\mathbf{u}^h, \epsilon_r \mathbf{E}^h)_{\Omega^h}, \\ \forall \mathbf{u}^h \in \mathbf{V}^h \end{aligned} \quad (7)$$

$$(\nabla \phi^h, \epsilon_r \mathbf{E}^h)_{\Omega^h} = 0, \quad \forall \phi^h \in W^h \subset H_0(\Omega) \quad (8)$$

上式中,所有的物理量都加了上标 $h$ 表示为采用四面体网格离散后该物理量的离散形式.此外 $\mathbf{V}^h$ 为试探电场 $\mathbf{E}^h$ 和检验电场 $\mathbf{u}^h$ 所在的有限维子空间即基函数空间, $W^h$ 为检验电势 $\phi^h$ 所在的基函数空间.众所周知静电场或无旋电场可以写成标量势函数的梯度即 $\mathbf{E}_r = -\nabla \phi$ .那么方程式(8)的物理意义为复杂谐振腔电磁场边值问题式(1)的所有具有物理意义的本征模 $\mathbf{E}^h$ 和它的每一个伪直流模式(无旋电场) $\nabla \phi^h$ 正交.此外,由于 $\nabla H_0(\Omega) \subset \mathbf{H}_0(\text{curl}; \Omega)$ ,那么它们的有限维子空间满足 $\mathbf{G}^h \subset \mathbf{V}^h$ ,令 $\mathbf{G}^h = \nabla W^h$ .由上述结论可知,如果我们选择的基函数空间 $\mathbf{V}^h$ 能够完全分解成纯梯度场部分 $\mathbf{G}^h$ 和有旋场部分 $\mathbf{R}^h$ ,即

$$\mathbf{V}^h = \mathbf{G}^h \cup \mathbf{R}^h \quad \text{并且} \quad \mathbf{G}^h \cap \mathbf{R}^h = \emptyset \quad (9)$$

那么伪直流模式就可以非常方便地通过将边值问题式(1)中所有具有物理意义的本征模式和纯梯度场基函数空间  $\mathbf{G}^h$  正交来完全去除。

### 2.3 基函数空间构造

下面按照 2.2 节中提出的要求构造基函数空间. 我们认为 Sun 等人提出的一种矢量叠层基函数<sup>[10]</sup>最符合上述基函数空间的要求. 所谓的叠层基函数是指该类型的高阶基函数是在低阶基函数的基础上增加未知量和基函数而成, 因此其高阶基函数完全包含了低阶基函数, 如二阶矢量叠层基函数的低阶部分是经典的边棱元(edge element). 之所以说 Sun 提出的叠层基函数最符合要求是因为其高阶部分已经被完全分成两组即纯梯度场基函数部分  $\mathbf{G}^h$  和有旋场基函数部分  $\mathbf{R}^h$ . 但是它的低阶部分也就是边棱元部分并没有这样分解. 因此我们必须通过有限元网格的树-共轭树分离技术<sup>[11]</sup>(tree-cotree splitting)对边棱元部分做进一步分解. 树-共轭树分离本质上就是为了保证在边棱元基函数分解过程中,  $\mathbf{G}^h \cap \mathbf{R}^h = \emptyset$ .

树-共轭树分离的主要数值实现是将有限元网格看成图论中的一张图, 利用图论的遍历算法, 选取有限元单元网格的一个顶点为参考点, 由参考点出发, 构造一条最小搜索路径. 该路径上的棱边称为树边, 而剩下的棱边称为共轭树边. 然后, 将在树边上的边棱元基函数拿去, 用点基函数  $\nabla \zeta_i$  代替, 其中  $\zeta_i$  是关于顶点  $i$  的体积坐标函数. 该算法的要点在于: (1) 此最小搜索路径必须是单连通的; (2) 保证由参考点出发, 所有顶点都可到达. (3) 由于理想电壁上的电势都相同, 因此可以将理想电壁上的所有顶点看成一个点, 并将该点设为参考点, 从该点出发进行树-共轭树分离.

图 1 为对一简单圆形区域的有限元网格进行树-共轭树分离后的示意图. 图中粗线为树边, 细线为共轭树边, 树边构造出一条最小的搜索路径. 假定圆周上为理想电壁, 因此圆周上的所有点电势都相同, 可以看成一个点, 并设其为参考点. 从图 1 中可以发现, 树边的总数(5 条)等于网格点的总数(6 个)减去 1. 减去的这点是参考点, 在图 1 中为理想电壁上的点. 对有限元网格进行树-共轭树分离后, 将树边上的边棱元基函数用点基函数替换掉, 可以构造出如下二阶基函数空间:

$$\mathbf{V}^h = \mathbf{G}_N \oplus \mathbf{R}_{ct} \oplus \mathbf{G}_E \oplus \mathbf{R}_F \quad (10)$$

$$\text{其中 } \mathbf{G}_N = \text{span}\{\nabla \zeta_i; \text{ node } i\} \quad (11)$$

$$\mathbf{R}_{ct} = \text{span}\{\zeta_i \nabla \zeta_j - \zeta_j \nabla \zeta_i; \text{ cotree-edge}\{i, j\}\} \quad (12)$$

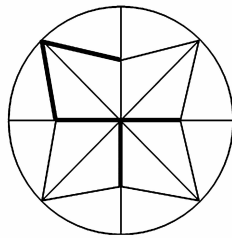


图 1

$$\mathbf{G}_E = \text{span}\{\nabla(\zeta_i \zeta_j); \text{ edge}\{i, j\}\} \quad (13)$$

$$\mathbf{R}_F = \text{span}\{\zeta_i(\zeta_j \nabla \zeta_k - \zeta_k \nabla \zeta_j), \zeta_j(\zeta_k \nabla \zeta_i - \zeta_i \nabla \zeta_k); \text{ face}\{i, j, k\}\} \quad (14)$$

上述公式中,  $\mathbf{G}_N$  和  $\mathbf{R}_{ct}$  构成基函数的一阶部分, 其中  $\mathbf{G}_N$  为边棱元的纯梯度场基函数空间, 它是由拿掉树边上的边棱元基函数而代替的点基函数  $\nabla \zeta_i$  张成的;  $\mathbf{R}_{ct}$  为边棱元的有旋场基函数空间, 它是由共轭树边上的边棱元张成的. 而  $\mathbf{G}_E$ 、 $\mathbf{R}_F$  和一阶部分一起构成了二阶基函数.  $\mathbf{G}_E$  为纯梯度场基函数空间, 它是由所有网格边上的基函数张成的;  $\mathbf{R}_F$  为有旋场基函数空间, 它是由所有网格面上的基函数张成的.

### 2.4 广义本征矩阵方程组求解及伪直流模式去除

将复杂谐振腔电磁场边值问题的有限维离散弱形式(7)、(8)用基函数式(11)~(14)展开, 可以将求解边值问题式(1)及电场散度约束方程式(2)转化成求解下述广义本征矩阵方程组:

$$\begin{cases} \mathbf{S}\mathbf{x} = k_0^2 \mathbf{T}\mathbf{x} \\ \mathbf{G}\mathbf{T}\mathbf{x} = 0 \end{cases} \quad (15a)$$

$$\quad (15b)$$

上式中  $\mathbf{S}$  矩阵及  $\mathbf{T}$  矩阵的矩阵项表示为:

$$\mathbf{S}_{ij} = \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{N}_i) \cdot \mu_r^{-1} (\nabla \times \mathbf{N}_j) d\Omega \quad (16)$$

$$\mathbf{T}_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \cdot \epsilon_r \mathbf{N}_j d\Omega \quad (17)$$

$\mathbf{G}$  矩阵为:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\dim(\mathbf{G}_N)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{\dim(\mathbf{G}_E)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$\mathbf{N}_i$  为所采用的基函数,  $\mathbf{N}_i \in \mathbf{V}^h$ .  $\mathbf{I}$  表示单位矩阵, 维数  $\dim(\mathbf{G}_N)$  为有限元网格树边总数, 维数  $\dim(\mathbf{G}_E)$  为有限元网格所有网格边总数.

由于广义本征方程组式(15)中的矩阵为大型稀疏矩阵, 对于式(15a), 即广义本征方程一般采用位移求逆预处理隐式重启 Arnoldi 算法<sup>[6]</sup>求解, 而式(15b), 即电场散度约束方程则可以不用直接求解, 而是在求解广义本征方程的过程中约束某些工作向量来强加电场散度约束方程.

用位移求逆预处理隐式重启 Arnoldi 法求解广义本征方程的过程中, Ritz 向量  $\mathbf{r}$  由求解线性矩阵方程  $(\mathbf{S} - \sigma \mathbf{T})\mathbf{r} = \mathbf{q}$  所得.  $\sigma$  为偏移因子,  $\mathbf{q}$  为工作向量. 此外, 由于散度的旋度为零, 非常明显有  $\mathbf{G}\mathbf{S}\mathbf{x} = 0$ , 所以可得下述关系:

$$\mathbf{G}(\mathbf{S} - \sigma \mathbf{T})\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{G}\mathbf{T}\mathbf{x} = 0, \sigma \neq 0 \quad (19)$$

只要 Ritz 向量  $\mathbf{r}$  满足电场散度约束方程即式(15b), 那么由  $\mathbf{r}$  最后张成的本征向量即求解的本征模也满足电

场散度约束方程,则有:

$$\mathbf{G}\mathbf{T}\mathbf{r} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{G}(\mathbf{S} - \sigma\mathbf{T})\mathbf{r} = \mathbf{G}\mathbf{q} = 0 \quad (20)$$

结合式(18)矩阵  $\mathbf{G}$  的形式,要使式(20)成立,则  $\mathbf{q}$  需满足:

$$\mathbf{q} = [0 \quad \mathbf{q}_{\dim(\mathbf{R}_e)} \quad 0 \quad \mathbf{q}_{\dim(\mathbf{R}_p)}]^T \quad (21)$$

由式(21)知:伪直流模式可以通过在每一步 Arnoldi 迭代中,简单地设置向量  $\mathbf{q}$  的两个纯梯度场基函数部分为零,而保持两个有旋场基函数部分不变来方便去除.此外,因为伪直流模式已经完全去除,那么可以将  $\sigma$  设为负数,这时矩阵  $(\mathbf{S} - \sigma\mathbf{T})$  变成正定矩阵,线性矩阵方程  $(\mathbf{S} - \sigma\mathbf{T})\mathbf{r} = \mathbf{q}$  可以采用不完全 Cholesky 分解预处理共轭梯度法求解.但是随着网格增加导致矩阵维数增加,共轭梯度法的迭代速度显著变慢.其本质原因是,在迭代法的收敛过程中,每步迭代的误差的高频部分能够迅速地衰减,而它的低频部分衰减得很慢.多重网格法利用粗网格修正技术,能够有效地消除在细网格迭代误差的低频部分,因为这些误差的低频部分在粗网格上表现为其高频部分,可以快速去除.利用 2.3 节给出的基函数的叠层性可以对线性矩阵方程  $(\mathbf{S} - \sigma\mathbf{T})\mathbf{r} = \mathbf{q}$  的共轭梯度求解,构造出一种高效的 p-型多重网格预处理<sup>[12]</sup>.和传统几何意义上的多重网格法不同,该预处理将由一阶基函数构成的矩阵看成是粗网格构成的矩阵,而整个二阶基函数构成的矩阵看成是细网格构成的矩阵.采用该预处理后,线性矩阵方程  $(\mathbf{S} - \sigma\mathbf{T})\mathbf{r} = \mathbf{q}$  的迭代求解的次数几乎不随矩阵维数增加而增加.最后需要指出的是,除了高阶基函数的引入外,比起文献[9],本文提出的方法还有以下两方面的改进:(1)本文的伪直流模式去除过程比文献[9]中的过程实施起来更加方便和高效.在文献[9]中伪直流模式的去除需要构造一个复杂的离散积分方程;而本文的方法仅仅需要在每步 Arnoldi 迭代中将工作向量  $\mathbf{q}$  的纯梯度场部分重置为零,就能实现伪直流模式的完全去除,这并不需要增加计算资源;(2)文献[9]中的方法无法实现前面提到的高效的 p-型多重网格预处理.

### 3 数值仿真

#### 3.1 矩形谐振腔

首先,我们对一个尺寸为  $10 \times 5 \times 7.5$  (mm<sup>3</sup>) 的简单矩形谐振腔进行仿真,验证所提方法的准确性.从表 1 中可以看出,采用所提出的方法可以非常有效地将矩形谐振腔有限元仿真中的所有伪直流模式完全去除.在采用 3166 个四面体网格下,去除伪直流模式后的前 8 个本征模与解析解的最大相对误差仅为  $6.92\text{e-}3\%$ ,因此该方法具有很高的精度和效率.表 2 比较了采用位移求逆预处理法<sup>[4]</sup>和本文方法去除伪直流模式的效率

和稳定性.采用位移求逆预处理法,需要首先给出一个比所求的最低本征模频率低的预估频率  $f_e$  所构成的位移因子  $\sigma$ ,  $\sigma = (2\pi f_e/c)^2$ ,  $c$  为光速.此时  $\sigma$  为正数,称其为正位移因子.而在本文提出的方法中,由于所有的伪直流模式已经被完全去除,所以位移因子  $\sigma$  可以取任意的负数,并都将得到最低的本征模,这里我们取  $\sigma = -0.1(2\pi f_e/c)^2$ ,称其为负位移因子.在位移求逆隐式重启 Arnoldi 算法中最耗时间的步骤是两个矩阵向量积操作即线性矩阵  $(\mathbf{S} - \sigma\mathbf{T})^{-1}\mathbf{x}$  的求解(令为  $\mathbf{P}\mathbf{x}$ )和  $\mathbf{T}\mathbf{x}$ .在不同预估频率  $f_e$  下,我们比较分别采用正位移因子和负位移因子求解矩形谐振腔前 8 个本征模所做的上述矩阵向量积的操作次数. Arnoldi 的迭代收敛精度设为  $1\text{e-}14$ .从表 2 可以看出,采用正位移因子下,随着预估频率  $f_e$  越接近理论解 24.9827GHz,所做的  $\mathbf{P}\mathbf{x}$  和  $\mathbf{T}\mathbf{x}$  操作数越少,但是一旦  $f_e$  超出理论解如 25GHz,那么将收敛到错误的本征模.而采用负位移因子情况下,  $\mathbf{P}\mathbf{x}$  和  $\mathbf{T}\mathbf{x}$  操作数在不同的预估频率下基本上都比采用正位移因子要少,更为重要的是  $\mathbf{P}\mathbf{x}$  和  $\mathbf{T}\mathbf{x}$  操作数不会随着预估频率的变化而变化,即使在超过理论解如 25GHz 下,也能收敛到准确的本征模.因此本文提出的方法比位移求逆预处理法具有更高的精度、效率和更好的稳定性.

表 1 分别在去除伪直流模式和未去除伪直流模式下矩形谐振腔前 8 个本征值和解析解的对比

模式	解析解	未去除伪直流模	去除伪直流模	相对误差
No.	(dB)	(GHz)	(GHz)	(%)
TE <sub>101</sub>	24.9827	3.34e-06	24.9828	4.00e-04
TM <sub>110</sub>	33.5178	2.60e-06	33.5179	2.98e-04
TE <sub>011</sub>	36.0306	1.08e-15	36.031	1.11e-03
TE <sub>201</sub>	36.0306	9.85e-08	36.0317	3.05e-03
TM <sub>111</sub>	39.0242	3.32e-15	39.0269	6.92e-03
TE <sub>111</sub>	39.0242	3.10e-15	39.0262	5.13e-03
TM <sub>210</sub>	42.3971	7.72e-15	42.3995	5.66e-03
TE <sub>102</sub>	42.6905	3.97e-15	42.691	1.17e-03

表 2 在不同的预估频率下分别采用正位移因子和负位移因子矩阵向量积  $\mathbf{P}\mathbf{x}$  和  $\mathbf{T}\mathbf{x}$  的操作次数对比

预估频率	正 $\sigma$ 时	负 $\sigma$ 时	正 $\sigma$ 时	负 $\sigma$ 时
(GHz)	$\mathbf{P}\mathbf{x}$ 次数	$\mathbf{P}\mathbf{x}$ 次数	$\mathbf{T}\mathbf{x}$ 次数	$\mathbf{T}\mathbf{x}$ 次数
1	71	50	201	151
5	62	50	180	151
10	60	50	174	151
15	56	50	166	151
24	50	50	150	151
25	—	50	—	151

#### 3.2 多注速调管群聚段谐振腔

下面,我们将仿真多注速调管群聚段中的一个 18 孔谐振腔.该谐振腔用于加强速调管群聚的同时偏谐振展宽带宽.由前述可知,利用本文提出的方法位移因子  $\sigma$  可以取负数,此时矩阵  $(\mathbf{S} - \sigma\mathbf{T})$  变为正定矩阵,矩阵

向量积  $(S - \sigma T)^{-1}x$  可以通过不完全 Cholesky 分解预处理共轭梯度法结合 p-型多重网格预处理有效求解. 因此我们称采用本文提出的去除伪直流模式的方法产生的复杂谐振腔三维本征求解器为 CGES (Conjugate Gradient Eigen Solver). 我们分别应用 CGES, CST MWS (版本 2009) 和 HFSS (版本 12.1) 仿真 18 孔群聚腔的前 5 个本征模式, 并且对比这三种求解器的计算性能. 所有的仿真都是在一个 Windows 7-64 位 Intel Core2 2.8GHz 4-GB 内存的笔记本计算平台上完成的. 所有的仿真结果都是在最后一次收敛网格得到的 (对这三种求解器采用同样的网格收敛精度 0.05%). 此外, CST MWS 具体采用的本征求解器为 Jacobi-Davidson 法, HFSS 采用的基函数的阶数和 CGES 一样同为 2 阶. 表 3 给出了这三种求解器计算 18 孔群聚腔的前 5 个本征模. 从表中可以看出, 三种求解器计算结果非常吻合, CGES 的计算结果基本上在 CST MWS 和 HFSS 中间, 其中和 CST MWS 的最大相对误差为 0.125%, 和 HFSS 的最大相对误差为 0.332%. 图 2 为多注速调管群聚段谐振腔模型四面体网格图, 图 3 为 CGES 仿真群聚腔主模的电场分布矢量图, 图 4 为 CGES 仿真群聚腔主模的磁场分布云图剖面图. 表 4 给出了三种求解器在计算群聚腔主模时计算性能的对比. 从表 4 中非常明显可以看出, CGES 在这三种求解器中所消耗的时间和内存都是最少的. 在 CPU 时间上, CGES 几乎比 CST MWS 快了 9 倍, 而消耗的内存仅仅是 CST MWS 的六分之一. 更值得指出的是,

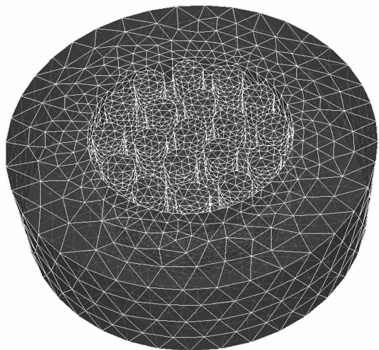


图2 多注速调管群聚段谐振腔模型四面体网格图

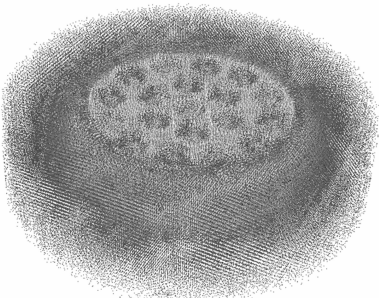


图3 CGES仿真群聚腔主模的电场分布矢量图

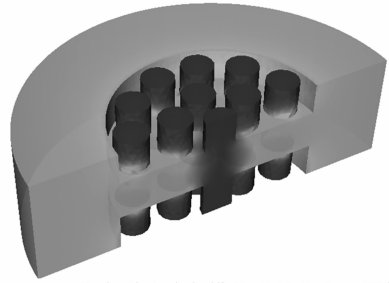


图4 CGES仿真群聚腔主模的磁场分布云图剖面图

CGES 和 HFSS 采用的都是有限元法和 2 阶基函数, 在几乎相同的四面体网格及矩阵维数下, CGES 比 HFSS 快了近 3 倍, 而消耗的内存仅仅是 HFSS 的四分之一.

表 3 CST MWS、HFSS 和 CGES 仿真速调管群聚段谐振腔的前 5 个本征模式频率对比

模式	CST MWS (GHz)	HFSS (GHz)	CGES (GHz)	CGES 与 CST MWS 相对误差 (%)	CGES 与 HFSS 相对误差 (%)
1	3.56026	3.56735	3.56023	-8.43e-04	2.00e-01
2	7.07965	7.10591	7.08381	5.88e-02	3.11e-01
3	7.08023	7.10619	7.08495	6.67e-02	2.99e-01
4	10.3925	10.4366	10.40199	9.12e-02	3.32e-01
5	10.3948	10.4379	10.40788	1.25e-01	2.88e-01

表 4 CST MWS、HFSS 和 CGES 在仿真速调管群聚段谐振腔的主模时计算性能对比

求解器	网格数	矩阵维数	CPU 时间	峰值内存 (MB)
CST MWS	588,448	1,765,344	500	1352
HFSS	53,337	315,746	159	784
CGES	56,613	335,054	55	214

## 4 结论

本文基于高阶矢量叠层基函数提出了一种非常方便、高效地去除复杂谐振腔三维有限元仿真中产生的伪直流模式的方法. 该方法仅仅需要在每一步 Arnoldi 迭代中简单地将工作向量  $q$  的两个纯梯度场基函数部分设置为零而同时保持两个有旋场基函数部分不变就可以将所有的伪直流模式完全去除. 利用该方法产生了一个精确、高效和稳定的有限元本征求解器. 该本征求解器在仿真三维复杂谐振腔上比起目前流行的电磁场商业软件具有相当的精度, 而消耗的时间和内存却大幅减少.

## 参考文献

- [1] 罗勇, 李宏福, 赵青. 低 Q 谐振腔混合模场匹配分析 [J]. 电子学报, 2004, 32(9): 1539 - 1542.  
Luo Y, Li H F, Zhao Q. Field matching analysis of hybrid modes for low Q cavities [J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32(9): 1539 - 1542. (in Chinese)
- [2] 孙永志, 杨鸿生. 矩形波导谐振腔微波化学反应器的研究 [J]. 电子学报, 2006, 34(9): 1708 - 1710.

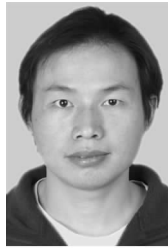
- Sun Y Z, Yang H S. The research of microwave chemistry reactor made of the rectangular [J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(9): 1708-1710. (in Chinese)
- [3] Lee J F, Sun D K, Cendes Z J. Tangential vector finite elements for electromagnetic field computation [J]. IEEE Trans Magnetics, 1991, 27(5): 4032 - 4035.
- [4] Perepelitsa S, Dyczij-Edlinger R, Lee J F. Finite-element analysis of arbitrarily shaped cavity resonator using H1 (curl) elements [J]. IEEE Trans Magnetics, 2004, 33(3): 1776 - 1779.
- [5] Xu L, Yang Z H, Li B, Li J Q, Zhu X F, Huang T, Hu Q, Hu Y L, Ye Z. High-frequency circuit simulator: An advanced three-dimension finite-element electromagnetic- simulation tool for microwave tubes [J]. IEEE Trans Electron Devices, 2009, 56(5): 1141 - 1151.
- [6] Lehoucq R B, Sorensen D C. Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration [J]. SIAM J Matrix Analysis and Applications, 1996, 17(4): 789 - 821.
- [7] Duff I S, Reid J K. The multifrontal solution of indefinite sparse symmetric linear equations [J]. ACM Trans on Mathematical Software, 1983, 9(3): 302 - 325.
- [8] White D A, Kong J M. Computing solenoidal eigenmodes of the vector Helmholtz equation: A novel approach [J]. IEEE Trans Magnetics, 2002, 38(5): 3420 - 3425.
- [9] Venkatarayalu N V, Lee J F. Removal of spurious dc modes in edges elements solutions for modeling three-dimensional resonators [J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech, 2006, 54(7): 3019 - 3025.
- [10] Sun D K, Lee J F, Cendes Z J. Construction of nearly orthogonal Nedelec bases for rapid convergence with multilevel preconditioned solvers [J]. SIAM J Sci Comput, 2001, 23: 1053 - 1076.
- [11] Lee S C, Lee J F, Lee R. Hierarchical vector finite elements for analyzing wave guide structures [J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech, 2003, 51(5): 1897 - 1905.
- [12] Lee J F, Sun D K. p-Type multiplicative Schwarz (pMUS) method with vector finite elements for modeling three-dimensional waveguide discontinuities [J]. IEEE Trans Microwave Theory Tech, 2003, 51(5): 1897 - 1905.

### 作者简介



**徐立男**, 1985年出生于江西省万安县. 电子科技大学物理电子学院博士研究生, 主要从事微波管高频电路快速有限元法的研究.

E-mail: lixu@uestc.edu.cn



**李斌** 男, 1974年出生. 电子科技大学物理电子学院教授, 博士生导师, 主要从事行波管非线性理论、仿真与CAD技术的研究.

E-mail: libin@uestc.edu.cn



**杨中海** 男, 1944年出生. 电子科技大学物理电子学院教授, 博士生导师, 主要从事相对论电子学、真空电子学和等离子体电子学的研究.

E-mail: zhyang@uestc.edu.cn