

# 基于子空间和投影分离的三维正弦信号频率估计算法

黄龙庭<sup>1</sup>, 吴云韬<sup>1</sup>, 廖桂生<sup>2</sup>, 张彦铎<sup>1</sup>

(1. 武汉工程大学智能机器人湖北省重点实验室, 湖北武汉 430073;  
2. 西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室, 陕西西安 710071)

**摘要:** 本文提出了一种基于子空间和投影分离的三维正弦信号的频率参数估计算法. 算法核心思想在于将三维采样数据阵理解为散布在某一维上的二维切片矩阵列, 以此来实现对三维采样数据阵列的降维处理, 并通过构造投影矩阵来实现信号中各分量的分离, 算法可实现信号各分量三维参数自动配对. 在整个估计过程中, 算法所用矩阵都维持原采样数据阵规模, 因而算法整体运算量较小. 计算机仿真结果表明所提算法在性能及运算复杂度上均要优于三维情况下的 IMDF 算法及 HOSVD 算法.

**关键词:** 三维频率估计; 子空间方法; 投影矩阵分离方法

**中图分类号:** TN911.7      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2012)06-1223-06

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.06.026

## 3-D Frequency Estimation of Multiple Sinusoids Using Subspace and Projection Separation Approaches

HUANG Long-ting<sup>1</sup>, WU Yun-tao<sup>1</sup>, LIAO Gui-sheng<sup>2</sup>, ZHANG Yan-duo<sup>1</sup>

(1. Key Lab of Intelligent Robot in Hubei Province, Wuhan Institute of Technology, Wuhan, Hubei 430073, China;  
2. National Lab of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

**Abstract:** A computationally efficient method that combines the subspace and projection separation approaches is proposed for 3-D frequency estimation of multiple sinusoids. From the perspective that 3-D sinusoids is a series of 2-D sliced matrices distributed in the third dimension, frequency parameters in the first dimension are estimated by applying the conventional MUSIC-based method to the covariance of the series of slice in the third dimension. Subsequently, a set of projection separation matrices is constructed to separate and estimate the frequency parameters in the second and the third dimension through a set of slices distributed in the third and the second dimension, respectively. The 3-D frequency parameters are automatically paired. For only the original scale of sampled data array is utilized, and the proposed method is more computationally attractive. Computer simulations show that the proposed algorithm is superior to IMDF and HOSVD methods of 3D case in terms of estimation performance and computational complexity.

**Key words:** 3-D frequency estimation; subspace-based method; projection separation approach

## 1 引言

多维指数正弦信号广泛应用于 Multiple-Input Multiple-Output (MIMO) 信道估计<sup>[1]</sup>、无线通信<sup>[2]</sup>、雷达、声纳、地震、核磁共振<sup>[3]</sup>等领域, 其信号参数估计问题受到了越来越多的重视. 近年来, 研究提出了许多高分辨率或基于子空间类的参数估计算法用于解决这一问题, 如 R-D Unitary ESPRIT 算法<sup>[4]</sup>、R-D Multidimensional Folding (MDF) 算法<sup>[1]</sup>和 Improved MDF (IMDF) 算法<sup>[6]</sup>、R-D MUSIC 算法<sup>[7]</sup>、Decoupled Root-MUSIC 算法<sup>[8]</sup>、R-D Rank Re-

duction Estimator (RARE) 算法<sup>[9]</sup>和 Higher-Order SVD (HOSVD) 算法<sup>[10]</sup>.

R-D Unitary ESPRIT 算法、MDF 算法和 IMDF 算法均是基于传统 ESPRIT 思想的方法. 由于多维采样数据阵列(array)不同于二维的采样数据, 它不能直接进行协方差处理或 EVD、SVD 分解, 这就为多维参数估计算法的研究带来了许多困难. 为了避免多维数据处理的困难, 通常的作法是直接多将多维采样阵列向量化, 再把向量化后的数据重排为一个二维矩阵并构造一个 ESPRIT 算法所需要的结构, 以便于直接运用 ESPRIT 方

法. 这样处理的优点是不用再处理多维采样阵列并能实现多维参数的自动配对, 但缺点也同样明显, 一是多维采样阵列中蕴含的结构信息被破坏了, 二是重排后的数据阵规模往往很大, 增加了后续处理的运算量.

基于多维采样阵列的特点, 使用张量分解的方法对其进行处理是一个很好的方法, 关于张量分解的方法可参考文献[13]、[14], 解耦的 Root-MUSIC 及 HOSVD 算法就是这类算法. 利用张量分解方法, Decoupled Root-MUSIC 算法将一个  $R$  维的参数估计问题分解为  $R$  个一维的参数估计问题, 这大大降低了运算量, 不足之处是分解后的  $R$  个一维问题之间失去了参数关联, 这就需要估计出的各维参数配成一个一个的  $R$  维参数对, 而这是一个很复杂的处理过程. HOSVD 算法运用张量分解方法直接处理平滑后的多维采样阵列, 并利用了采样阵列的原有的结构信息, 但算法后续联合对角化过程仍然耗时较多.

本文提出了一种基于子空间和投影分离的多维指数正弦信号的频率参数估计方法. 算法的核心思想是将多维采样数据阵列重排为一个二维切片矩阵列, 以此来对多维采样阵列的降维处理, 并通过构造投影矩阵的方法来实现信号中各分量的分离. 由于在整个估计过程中, 算法所用的矩阵都维持原采样阵列的规模而无需数据重排, 因此算法的整体运算量较小. 另外, 第二维及第三维中各频率分量的估计都与各自的投影矩阵相关联, 这使得算法自然实现各维频率参数的自动配对. 最后需要指出的是, 实际上所提算法也完全可以从任意一维的频率参数开始估计, 并不一定要以第一维的频率估计作为起点.

## 2 算法的提出

首先给出三维正弦信号的模型为

$$x_{m_1, m_2, m_3} = s_{m_1, m_2, m_3} + q_{m_1, m_2, m_3} \\ m_n = 1, 2, \dots, M_n; n = 1, 2, 3 \quad (1)$$

其中

$$s_{m_1, m_2, m_3} = \sum_{f=1}^F \alpha_f \prod_{n=1}^3 e^{j\omega_n m_n} \quad (2)$$

是不含噪声的信号.  $F$  是信号中所含分量的个数, 这里假设  $F$  是先验已知的.  $\alpha_k$  是信号的复振幅,  $\omega_{n,f} \in (-\pi, \pi]$  是信号第  $n$  维的第  $f$  个分量的频率, 它们都是未知常数. 这里假定当  $f \neq l, n = 1, 2, 3$  时  $\omega_{n,f} \neq \omega_{n,l}$ .  $q_{m_1, m_2, m_3}$  是 3-D 零均值白高斯复噪声, 噪声功率未知, 设为  $\sigma_n^2$ . 不失一般性, 这里假设  $M_n \geq F, n = 1, 2, 3$ . 我们的目的就是在给定  $M = M_1 M_2 M_3$  个采样  $x_{m_1, m_2, m_3}$  的情况下, 估计出信号的频率参数  $\{\omega_{n,f}\}_{f=1}^F, n = 1, 2, 3$ .

### 2.1 第一维频率参数估计

首先将式(1)、(2)写成三维流形的形式

$$\mathbf{X} = \mathbf{S} + \mathbf{Q} \quad (3)$$

其中  $\mathbf{X}, \mathbf{S}, \mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{M_1 \times M_2 \times M_3}$ ,  $[\mathbf{X}]_{m_1, m_2, m_3} = x_{m_1, m_2, m_3}$ ,

$$[\mathbf{S}]_{m_1, m_2, m_3} = s_{m_1, m_2, m_3}, [\mathbf{Q}]_{m_1, m_2, m_3} = q_{m_1, m_2, m_3}.$$

这里我们将三维采样阵列理解成分布在某一维上的二维切片矩阵的集合, 即将不含噪声的三维流形  $\mathbf{S}$  写成如下形式

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}(:, :, 1), \mathbf{S}(:, :, 2), \dots, \mathbf{S}(:, :, M_3)] \quad (4)$$

其中,  $\mathbf{S}(:, :, k) \in \mathbb{C}^{M_1 \times M_2}$  且有

$$[\mathbf{S}(:, :, k)]_{m_1, m_2} = s_{m_1, m_2, k}, k = 1, 2, \dots, M_3.$$

或者

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}(:, 1, :), \mathbf{S}(:, 2, :), \dots, \mathbf{S}(:, M_2, :)] \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{S}(:, k, :) \in \mathbb{C}^{M_1 \times M_3}$  且有

$$[\mathbf{S}(:, k, :)]_{m_1, m_3} = s_{m_1, k, m_3}, k = 1, 2, \dots, M_2.$$

容易验证对  $\mathbf{S}(:, :, k)$  及  $\mathbf{S}(:, k, :)$  有下式成立

$$\mathbf{S}(:, :, k) = \mathbf{G}_1 \mathbf{\Gamma}_3(k) \mathbf{G}_2^H, k = 1, 2, \dots, M_3 \quad (6)$$

或

$$\mathbf{S}(:, k, :) = \mathbf{G}_1 \mathbf{\Gamma}_2(k) \mathbf{G}_3^H, k = 1, 2, \dots, M_2 \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{G}_n = [g_{n,1}, g_{n,2}, \dots, g_{n,F}], n = 1, 2, 3 \\ \mathbf{\Gamma}_2(k) = \text{diag}(\alpha_1 b_1^{-k}, \alpha_2 b_2^{-k}, \dots, \alpha_F b_F^{-k}) \\ \mathbf{\Gamma}_3(k) = \text{diag}(\alpha_1 c_1^{-k}, \alpha_2 c_2^{-k}, \dots, \alpha_F c_F^{-k}) \\ \mathbf{g}_{1,f} = [a_f, a_f^2, \dots, a_f^{M_1}]^T \\ \mathbf{g}_{2,f} = [b_f, b_f^2, \dots, b_f^{M_2}]^T \\ \mathbf{g}_{3,f} = [c_f, c_f^2, \dots, c_f^{M_3}]^T \\ a_f = e^{j\omega_1 f}, b_f = e^{-j\omega_2 f}, c_f = e^{-j\omega_3 f} \quad (8)$$

为了估计第一维的频率参数, 定义协方差矩阵  $\mathbf{R}_1$

$$\mathbf{R}_1 = \frac{1}{M_3} \sum_{k=1}^{M_3} \mathbf{X}(:, :, k) \mathbf{X}^H(:, :, k) \quad (9)$$

由式(3)、(4)、(6)、(8),  $\mathbf{R}_1$  的期望可表示为

$$E\{\mathbf{R}_1\} = \frac{1}{M_3} \sum_{k=1}^{M_3} \mathbf{G}_1 \mathbf{\Gamma}_3(k) \mathbf{G}_2^H \mathbf{G}_2 \mathbf{\Gamma}_3^H(k) \mathbf{G}_1^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_{M_1} \\ = \frac{1}{M_3} \mathbf{G}_1 \left( \sum_{k=1}^{M_3} \mathbf{\Gamma}_3(k) \mathbf{G}_2^H \mathbf{G}_2 \mathbf{\Gamma}_3^H(k) \right) \mathbf{G}_1^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_{M_1} \\ = \mathbf{G}_1 \mathbf{B}_1 \mathbf{G}_1^H + \sigma_n^2 \mathbf{I}_{M_1} \quad (10)$$

其中  $\mathbf{B}_1 = \frac{1}{M_3} \sum_{k=1}^{M_3} \mathbf{\Gamma}_3(k) \mathbf{G}_2^H \mathbf{G}_2 \mathbf{\Gamma}_3^H(k)$  是  $F \times F$  的矩阵,  $\mathbf{I}_{M_1}$  是  $M_1 \times M_1$  的单位矩阵.

另一方面, 对  $\mathbf{R}_1$  进行 EVD 分解有

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{V}_{1s} \mathbf{\Lambda}_{1s} \mathbf{V}_{1s}^H + \mathbf{V}_{1n} \mathbf{\Lambda}_{1n} \mathbf{V}_{1n}^H \quad (11)$$

其中  $\mathbf{V}_{1s} \in \mathbb{C}^{M_1 \times F}$  的列向量为张成  $\mathbf{R}_1$  的信号子空间的特征向量,  $\mathbf{V}_{1n} \in \mathbb{C}^{M_1 \times (M_1 - F)}$  的列向量为张成  $\mathbf{R}_1$  的噪声子空间的特征向量, 而  $\mathbf{\Lambda}_{1s}$  和  $\mathbf{\Lambda}_{1n}$  的对角线元素分别是

对应的特征值. 定义矩阵  $E_1$ ,

$$E_1 = I_{M_1} - V_{1s} V_{1s}^H \quad (12)$$

接下来有两种方法可以得到第一维频率的估计值  $\{\hat{\omega}_{1,f}\}$ :

(a) 基于 MUSIC 的方法:  $\{\hat{\omega}_{1,f}\}$  通过搜索关于  $\omega$  的谱函数  $p_1(\omega)$  的谱峰得到

$$p_1(\omega) = \frac{1}{\beta_1^H(\omega) E_1 \beta_1(\omega)} \quad (13)$$

其中  $\beta(\omega) = [e^{j\omega}, e^{j2\omega}, \dots, e^{jM_1\omega}]^T$ .

(b) 基于 Root-MUSIC 的方法: 通过矩阵  $E_1$  构造函数

$$f_1(\omega) = \beta_1^H(\omega) E_1 \beta_1(\omega) = \beta_1^T(1/z) E_1 \beta_1(z) \triangleq f_1(z) \quad (14)$$

其中  $z = e^{-j\omega}$ , 而多项式  $f_1(z)$  有  $2(M_1 - 1)$  个根, 取其中模最大的  $F$  个作为  $\{\omega_{1,f}\}$  的估计值.

## 2.2 第二维频率参数估计

为了估计第二维的频率参数, 我们首先用第一维的频率估计值  $\{\hat{\omega}_{1,f}\}$  构造出相应的投影矩阵  $P_f^\perp, f = 1, 2, \dots, F$ , 之后利用投影矩阵对三维采样阵列分布在第三维上的二维切片矩阵进行投影, 以此将第二维中的各个频率分量  $\{\hat{\omega}_{2,f}\}$  分离, 并通过 MUSIC 或 Root-MUSIC 方法最终将它们估计出来. 显然  $\{\hat{\omega}_{1,f}\}$  与  $\{\hat{\omega}_{2,f}\}$  在此过程中可自动配对.

$P_f^\perp$  定义为

$$P_f^\perp = I_{M_1} - H_f (H_f^H H_f)^{-1} H_f^H \quad (15)$$

其中  $H_f = [h(\hat{\omega}_{1,1}), \dots, h(\hat{\omega}_{1,f-1}), h(\hat{\omega}_{1,f+1}), \dots, h(\hat{\omega}_{1,F})]$

$$h(\hat{\omega}_{1,k}) = [e^{j\hat{\omega}_{1,k}}, e^{j2\hat{\omega}_{1,k}}, \dots, e^{jM_1\hat{\omega}_{1,k}}]^T.$$

将投影矩阵  $P_f^\perp, f = 1, 2, \dots, F$  作用于分布在第三维上的二维切片矩阵  $\mathbf{X}(:, :, k)$ , 我们可以得到分量分离后的信号矩阵  $X_{2,f}(k)$ , 它只含有与  $\hat{\omega}_{1,f}$  相对应的  $\hat{\omega}_{2,f}$  的相关频率信息.  $X_{2,f}(k)$  定义为

$$X_{2,f}(k) = P_f^\perp \mathbf{X}(:, :, k) = P_f^\perp \mathbf{G}_1 \Gamma_3(k) \mathbf{G}_2^H + P_f^\perp \mathbf{Q}(:, :, k) \quad (16)$$

其中  $k = 1, 2, \dots, M_3, f = 1, 2, \dots, F$ .

与式(9)类似, 定义协方差矩阵  $R_{2,f}$

$$R_{2,f} = \frac{1}{M_3} \sum_{k=1}^{M_3} X_{2,f}^H(k) X_{2,f}(k), f = 1, 2, \dots, F \quad (17)$$

$R_{2,f}$  的期望可表示为

$$\begin{aligned} E\{R_{2,f}\} &= \frac{1}{M_3} \sum_{k=1}^{M_3} \mathbf{G}_2 \Gamma_3^H(k) \mathbf{G}_1^H P_f^{\perp H} P_f^\perp \mathbf{G}_1 \Gamma_3(k) \mathbf{G}_2^H + \sigma_n^2 I_{M_2} \\ &= \frac{1}{M_3} \mathbf{G}_2 \left( \sum_{k=1}^{M_3} \Gamma_3^H(k) \mathbf{G}_1^H P_f^{\perp H} P_f^\perp \mathbf{G}_1 \Gamma_3(k) \right) \mathbf{G}_2^H + \sigma_n^2 I_{M_2} \\ &= \mathbf{G}_2 \mathbf{B}_{2,f} \mathbf{G}_2^H + \sigma_n^2 I_{M_2} \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $\mathbf{B}_{2,f} = \frac{1}{M_3} \sum_{k=1}^{M_3} \Gamma_3^H(k) \mathbf{G}_1^H P_f^{\perp H} P_f^\perp \mathbf{G}_1 \Gamma_3(k)$  是  $F \times F$

的矩阵,  $I_{M_2}$  是  $M_2 \times M_2$  的单位矩阵.

另一方面, 对  $R_{2,f}$  进行 EVD 分解有

$$R_{2,f} = V_{2s,f} \mathbf{A}_{2s,f} V_{2s,f}^H + V_{2n,f} \mathbf{A}_{2n,f} V_{2n,f}^H \quad (19)$$

其中  $V_{2s,f} \in \mathbb{C}^{M_2 \times 1}$  的列向量为张成  $R_{2,f}$  的信号子空间的特征向量,  $V_{2n,f} \in \mathbb{C}^{M_2 \times (M_2 - 1)}$  的列向量为张成  $R_{2,f}$  的噪声子空间的特征向量, 而  $\mathbf{A}_{2s,f}$  和  $\mathbf{A}_{2n,f}$  的对角线元素分别是对应的特征值. 定义矩阵  $E_{2,f}$

$$E_{2,f} = I_{M_2} - V_{2s,f} V_{2s,f}^H \quad (20)$$

接下来有两种方法可以得到第二维频率的估计值  $\{\hat{\omega}_{2,f}\}$

(a) 基于 MUSIC 的方法:  $\{\hat{\omega}_{2,f}\}$  通过搜索关于  $\omega$  的谱函数  $p_{2,f}(\omega)$  的谱峰得到

$$p_{2,f}(\omega) = \frac{1}{\beta_2^H(\omega) E_{2,f} \beta_2(\omega)} \quad (21)$$

其中  $\beta_2(\omega) = [e^{j\omega}, e^{j2\omega}, \dots, e^{jM_2\omega}]^T$ .

(b) 基于 Root-MUSIC 的方法: 通过矩阵  $E_{2,f}$  构造函数

$$\begin{aligned} f_{2,f}(\omega) &= \beta_2^H(\omega) E_{2,f} \beta_2(\omega) \\ &= \beta_2^T(1/z) E_{2,f} \beta_2(z) \triangleq f_{2,f}(z) \end{aligned} \quad (22)$$

其中  $z = e^{j\omega}$ , 而多项式  $f_{2,f}(z)$  有  $2(M_2 - 1)$  个根, 取其中模最大的一个作为  $\omega_{2,f} (f = 1, 2, \dots, F)$  的估值.

## 2.3 第三维频率参数估计

与第二维的频率估计方法类似, 将投影矩阵  $P_f^\perp, f = 1, 2, \dots, F$  作用于分布在第二维上的二维切片矩阵  $\mathbf{X}(:, k, :)$ , 我们可以得到分量分离后的信号矩阵  $X_{3,f}(k)$ , 它只含有与  $\hat{\omega}_{1,f}$  相对应的  $\hat{\omega}_{3,f}$  的相关频率信息.  $X_{3,f}(k)$  定义为

$$\begin{aligned} X_{3,f}(k) &= P_f^\perp \mathbf{X}(:, k, :) \\ &= P_f^\perp \mathbf{G}_1 \Gamma_2(k) \mathbf{G}_3^H + P_f^\perp \mathbf{Q}(:, k, :) \end{aligned} \quad (23)$$

其中  $k = 1, 2, \dots, M_2, f = 1, 2, \dots, F$ .

定义协方差矩阵  $R_{3,f}$

$$R_{3,f} = \frac{1}{M_2} \sum_{k=1}^{M_2} X_{3,f}^H(k) X_{3,f}(k), f = 1, 2, \dots, F \quad (24)$$

$R_{3,f}$  的期望可表示为

$$\begin{aligned} E\{R_{3,f}\} &= \frac{1}{M_2} \sum_{k=1}^{M_2} \mathbf{G}_3 \Gamma_2^H(k) \mathbf{G}_1^H P_f^{\perp H} P_f^\perp \mathbf{G}_1 \Gamma_2(k) \mathbf{G}_3^H + \sigma_n^2 I_{M_3} \\ &= \frac{1}{M_2} \mathbf{G}_3 \left( \sum_{k=1}^{M_2} \Gamma_2^H(k) \mathbf{G}_1^H P_f^{\perp H} P_f^\perp \mathbf{G}_1 \Gamma_2(k) \right) \mathbf{G}_3^H + \sigma_n^2 I_{M_3} \\ &= \mathbf{G}_3 \mathbf{B}_{3,f} \mathbf{G}_3^H + \sigma_n^2 I_{M_3} \end{aligned} \quad (25)$$

其中  $\mathbf{B}_{3,f} = \frac{1}{M_2} \sum_{k=1}^{M_2} \Gamma_2^H(k) \mathbf{G}_1^H P_f^{\perp H} P_f^\perp \mathbf{G}_1 \Gamma_2(k)$  是  $F \times F$  的矩阵,  $I_{M_3}$  是  $M_3 \times M_3$  的单位矩阵.

另一方面, 对  $R_{3,f}$  进行 EVD 分解有

$$R_{3,f} = V_{3s,f} \mathbf{A}_{3s,f} V_{3s,f}^H + V_{3n,f} \mathbf{A}_{3n,f} V_{3n,f}^H \quad (26)$$

其中  $V_{3s,f} \in \mathbb{C}^{M_3 \times 1}$  的列向量为张成  $R_{3,f}$  的信号子空间

的特征向量,  $\mathbf{V}_{3n,f} \in \mathbb{C}^{M_3 \times (M_3 - 1)}$  的列向量为张成  $\mathbf{R}_{3,f}$  的噪声子空间的特征向量, 而  $\mathbf{\Lambda}_{3s,f}$  和  $\mathbf{\Lambda}_{3n,f}$  的对角线元素分别是对应的特征值. 定义矩阵  $\mathbf{E}_{3,f}$

$$\mathbf{E}_{3,f} = \mathbf{I}_{M_3} - \mathbf{V}_{3s,f} \mathbf{V}_{3s,f}^H \quad (27)$$

仍然利用以下两种方法得到第三维频率的估计值  $\{\hat{\omega}_{3,f}\}$ :

(a) 基于 MUSIC 的方法:  $\{\hat{\omega}_{3,f}\}$  通过搜索关于  $\omega$  的谱函数  $p_{3,f}(\omega)$  的谱峰得到

$$p_{3,f}(\omega) = \frac{1}{\boldsymbol{\beta}_3^H(\omega) \mathbf{E}_{3,f} \boldsymbol{\beta}_3(\omega)} \quad (28)$$

其中  $\boldsymbol{\beta}_3(\omega) = [e^{j\omega}, e^{2j\omega}, \dots, e^{jM_3\omega}]^T$ .

(b) 基于 Root-MUSIC 的方法: 通过矩阵  $\mathbf{E}_{3,f}$  构造函数

$$\begin{aligned} f_{3,f}(\omega) &= \boldsymbol{\beta}_3^H(\omega) \mathbf{E}_{3,f} \boldsymbol{\beta}_3(\omega) \\ &= \boldsymbol{\beta}_3^T(1/z) \mathbf{E}_{3,f} \boldsymbol{\beta}_3(z) \triangleq f_{3,f}(z) \end{aligned} \quad (29)$$

其中  $z = e^{j\omega}$ , 而多项式  $f_{3,f}(z)$  有  $2(M_3 - 1)$  个根, 取其中模最大的一个作为  $\omega_{3,f} (f = 1, 2, \dots, F)$  的估计值. 很明显, 在整个算法过程中三维频率参数可以自动进行参数配对.

本节最后对所提算法流程归纳如下:

- (1) 利用式(9)计算  $\mathbf{R}_1$ , 并对其进行 EVD 分解;
- (2) 由式(12)计算  $\mathbf{E}_1$ , 并用式(13)或(14)直接得到所有的  $\{\hat{\omega}_{1,f}\}, f = 1, 2, \dots, F$ ;
- (3) 对信号各分量 ( $f = 1, 2, \dots, F$ ), 由式(15)构造投影矩阵  $\mathbf{P}_f^\perp$ , 用式(16)、(17)计算  $\mathbf{R}_{2,f}$ ;
- (4) 对  $\mathbf{R}_{2,f}$  进行 EVD 分解, 由式(20)计算  $\mathbf{E}_{2,f}$ , 并用式(21)或(22)得到  $\{\hat{\omega}_{2,f}\}$ ;
- (5) 用式(23)、(24)计算  $\mathbf{R}_{3,f}$ , 对  $\mathbf{R}_{3,f}$  进行 EVD 分解, 由式(27)计算  $\mathbf{E}_{3,f}$ , 最后用式(28)或(29)得到  $\{\hat{\omega}_{3,f}\}$ .

### 3 复杂度分析

本文所提算法的运算复杂度为  $O(M(M_1 + F \sum_{n=2}^3 (M_1 + M_n)))$ , 细节部分见表 1. 而对 IMDF 算法, 由于将三维采样阵列向量化后进行重排, 最终需要对一个维数很大的矩阵进行 SVD 分解, 其算法的运算复杂度为  $O(M^3)$ . 对于 HOSVD 算法, 除去

对三维采样阵列进行平滑处理所需的运算量外, 其算法的运算复杂度为  $O(\prod_{n=1}^3 (M_n - L_n + 1) L_n^3)$ , 其中  $L_n (n = 1, 2, 3)$  为进行平滑处理时各维中的子流形的个数. 显然, 本文所提算法 Root-MUSIC 的运算复杂度要优于 IMDF 算法及 HOSVD 算法.

表 1 所提 Root-MUSIC 算法的运算复杂度分析

运算	规模	复数乘法运算次数
Construct $\mathbf{R}_1$	$M_1 \times M_1$	$M_1^2 M_2 M_3$
EVD of $\mathbf{R}_1$	$M_1 \times M_1$	$25M_1^3$
Compute $\mathbf{E}_1$	$M_1 \times M_1$	$M_1^2 F$
Construct $\mathbf{R}_{2,f}$	$M_2 \times M_2$	$FM(M_1 + M_2)$
EVD of $\mathbf{R}_{2,f}$	$M_2 \times M_2$	$F(25M_2^3)$
Compute $\mathbf{E}_{2,f}$	$M_2 \times M_2$	$FM_2^2$
Construct $\mathbf{R}_{3,f}$	$M_3 \times M_3$	$FM(M_1 + M_3)$
EVD of $\mathbf{R}_{3,f}$	$M_3 \times M_3$	$F(25M_3^3)$
Compute $\mathbf{E}_{3,f}$	$M_3 \times M_3$	$FM_3^2$
Total		$O(M(M_1 + F \sum_{n=2}^3 (M_1 + M_n)))$

### 4 仿真结果

本节中给出所提算法在白高斯噪声情况下的性能仿真分析. 其中, 各维平均均方误差 AMSE<sub>n</sub> 定义为:

$$\text{AMSE}_n = E\left\{ \frac{1}{F} (\omega_{n,f} - \hat{\omega}_{n,f})^2 \right\}, n = 1, 2, 3$$

其中  $\hat{\omega}_{n,f}$  为  $\omega_{n,f}$  的估计值. 信号功率率定义为

$$\sigma_s^2 = \left( \sum_{m_1=1}^{M_1} \sum_{m_2=1}^{M_2} \sum_{m_3=1}^{M_3} |s_{m_1, m_2, m_3}|^2 \right) / (M_1 M_2 M_3).$$

信噪比定义为:  $\text{SNR} = \sigma_s^2 / \sigma_n^2$ . 首先给出了各算法的性能仿真实验. 实验中信号仿真参数设定为  $F = 3, (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (2, 3e^{j0.15}, 3), M_1 = M_2 = M_3 = 15,$

$$(\omega_{1,1}, \omega_{1,2}, \omega_{1,3}) = (0.1\pi, 0.24\pi, 0.38\pi),$$

$$(\omega_{2,1}, \omega_{2,2}, \omega_{2,3}) = (0.24\pi, 0.34\pi, 0.44\pi),$$

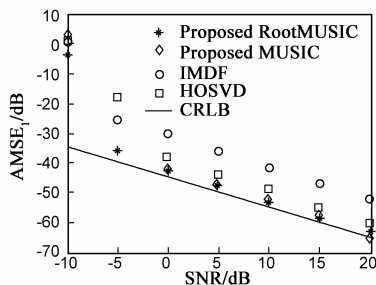


图1 第一维MSE图

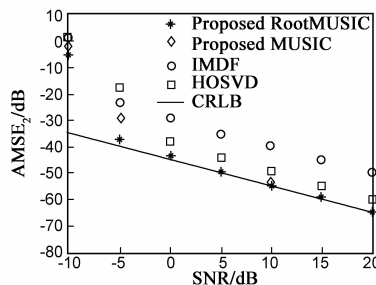


图2 第二维MSE图

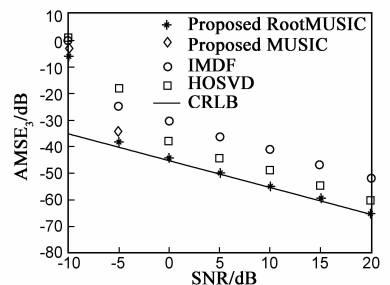


图3 第三维MSE图

$(\omega_{3,1}, \omega_{3,2}, \omega_{3,3}) = (0.1\pi, 0.15\pi, 0.2\pi)$ , 最终仿真数据为 200 次运行的平均结果,IMDF 方法、HOSVD 方法及 CRLB 共同参与了比较.从仿真结果(图 1~3)来看,所提 Root-MUSIC 算法性能较好,在  $-5\text{dB}$  时即可达到 CRLB,而 IMDF 与 HOSVD 算法在  $-5\text{dB}$  时与 CRLB 还有较大距离;所提 MUSIC 算法性能略差于 Root-MUSIC 算法,但在相同信噪比条件下要优于 IMDF 与 HOSVD 算法.

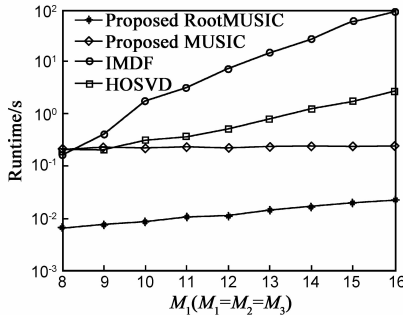


图4 运算复杂度比较图

从运算复杂度比较图(图 4)中可以明显看出,随着采样数的增加 IMDF 运算复杂度的增长要远快于其它算法, HOSVD 运算复杂度的增长次之, MUSIC 算法的运算复杂度基本没有变化,其原因在于 MUSIC 算法的运算复杂度主要受搜索区间长度及搜索步长的制约,在搜索区间长度及搜索步长没有变化的情况下其运算复杂度基本上也不变,而 Root-MUSIC 算法运算复杂度的增长最慢,这与前面复杂度分析的结果是一致的.同时, Root-MUSIC 算法的运算复杂度要较其它算法的复杂度要低几个数量级.因此,从仿真结果来看,所提算法无论是性能还是运算复杂度都要优于在三维情况下的 IMDF 算法及 HOSVD 算法.

## 5 结论

本文提出了一种基于子空间和投影分离的三维正弦信号的频率参数估计算法.算法的核心思想在于将三维采样阵列理解为散布在某一维上的二维切片矩阵阵列,以此来对三维采样阵列的降维处理,并通过投影分离方法来实现信号中各分量的分离,算法可保证各三维频率参数对自动配对.由于在整个估计过程中,算法所用的矩阵都维持原采样阵列的规模,算法的整体运算量较小.仿真结果表明所提算法在性能及运算复杂度上都优于三维情况下的 IMDF 算法及 HOSVD 算法.

## 参考文献

[1] K N Mokios, N D Sidiropoulos, M Pesavento, C F Mecklenbräuker. On 3-D harmonic retrieval for wireless channel sounding [A]. Proc of 2004 International Conference

on Acoustic, Speech and Signal Processing [C]. USA: IEEE, 2004. II89 – II92.

- [2] X Liu, N D Sidiropoulos, A Swami. Blind high-resolution localization and tracking of multiple frequencies hopped signals [J]. IEEE Transaction Signal Processing, 2002, 50(4): 889 – 901.
- [3] Y. Li, J. Razavilar, K J R Liu. A high-resolution technique for multidimensional NMR spectroscopy [J]. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 1998, 45(1): 78 – 86.
- [4] M Haardt, J A Nossék. Simultaneous schur decomposition of several nonsymmetric matrices to achieve automatic pairing in multidimensional harmonic retrieval problems [J]. IEEE Transaction Signal Processing, 1998, 46(1): 161 – 169.
- [5] X Liu, N D Sidiropoulos. On constant modulus multidimensional harmonic retrieval [A]. Proc of 2002 International Conference on Acoustic, Speech and Signal Processing [C]. USA: IEEE, 2002. 2977 – 2980.
- [6] J Liu, X Liu. An eigenvector-based approach for multidimensional frequency estimation with improved identifiability [J]. IEEE Transaction Signal Processing, 2006, 54(12): 4543 – 4556.
- [7] H L Van Trees. Optimum Array Processing: Detection, Estimation, and Modulation Theory [M]. New York: Wiley, 2002, pt. IV.
- [8] Rémy Boyer. Decoupled root-music algorithm for multidimensional harmonic retrieval [A]. 2008 IEEE 9th Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications [C]. USA: IEEE, 2008. 16 – 20.
- [9] M Pesavento, C F Mecklenbräuker, J F Böme. Multidimensional rank reduction estimator for parametric MIMO channel models [J]. EURASIP Journal of Application Signal Processing, 2004, (9): 1354 – 363.
- [10] M. Haardt, F Roemer, G. Del Galdo. Higher-order SVD-based subspace estimation to improve the parameter estimation accuracy in multidimensional harmonic retrieval problems [J]. IEEE Transaction Signal Processing, 2008, 56(7): 3198 – 3213.
- [11] A Thakre, M Haardt, F Roemer, K Giridhar. Tensor-based spatial smoothing (TB-SS) using multiple snapshots [J]. IEEE Transaction Signal Processing, 2010, 58(5): 2715 – 2728.
- [12] D Nion, N D Sidiropoulos. Tensor algebra and multidimensional harmonic retrieval in signal processing for MIMO radar [J]. IEEE Transaction Signal Processing, 2010, 58(11): 5693 – 5705.
- [13] L de Lathauwer, B de Moor, J Vanderwalle. A multilinear singular-value decomposition [J]. SIAM Journal of Matrix Analysis Application, 2000, 21(4): 1253 – 278.
- [14] L de Lathauwer, B de Moor, J Vanderwalle. On the best rank-1 and rank- $r_1, r_2, \dots, r_n$  approximation of higher-order ten-

sors [J]. SIAM Journal of Matrix Analysis Application, 2000, 21(4): 1324 – 342.

- [15] 马克江, 李军, 吴云韬, 廖桂生. 无需参数配对的近场源距离、方位、频率联合估计算法[J]. 电子学报, 2010, 38(6): 1454 – 1458.

Ma Kejiang, Li Jun, Wu Yuntao, Liao Guisheng, Joint ranges DOA's and frequencies estimation of near-field sources without pairing parameters [J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(6): 1454 – 1458. (in Chinese)

## 作者简介



**黄龙庭** 男, 汉族, 湖北随州人, 1981 年 7 月出生, 武汉工程大学硕士研究生.  
E-mail: huangl08@gmail.com



**吴云韬** 男, 苗族, 湖北利川人, 1973 年 9 月出生, 教授, 博士(后), 中国电子学会高级会员. 2008 年 3 月受聘为武汉工程大学“工大学者计划”工大学子特聘教授, 2009 年 4 月入选湖北省“楚天学者计划”特聘教授. 主要从事阵列信号处理、自适应信号处理中的信号检测和参数估计、智能信息处理、生物医学信号分析、无线传感器网络中的定位技术等方面的研究工作.

E-mail: ytwu@sina.com