

# 车式移动机器人轨迹跟踪控制方法

曹政才<sup>1,2</sup>, 赵应涛<sup>1</sup>, 付宜利<sup>2</sup>

(1. 北京化工大学信息科学与技术学院, 北京 100029;

2. 哈尔滨工业大学机器人技术与系统国家重点实验室, 黑龙江哈尔滨 150001)

**摘要:** 针对车式移动机器人轨迹跟踪这一典型控制任务, 本文提出一种滑模轨迹跟踪控制方法. 该方法采用 PI 型滑模面设计等效控制律, 利用变速函数代替符号函数获得切换控制率, 并运用 Lyapunov 理论证明系统的稳定性. 仿真结果表明该方法不但能使机器人有效跟踪任意参考轨迹, 而且能减小在控制中的抖振现象, 即使在外界干扰影响的情况下, 也具有良好的控制品质.

**关键词:** 车式移动机器人; 轨迹跟踪; 滑模控制

**中图分类号:** TP24      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2012) 04-0632-04

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.04.002

## Trajectory Tracking Control Approach of a Car-Like Mobile Robot

CAO Zheng-cai<sup>1,2</sup>, ZHAO Ying-tao<sup>1</sup>, FU Yi-li<sup>2</sup>

(1. College of Information Science and Technology, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China;

2. The State Key Laboratory of Robotics and Systems, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001, China)

**Abstract:** According to the trajectory tracking control of a car-like mobile robot, a sliding mode tracking control scheme is presented in this paper. An equivalent control law is obtained by using PI-type sliding surface and a switching control law is gotten by replacing sign function by variable rate function. The stability of the system is proved by Lyapunov theory. Simulation results demonstrate that the proposed strategy can not only track any reference trajectories, but also greatly reduce the chattering phenomenon of the system. Even though external disturbances exist, the proposed approach has a satisfactory control quality.

**Key words:** car-like mobile robot; trajectory tracking; sliding mode control

## 1 引言

近年来, 车式移动机器人 (Car-Like Mobile Robot, CLMR) 不仅由于在工业、服务业、航空等领域的广泛应用得到人们关注, 而且因其在控制理论方面遇到的挑战而引起大批学者的注意<sup>[1,2]</sup>. CLMR 要实现更高层次的任务, 有赖于底层的轨迹跟踪控制能力, 因而对轨迹跟踪的研究就显得非常有必要. 由于 CLMR 是一种高度非线性、强耦合的系统, 并且存在非完整约束, 使得传统的线性控制方法很难精确控制机器人的跟踪轨迹<sup>[3]</sup>.

为了获得精确 CLMR 轨迹跟踪, 研究人员提出许多控制方法, 如: 文献[4]利用神经预测控制方法实现四轮移动机器人的轨迹跟踪; 文献[5]采用 Backstepping 方法设计轨迹跟踪控制规律; 文献[6]提出一种模糊跟踪控制算法; 陈少斌等人<sup>[7]</sup>设计一种基于 Lyapunov 稳定性的最优状态反馈跟踪控制器. 虽然这些方法能够解决

CLMR 轨迹跟踪问题, 但是它们只是针对机器人运动学模型, 而对于有实际研究价值的动力学模型很少考虑. 由于滑模控制器设计简单、鲁棒性较强等优点, 在解决非线性系统控制的问题上具有良好的效果, 但是大多数学者<sup>[8,9]</sup>在解决抖振问题中一般采用饱和函数代替符号函数的方法, 虽然可以很大程度上减小抖振, 但控制规律可能会产生不连续.

本文在考虑车式移动机器人模型的基础上, 根据滑模控制方法来设计具有渐近稳定性的控制规律. 其中, 利用变速函数替换符号函数来消除抖振现象, 以保障控制规律的连续性. 通过该类型机器人对给定“8”形、螺旋形和正弦形轨迹的跟踪仿真, 证明控制规律的有效性.

## 2 运动学控制器设计

如图 1 所示为车式移动机器人, 其中后轮提供前进驱动力且与机器人运动方向一致, 前轮为转向轮. 该机

机器人的位姿由向量  $q = [x, y, \theta]^T$  表示,其中  $XOY$  是全局坐标系,  $(x, y)$  为两后轮中心坐标,  $\theta$  为车身方向与  $X$  轴夹角,  $l$  表示前轮与后轮的轴间距,  $\phi$  为前轮转向角,  $v$  为后轴中心点的速度. 在不考虑轮子侧滑等因素时, 车式移动机器人的运动学模型<sup>[10]</sup>:

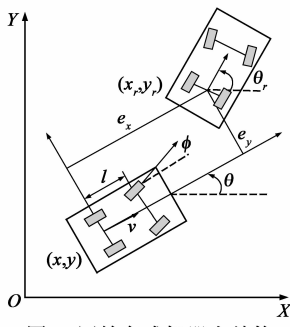


图1 四轮车式机器人结构及轨迹误差示意图

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta} = \frac{v}{l} \tan \phi \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\mathbf{v} = [v, \phi]^T$  为速度控制矢量. 四轮机器人非完整约束为:

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0 \quad (2)$$

$$\dot{x} \sin(\theta + \phi) - \dot{y} \cos(\theta + \phi) - l \dot{\theta} \cos \phi = 0 \quad (3)$$

设 CLMR 当前位姿  $q = [x, y, \theta]^T$ , 任意给定一条参考轨迹  $q_r = [x_r, y_r, \theta_r]^T$ , 该轨迹由参考机器人的运动轨迹描述, 其运动也满足非完整约束, 设定期望输入  $\mathbf{v}_r = [v_r, \phi_r]^T$ , 则  $q_r$  和  $\mathbf{v}_r$  也满足 CLMR 运动学模型即:

$$\begin{cases} \dot{x}_r = v_r \cos \theta_r \\ \dot{y}_r = v_r \sin \theta_r \\ \dot{\theta}_r = \frac{v_r}{l} \tan \phi_r \end{cases} \quad (4)$$

其中  $v_r, \phi_r$  为期望速度和转向角.

如果给定参考轨迹以函数形式表示, 即  $(x_r(t), y_r(t))$ , 那么

$$\begin{aligned} v_r(t) &= \pm \sqrt{\dot{x}_r^2(t) + \dot{y}_r^2(t)} \\ w_r(t) &= \frac{\dot{x}_r(t)\ddot{y}_r(t) - \ddot{x}_r(t)\dot{y}_r(t)}{\dot{x}_r^2(t) + \dot{y}_r^2(t)} \end{aligned} \quad (5)$$

其中, 设  $\dot{\theta}_r = w_r$ .

因此有必要选择一个合适的控制规律  $\mathbf{v}_c = [v_c, \phi_c]^T$ , 使得  $t \rightarrow \infty$  时  $q \rightarrow q_r$ . 定义全局坐标系下的机器人位姿误差为:

$$e_p = q_r - q = \begin{bmatrix} x_r - x \\ y_r - y \\ \theta_r - \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} \quad (6)$$

式(6)在机器人坐标系下可表示为:

$$e = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\theta \end{bmatrix} = T_e(q_r - q) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中,  $T_e$  为坐标转换矩阵.

对式(7)求导, 可得到:

$$\dot{e} = \begin{bmatrix} \dot{e}_x \\ \dot{e}_y \\ \dot{e}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v}{l} \tan \phi e_y - v + v_r \cos e_\theta \\ -\frac{v}{l} \tan \phi e_x + v_r \sin e_\theta \\ \frac{v_r}{l} \tan \phi_r - \frac{v}{l} \tan \phi \end{bmatrix} \quad (8)$$

定义如下 Lyapunov 方程

$$V_1 = \frac{1}{2} (e_x^2 + e_y^2) + \frac{1 - \cos e_\theta}{k_2} \quad (9)$$

其中,  $k_1 > 0$ , 对上式求导并结合式(8)有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= e_x \dot{e}_x + e_y \dot{e}_y + \frac{e_\theta \sin e_\theta}{k_2} \\ &= -e_x (v - v_r \cos e_\theta) - \frac{l \sin e_\theta}{k_2 v} \left( \tan \phi - \frac{v_r}{v} \tan \phi_r - \frac{k_2 l e_y v_r}{v} \right) \end{aligned}$$

因此选择

$$\begin{cases} v_c = k_1 e_x + v_r \cos e_\theta \\ \phi_c = a \tan \left( \frac{v_r}{v_c} \tan \phi_r + \frac{k_2 l e_y v_r}{v_c} + \frac{k_3 l \sin e_\theta}{v_c} \right) \end{cases} \quad (10)$$

作为运动学控制规律, 则  $\dot{V}_1 \leq 0$ , 其中  $k_1, k_2, k_3$  均为正实数. 该控制器的目的就是为动力学控制器提供参考的线速度和转向角.

### 3 动力学控制器设计

轮式移动机器人简化动力学模型一般可以表示为:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{\tau_1}{m} \\ \ddot{\theta} &= \frac{\tau_2}{I} \end{aligned} \quad (11)$$

其中,  $\tau_1$  和  $\tau_2$  分别是机器人的驱动力矩和转动力矩,  $m$  为机器人质量,  $I$  为机器人转动惯量.

结合式(1)和式(11), 有

$$\phi = \frac{\tau_2 l - I v \tan \phi}{I v \sec^2 \phi} \quad (12)$$

动力学控制器是把运动学控制器的输出  $\mathbf{v}_c = [v_c, \phi_c]^T$  作为参考输入, 输出为力矩  $\bar{\tau} = [\tau_1, \tau_2]^T$ , 使得  $t \rightarrow \infty$  时,  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_c$ .

定义误差  $e_v = v_c - v$ ,  $e_\phi = \phi_c - \phi$ , 并选择 PI 型滑模面:

$$S(t) = \begin{bmatrix} s_v(t) \\ s_\phi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_v + \alpha_1 \int_0^t e_v(\gamma) d\gamma \\ e_\phi + \alpha_2 \int_0^t e_\phi(\gamma) d\gamma \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中,  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ .

对上式微分得到:

$$\dot{S}(t) = \begin{bmatrix} \dot{s}_v(t) \\ \dot{s}_\phi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{e}_v + \alpha_1 e_v \\ \dot{e}_\phi + \alpha_2 e_\phi \end{bmatrix} \quad (14)$$

显然, 如果  $\alpha_1, \alpha_2$  选择合适, 则跟踪误差  $e_v(\infty)$

$\rightarrow 0, e_\phi(\infty) \rightarrow 0$ .

把式(11)、(12)带入到式(14),并使  $\dot{S}(t) = 0$ ,则

$$\dot{s}_v = \dot{v}_c - \frac{\tau_1}{m} + \alpha_1 e_v = 0 \quad (15)$$

$$\dot{s}_\phi = \dot{\phi}_c - \dot{\phi} + \alpha_2 e_\phi = 0$$

可得到等效控制规律

$$\begin{cases} \tau_{eq1} = m(\dot{v}_c + \alpha_1 e_v) \\ \tau_{eq2} = \frac{I}{l}(\dot{\phi}_c v \sec^2 \phi + \dot{v} \tan \phi + \alpha_2 e_\phi v \sec^2 \phi) \end{cases} \quad (16)$$

控制规律式(16)可使得系统状态保持在滑模面上,但是外界干扰不可避免的存在,因此必须考虑切换控制  $\tau_{sw}$ ,所设计的滑模控制包括两个部分:等效控制和切换控制,即

$$\begin{cases} \tau_1 = \tau_{eq1} + \beta_1 \operatorname{sgn}(s_v) \\ \tau_2 = \tau_{eq2} + \beta_2 \operatorname{sgn}(s_w) \end{cases} \quad (17)$$

其中,  $\beta_1, \beta_2 > 0$ ,  $\operatorname{sgn}(S) = [\operatorname{sgn}(s_v) \operatorname{sgn}(s_w)]^T$ . 假设干扰为  $\eta = [\eta_1, \eta_2]^T$ , 动力学模型表达式变为:

$$\dot{v} = \frac{\tau_1}{m} + \eta_1 \quad (18)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\tau_2 l - I \dot{v} \tan \phi}{I v \sec^2 \phi} + \eta_2$$

为了削弱“抖动”现象,我们引入变速函数  $vs(S, \epsilon)$  来代替  $\operatorname{sgn}(S)$ , 因此式(17)变为

$$\begin{cases} \tau_1 = \tau_{eq1} + \beta_1 vs(s_1, \epsilon_1) \\ \tau_2 = \tau_{eq2} + \beta_2 vs(s_2, \epsilon_2) \end{cases} \quad (19)$$

其中,  $\epsilon = [\epsilon_1, \epsilon_2]$  为正数,

$$vs(S, \epsilon) = \begin{bmatrix} vs(s_v, \epsilon_1) \\ vs(s_\phi, \epsilon_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \| e_v \| \operatorname{sgn}(s_v) \\ \epsilon_2 \| e_w \| \operatorname{sgn}(s_\phi) \end{bmatrix}.$$

## 4 稳定性证明

考虑如下 Lyapunov 方程:

$$V_s = V_1 + V_2 \quad (20)$$

$$\text{其中, } V_1 = \frac{1}{2}(e_x^2 + e_y^2) + \frac{1 - \cos e_\theta}{k_2},$$

$$V_2 = \frac{1}{2} S^T S.$$

对  $V_s$  求导有:

$$\dot{V}_1 = -k_1 e_x^2 - \frac{k_3 l^2 \sin^2 e_\theta}{k_2 v^2} \leq 0,$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= S^T \dot{S} \\ &= s_v \dot{s}_v + s_\phi \dot{s}_\phi \\ &= -s_v \beta_1 vs(s_v, \epsilon_1) - s_v \eta_1 - s_\phi \beta_2 vs(s_\phi, \epsilon_2) - s_\phi \eta_2 \\ &\leq -s_v \beta_1 vs(s_v, \epsilon_1) + |\eta_1| s_v vs(s_v, \epsilon_1) - s_\phi \beta_2 vs(s_\phi, \epsilon_2) \\ &\quad + |\eta_2| s_\phi vs(s_\phi, \epsilon_2) \\ &= -s_v vs(s_v, \epsilon_1) (\beta_1 - |\eta_1|) - s_\phi vs(s_\phi, \epsilon_2) (\beta_2 - |\eta_2|) \end{aligned}$$

假设干扰  $\eta_i (i=1,2)$  有界且  $|\eta_i| \leq \gamma_i$ , 因此总是存在  $\beta_i$  使得  $\beta_i \geq \gamma_i$ , 因此  $\dot{V}_2 \leq 0$ , 系统稳定. 因此  $V_s$  的导数为非正, 整个系统渐近稳定.

## 5 仿真结果

以一个轮式移动机器人为研究对象, 其物理特征为: 质量  $m = 5\text{kg}$ , 转动惯量  $I = 2.5\text{kg} \cdot \text{m}^2$ , 前后轮间距  $l = 0.3\text{m}$ . 为了验证该控制规律的有效性, 分别选取典型

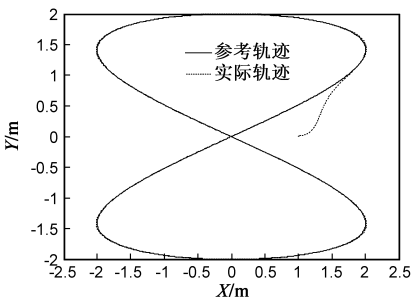


图2 轨迹跟踪

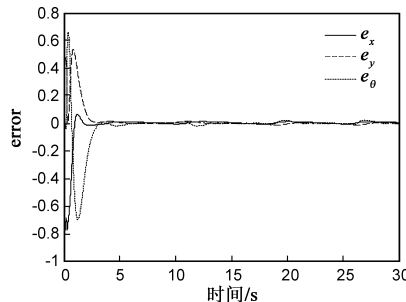


图3 跟踪误差

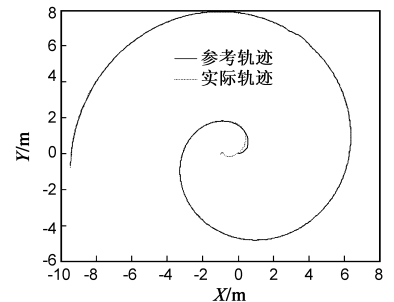


图4 轨迹跟踪

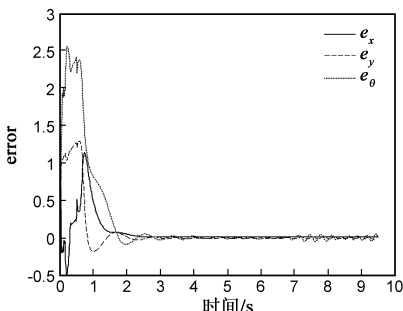


图5 跟踪误差

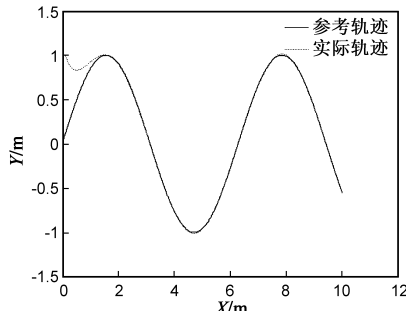


图6 轨迹跟踪

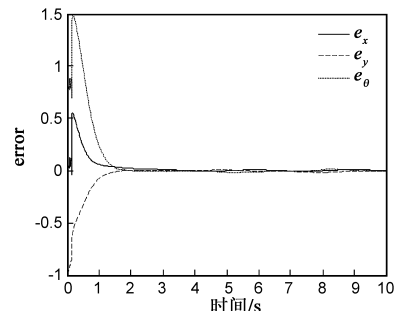


图7 跟踪误差

的“8”形、螺旋形和正弦形参考轨迹进行仿真。

### 5.1 “8”形轨迹

选取机器人起始位姿为  $q(0) = [1, 0, \pi/6]^T$ , 参考轨迹表示为:

$$x_r(t) = 2\sin\left(\frac{4t}{30}\right) \quad y_r(t) = 2\sin\left(\frac{2t}{30}\right),$$

干扰分别取方差为 0.1 和 0.2 的白噪声, 仿真结果如图 2 和图 3 所示. 从仿真结果可以看机器人在 4.0s 左右开始稳定, 跟踪误差很快趋近于零。

### 5.2 螺旋形轨迹

选取机器人起始位姿为  $q(0) = [-1, 0, -\pi/4]^T$ , 参考轨迹为:

$$x_r(t) = t\cos(t) \quad y_r(t) = t\sin(t),$$

干扰都取方差为 0.2 的白噪声仿真结果如图 4 和 5 所示. 仿真结果表明机器人在 2.7s 左右开始进入稳态, 跟踪误差趋近于零。

### 5.3 正弦形轨迹

选取机器人起始位姿为  $q(0) = [0, 1, 0]^T$ , 参考轨迹为:

$$x_r(t) = t \quad y_r(t) = \sin(t),$$

干扰都取方差为 0.4 的白噪声, 仿真结果如图 6 和 7 所示. 仿真结果表明机器人在 1.6s 左右开始进入稳态, 跟踪误差趋近于零。

以上仿真结果表明车式移动机器人能快速跟踪到任意参考轨迹, 并且在外界干扰存在的情况下, 跟踪误差都会快速趋近于零, 因此可以证明所提出的控制规律能够实现 CLMR 的轨迹跟踪。

## 6 结论

本文针对车式移动机器人轨迹跟踪问题, 利用滑模控制策略推导出具有渐近收敛性的机器人动力学控制规律, 该规律包括等效控制和切换控制两方面, 前者用来实现机器人跟踪, 后者用来减少抖动. 仿真结果表明该方法能保证机器人轨迹跟踪的准确性和稳定性, 能克服外界干扰的影响, 具有较强的鲁棒性。

### 参考文献

- [1] Duan Z, Cai Z. Fault diagnosis for mobile robots based on BPR and particle filter[J]. Chinese Journal of Electronics, 2006, 15(4): 929 - 932.
- [2] 黄庆成, 罗荣华. 一种多移动机器人主动协同定位方法的

研究[J]. 电子学报, 2010, 38(11): 2644 - 2648.

HUANG Qing-cheng, LUO Rong-hua. An active cooperative localization method for mobile robots [J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(11): 2644 - 2648. (in Chinese)

- [3] Li M, Hong B, Luo R. Mobile robot simultaneous localization and mapping using novel Rao-Blackwellised particle filter[J]. Chinese Journal of Electronics, 2007, 16(1): 34 - 39.
- [4] Gu D, Hu H. Neural predictive control for a car-like mobile robot[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2002, 39(2): 73 - 86.
- [5] U Kunar, N Sukavanam. Backstepping based trajectory tracking control of a four wheeled mobile robot[J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2008, 5(4): 403 - 410.
- [6] N Ouadah, O Lamine, B Fares. Car-like mobile robot oriented positioning by fuzzy controllers[J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2008, 5(3): 249 - 256.
- [7] 陈少斌, 蒋静坪. 四轮移动机器人轨迹跟踪的最优状态反馈控制[J]. 浙江大学学报, 2009, 43(12): 2186 - 2190.  
Chen Shao-bin, Jiang Jing-ping. Optimal state feedback control for trajectory of four-wheel mobile robot[J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2009, 43(12): 2186 - 2190. (in Chinese)
- [8] C Chen, et al. Design and implementation of an adaptive sliding-mod dynamic controller for wheeled mobile robots[J]. Mechatronics, 2009, 19(2): 156 - 166.
- [9] J H Lee, et al. Sliding mode control for trajectory tracking of mobile robot in the RFID sensor space[J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2009, 7(3): 429 - 435.
- [10] 任孝平, 蔡自兴. 基于阿克曼原理的车式移动机器人运动学模型[J]. 智能系统学报, 2009, 4(6): 534 - 537.  
Ren Xiao-ping, Cai Zi-xing. Using the ackerman principle for kinematic modeling of wheeled mobile robots [J]. CAAI Transactions on Intelligent Systems, 2009, 4(6): 534 - 537. (in Chinese)

### 作者简介



曹政才 男, 1974 年出生, 工学博士, 北京化工大学信息科学与技术学院副教授, 主要研究方向: 机器人控制技术, 复杂系统建模、优化与控制。

E-mail: giftczc@163.com