

# 基于局部相对形状上下文与 Q-谱的点模式匹配算法

梁 栋<sup>1,2</sup>, 朱 明<sup>1,2</sup>, 唐 俊<sup>1,2</sup>, 范益政<sup>2</sup>, 颜 普<sup>1,2</sup>

(1. 安徽大学电子信息工程学院, 安徽合肥 230039;

2. 安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室, 安徽合肥 230039)

**摘 要:** 本文提出了一种基于局部相对形状上下文与 Q-谱的点模式匹配算法, 对每个点构造相应的线图, 并对线图的无符号 Laplacian 矩阵进行谱分解; 利用谱分解所获得的特征值(Q-谱)作为点的特征, 进而计算点的初始匹配概率; 通过定义局部相对形状上下文计算点的相似性距离; 将 Q-谱方法与局部相对形状上下文结合进行概率松弛迭代获得匹配结果. 实验结果表明了本文算法的可行性与有效性.

**关键词:** 线图; Q-谱; 局部相对形状上下文; 概率松弛; 点模式匹配

**中图分类号:** TP391      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2012) 04-0636-06

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.04.003

## A Point Pattern Matching Algorithm Based on Local Relative Shape Context and Q-Spectra

LIANG Dong<sup>1,2</sup>, ZHU Ming<sup>1,2</sup>, TANG Jun<sup>1,2</sup>, FAN Yi-zheng<sup>2</sup>, YAN Pu<sup>1,2</sup>

(1. School of Electronics and Information Engineering, Anhui University, Hefei, Anhui 230039, China;

2. Key Lab Intelligent Computing & Signal Processing Ministry of Education, Anhui University, Hefei, Anhui 230039, China)

**Abstract:** This paper presents a point pattern matching algorithm based on local relative shape context and Q-spectra of line graph. A line graph is constructed for each point, and the spectrum decomposition is performed on the signless Laplacian matrix of line graph. The eigenvalues(Q-spectra) obtained from the spectrum decomposition are used to represent the point's feature, and the initial matching probability is calculated. Local relative shape context is defined to compute the similarity distance between any two points. Q-spectra method is combined with local relative shape context via a probabilistic relaxation approach to get the matching result. Experimental results indicate the effectiveness and feasibility of the proposed algorithm.

**Key words:** line graph; Q-spectra; local relative shape context; probabilistic relaxation; point pattern matching

## 1 引言

点模式匹配是找出相关点集之间的匹配关系, 在立体视觉匹配、图像配准、目标识别与跟踪等方面都有着广泛的应用, 是计算机视觉和模式识别中重要的基础问题, 也是目前各相关领域关注和研究的热点. 近年来, 谱图理论<sup>[1]</sup>作为一种有效的数学工具被引入到点模式匹配问题的研究中, 并发挥了重要作用. 应用谱图理论来讨论点模式匹配问题, 即通过所给的点集构造一些能够反映点集特征的图(Graph), 然后通过分析图的邻接矩阵或 Laplacian 矩阵的特征空间, 用特征空间里的向量

表示点的特征, 通过讨论向量之间的对应关系, 进而实现点的匹配. 文献[2~5]均通过分析图的特征向量来实现点的匹配, 这些谱方法的优点是构造简单, 计算量小; 缺点是易受结构误差的影响, 存在位置噪声时, 效果较差. 为了进一步提高谱方法的性能, 一些优化算法被融入到谱方法的框架中, 如, Carcassoni<sup>[6]</sup>将谱方法和 EM 算法结合起来, 通过点的亲近矩阵来获得点匹配的概率, 进一步提高算法对点集大小和位置噪声的鲁棒性; 唐俊等<sup>[7]</sup>将 TPS(thin plate spline)变形模型用于提高 Laplace 谱方法的匹配效果; 文献[8]通过一种松弛迭代的途径, 将形状上下文表示的局部相似性融入到 Laplace 谱方法之中以

减小随机位置抖动对谱方法匹配结果的影响,但该方法对旋转效果不好.赵健等<sup>[9]</sup>定义了一种相对形状上下文,通过相对形状上下文给出点的初始匹配概率,并利用分配图的亲近矩阵的主特征向量来实现点模式匹配,该方法对旋转具有不变性,但不能处理图像在翻转情况下的点模式匹配问题.

以上的谱方法均主要强调特征向量的作用,利用特征向量来求解点的匹配,从而忽略了特征值之间的相似性,即使文献[6]将特征值的因素在作为权值加入到求匹配概率的过程中,但并没有起到主要的作用.目前,谱图理论的研究主要还是集中在图的特征值方面<sup>[10~13]</sup>,应用代数和组合的理论,建立图的特征值和图的一些不变量之间的联系,如,图的 Laplacian 矩阵的 0 特征值的重数等于该图的连通分支数, Laplacian 矩阵的次小特征值又被称为图的代数连通度,代数连通度大于 0,则图是连通的,反之等于 0,则图是不连通的.设  $A$  为图的邻接矩阵,  $D$  为图的度对角矩阵,则  $D-A$  称为图的 Laplacian 矩阵,  $D+A$  称为图的无符号 Laplacian 矩阵 (Signless Laplacian Matrix). 在图的矩阵表示中,矩阵的全体特征值称为图的谱,具有相同谱但不同构的图称为是同谱图.有关同谱图的研究<sup>[14]</sup>也是谱图理论的一个重要方面,利用特征值来作为相应图的数字特征,考虑一个图能否由其特征值所唯一确定,目的是将图的结构信息通过图谱反映出来.无符号 Laplacian 矩阵的研究是近期的一个热点<sup>[13~17]</sup>,文献[14]指出由于无符号 Laplacian 矩阵较其他矩阵 (邻接矩阵、Laplacian 矩阵) 的同谱图少,因此无符号 Laplacian 的谱 (也称 Q-谱) 更加能够反映图的结构信息,更便于研究图的性质.

本文主要通过定义点的线图,并利用线图的无符号 Laplacian 矩阵的特征值来初始化点的匹配概率 (简称 Q-谱方法),定义一种局部相对形状上下文,与 Q-谱方法相结合进行松弛迭代,进而实现点集的匹配.本文算法的创新点在于将线图概念用于点模式匹配;利用线图的谱,即全体特征值,来获取初始匹配概率,本文算法不需要考虑特征向量;在松弛迭代过程中定义了局部相对形状上下文,具有对局部区域形变的不变性与旋转不变性,并且还具具有翻转不变性,因此,本文算法对平移、旋转、翻转、随机的点抖动都具有较强的鲁棒性.实验结果也表明了本文算法的有效性与可行性.

## 2 线图的 Q-谱

设  $I, J$  是两个相关点集.记  $I$  中的点为  $p_i (i = 1, 2, \dots, m)$ ,  $J$  中的点为  $q_j (j = 1, 2, \dots, n)$ ,不失一般性,设  $m \leq n$ .

对点集  $I$  构造赋权完全图,对任意两点之间的边赋以该边的长度,如此可以得到一个阶数为  $m$  的赋权

完全图.对于  $I$  中的点  $p_i$ ,有  $m-1$  条边与  $p_i$  相连,分别记为  $e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e_{m-1}$  (按长度排序),  $I$  中的  $m$  个点及  $e_1, e_2, \dots, e_{m-1}$  构成了一个星图  $X_i$ ,对  $X_i$ ,求其线图 (线图的求解过程就是将边变点的过程,线图图中的点是原图的边,点是邻接的当且仅当原图中相对应的边是关联的,如图 1 所示),由于  $e_1, e_2, \dots, e_{m-1}$  中任意两条边都是关联的,因此,  $S_i$  的线图是一个  $m-1$  阶的完全图  $L_i$ ,对  $L_i$  构造赋权的无符号 Laplacian 矩阵

$$D_{p_i}(j, k) = \begin{cases} |r_{jk}|, & j \neq k \\ \sum_{t=1}^{m-1} D_{p_i}(j, t), & j = k \end{cases} \quad (1)$$

其中  $r_{jk}$  是  $e_j$  与  $e_k$  的长度差.

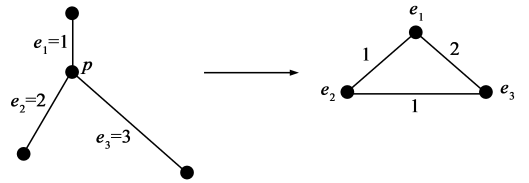


图1 左边为与点  $p$  相关的星图,右边为对应的线图

图 1 中  $e_1, e_2, e_3$  分别为与  $p$  关联的 3 条边,长分别为 1, 2, 3;右边为相应的线图,  $e_1, e_2, e_3$  分别变为 3 个点,边的权 (不是边的长度) 分别为  $e_1, e_2, e_3$  之间的长度差.

对  $D_{p_i}$  进行谱分解,获得  $m-1$  个特征值  $\lambda_1(p_i) \geq \lambda_2(p_i) \geq \dots \geq \lambda_{m-1}(p_i) \geq 0$ .将  $\lambda(p_i) = (\lambda_1(p_i), \lambda_2(p_i), \dots, \lambda_{m-1}(p_i))$  作为  $p_i (i = 1, 2, \dots, m)$  特征.

对于点集  $J$ ,由于  $J$  中的点数与  $I$  中的点数可能不相同,考虑到一些出格点大多是边缘点,对  $J$  中第  $j$  个点  $q_j (j = 1, 2, \dots, n)$  则选取与  $q_j$  相连接的前  $m-1$  个最短边来构造线图,通过上述方法,同样可获得  $q_j$  的特征表示  $\theta(q_j) = (\theta_1(q_j), \theta_2(q_j), \dots, \theta_{m-1}(q_j))$ ,其中  $\theta_1(q_j) \geq \theta_2(q_j) \geq \dots \geq \theta_{m-1}(q_j) \geq 0$ .

构建匹配矩阵  $M$ ,其元为:

$$M(i, j) = \exp \left( - \left\| \frac{\lambda(p_i)}{\sqrt{\sum_k^{m-1} \lambda_k^2(p_i)}} - \frac{\theta(q_j)}{\sqrt{\sum_k^{m-1} \theta_k^2(q_j)}} \right\| \right) \quad (2)$$

其中  $\|\cdot\|$  表示向量的 2-范数.采用文献[18]中的方法通过交替的行列归一化可以将  $M$  转化成双随机矩阵的形式 (仍记为  $M$ ),  $M(i, j)$  反映了点集  $I$  的第  $i$  个点  $p_i$  与点集  $J$  中第  $j$  个点  $q_j$  匹配程度,  $M_{ij}$  越大则认为  $p_i$  与  $q_j$  相匹配可能性越大.记该算法为 Q-谱方法.

## 3 局部相对形状上下文

在图像发生变化时,通常点的周围局部变化不大,在计算机视觉中,通常使用特征点邻近区域的信息来衡量特征点的相似性,形状上下文<sup>[19]</sup>的优点主要在于

其较强的局部描述能力,具体方法是对于任意点  $p_i$  提取特征时,以其为原点把点集分布的空间按对数极坐标划分为 60 个部分,其中对数距离  $\lg \rho$  分为 5 个部分,角度  $\theta$  分为 12 个部分.而后记录除  $p_i$  点外的其余点在这 60 个部分的分布数目来作为  $p_i$  的特征.文献[9]在文献[19]的基础上,提出了相对形状上下文,其只对点进行角度划分,而不再考虑对数距离  $\lg \rho$  项,虽然具有一定的尺度不变性,但在图像发生翻转时,文献[9]中所定义的相对形状上下文的描述子会与原图像相反,对匹配的效果产生不利的影响.

本文定义了一种局部相对形状上下文,沿半径方向不再进行划分,沿旋转角度方向划分 12 份的方法,如图 2 所示,通过求和与考察待匹配点  $p_i$  所有周围点的相对分布之和作为  $p_i$  的形状上下文,来刻画特征点的局部相似性,该方法在平移、旋转、翻转情况下均具有不变性,并具有局部形变的不变性.方法具体描述如下:点  $p_i$  相对于其周围点  $p_j$  ( $\|p - p_j\| \leq \lg \rho$ ) 的形状上下文  $S_{ij}$  就是以  $p_i$  为中心,将以矢量  $\mathbf{p}p_j$  为正轴的极坐标系下,  $\lg \rho$  为半径的圆内的除  $p_i, p_j$  之外的点,相对于该极坐标系的直方图分布.也就是,将按逆时针方向将角度划分成 12 个区间  $\text{bin}(k) = [(k-1) \times 30^\circ, k \times 30^\circ], k$

$= 1, 2, \dots, 12$ , 统计每个区间的点数,即

$$S_{ij}(k) = \# \{ p \neq p_i, p_j | p, p_i, p_j \in I, \angle p p_i p_j \in \text{bin}(k), \|p - p_i\| \leq \lg \rho, \|p - p_j\| \leq \lg \rho \} \quad (3)$$

其中  $\#$  表示集合的势,  $\angle p p_i p_j$  代表矢量  $\mathbf{p}p_i$  与  $\mathbf{p}p_j$  之间的逆时针旋转角度.为了达到翻转不变性,将  $p_i$  的局部相对形状上下文的值定义为

$$S_i(k) = \sum_j S_{ij}(k) \quad (4)$$

类似地,可对点集  $J$  定义局部相对形状上下文  $H_i(k)$ .在这种定义下,  $I$  的第  $i$  个点  $p_i$  与点集  $J$  中第  $j$  个点  $q_j$  相似性距离可以表示为:

$$C(i, j) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{12} \frac{[S_i(k) - H_j(k)]^2}{S_i(k) + H_j(k)} \quad (5)$$

注:假设  $p_i$  是对  $S_{ij}(k)$  有贡献的一个点,即  $(k-1) \times 30^\circ \leq \angle p p_i p_j \leq k \times 30^\circ$ , 考虑  $p_j$  相对于  $p_i$  与  $p_i$  的角度  $\angle p p_i p_j = 360^\circ - \angle p p_i p_j$ , 则  $(12-k) \times 30^\circ \leq \angle p p_i p_j \leq (13-k) \times 30^\circ$ . 即  $p_j$  对  $S_{ij}(13-k)$  有贡献,因此,  $S_i(k) = S_i(13-k)$ ,  $S_i$  是对称的,如图 2(c). 在图像发生翻转时,考虑角度的方向恰好与原图相反,由于  $S_i$  是对称的,因此局部相对形状上下文在图像翻转时具有不变性.

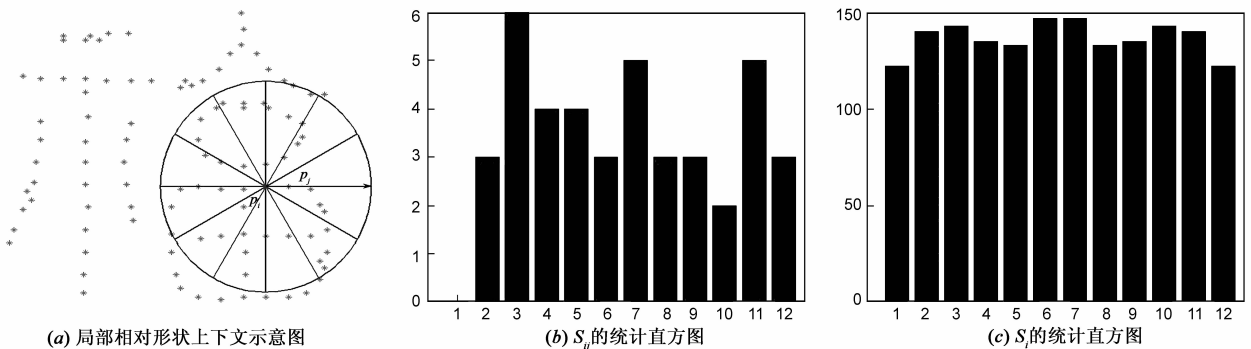


图2 局部相对形状上下文

#### 4 Q-谱方法与局部相对形状上下文相结合的一种概率松弛方法

概率松弛法在点模式匹配方面应用非常广泛,该方法采用迭代的方式,将局部约束表示的局部相容性进行传播,并行地调节点对之间的匹配概率,使其达到全局上的一致.应用 Q-谱方法所给的匹配结果是从全局角度去考虑点的相似性,由于局部相对形状上下文表示的局部相似性对位置抖动噪声具有良好的抑制作用,可以利用局部相对形状上下文的局部描述能力,用局部相似来迭代地更新 Q-谱方法所获得的全局性的匹配概率,进而提高算法的匹配精度.

首先,定义相容度函数

$$W(i = j, h = k) = (1 - C(i, j)) \times (1 - C(h, k)) \quad (6)$$

表示当点  $p_i$  与  $q_j$  匹配时,点  $p_h$  与  $q_k$  对其的支持度.从式中可以看出,  $C(h, k)$  越小,则对  $p_i$  与  $q_j$  的支持度越大.由于当点  $p_i$  与  $q_j$  匹配时,  $p_h$  仅能与一个  $q_k$  匹配,即与  $p_h$  相联系,对  $p_i$  与  $q_j$  的相容度最大的  $q_k$  相匹配,即

$$k = \arg \max_{k \neq j} W(i = j, h = k) \quad (7)$$

定义点对  $(p_i, q_j)$  的初始支持度为:

$$Z^0(i, j) = \frac{1}{m-1} \sum_{h \neq i} \max_{k \neq j} W(i = j, h = k) \quad (8)$$

在计算初始支持度时,视每一点对  $(p_h, q_k)$  对初始的支持度都具有相同的贡献.但在第  $n$  次迭代时,  $(p_h, q_k)$  对  $(p_i, q_j)$  的支持度不仅依赖于  $(p_h, q_k)$  的相似程度,也要依赖于  $Z^{n-1}(h, k)$  的值,取二者中最小的值,即

$$Z^n(i, j) = \frac{1}{m-1} \sum_{h \neq i} \max_{k \neq j} \min [Z^{n-1}(h, k), W(i = j, h = k)] \quad (9)$$

则更新的匹配概率可表示为:

$$M^{n+1}(i, j) = \frac{M^n(i, j) \times Z^n(i, j)}{\sum_{l=1}^{|J|} M^n(i, l) \times Z^n(i, l)} \quad (10)$$

以  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |Z^n(i, j) - Z^{n-1}(i, j)| < \epsilon$  或者给定的迭代次数  $IterNum$  作为迭代终止条件,在本文中,设定  $\epsilon = 0.001$ ,  $IterNum = 30$ .

在迭代完成后,根据所输出的匹配概率矩阵  $M$ ,按照如下方式判断匹配结果,若  $M(i, j)$  是相应的行与列上的最大元,则认为点集  $I$  的第  $i$  个点  $p_i$  与点集  $J$  中第  $j$  个点  $q_j$  相匹配.

本文算法的具体流程如下:

(1) 为待匹配点集  $I$  和  $J$  分别构造赋权完全图  $G_I$  和  $G_J$ ;

(2) 根据  $G_I$  和  $G_J$ , 分别通过每个点的前  $m-1$  条最短边构造对应的线图, 并为线图构造无符号 Laplacian 矩阵;

(3) 通过对无符号 Laplacian 矩阵进行谱分解, 获得每个点的特征值表示, 并根据式(2)计算初始匹配概率;

(4) 计算点集  $I$  和  $J$  中每个点的局部相对形状上下文以及相似性距离;

(5) 使用概率松弛迭代地更新匹配概率;

(6) 迭代结束后, 根据匹配概率, 给出匹配结果.

## 5 实验结果与分析

以下将结合局部相对形状上下文的 Q-谱方法简称为 QLRSC 算法.

### 5.1 模拟试验

通过一个汉字“福”的数据来验证本文算法处理图像的平移、旋转、缩放、翻转的不变性, 如图 3(a) 所示, 所有的点均得到了正确的匹配, 这体现出了本文算法相对于文献[7]所提出算法的优点.

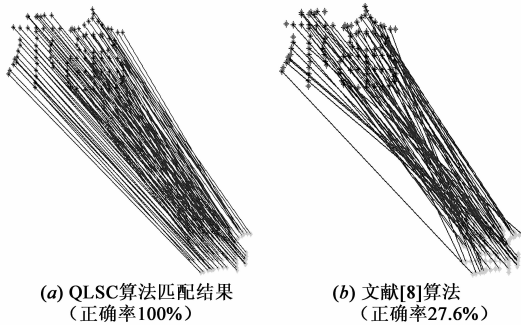


图3 模拟数据在平移、旋转、缩放、翻转下的匹配结果.

### 5.2 算法的性能分析

本小节将对算法进行分析, 首先分析 QLRSC 算法的复杂度, 由于 Q-谱方法的复杂度主要集中在谱分解上,

谱分解的复杂度是  $O(m^3)$ , 经过  $m$  次谱分解, 所以 Q-谱方法的复杂度为  $O(m^4)$ . 计算局部相对形状上下文的复杂度为  $O(m^4)$ , 概率松弛迭代的每步复杂度为  $O(m^4)$ , 所以 QLSC 算法总体的复杂度为  $O(m^4)$ .

我们还验证了 QLSC 算法在不同程度的随机位置抖动噪声下的匹配结果, 并与 Q-谱方法、Laplace 谱方法<sup>[4]</sup>, 以及文献[6]中的谱与 EM 算法相结合的方法(简称 Spectrum + EM)进行了对比实验. 选取 100 个随机点, 并对这些点加入位置噪声, 并要求位置噪声服从期望为 0, 已知均方差的高斯分布, 以点位置误差的均方差作为衡量噪声大小的指标, 经过 100 次实验, 取其正确匹配点数的平均值进行比较. 如图 4 所示, 随着位置噪声变大, 4 种方法的匹配准确率均下降, 但 Q-谱好于 Laplace 谱方法, 但相比较加了优化算法的 Spectrum + EM 要差, Q-谱方法结合局部相对形状上下文进行松弛迭代后, 效果要优于 Spectrum + EM, 这说明进行松弛迭代是有明显作用的.

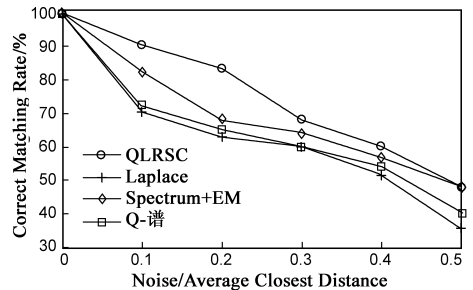


图4 不同方法对于位置噪声的匹配性能比较

### 5.3 真实图像实验

本文选择了 4 帧包装盒图像序列进行实验, 分别是第 20 帧、第 30 帧、第 40 帧、第 50 帧, 实验图像来自图像库 ALOI (<http://staff.science.uva.nl/~aloi/>). 每幅图像选取 40 个特征点, 分别用 Laplace 谱方法, Spectrum + EM 以及 QLRSC 算法进行对比实验. 表 1 统计了各图像之间的匹配结果, 从实验数据可以看出, 在随着帧数之间

表 1 实验结果统计

图像对	20-30	30-40	40-50	20-40	30-50	20-50
正确匹配数 (QLRSC 算法)	40	40	40	39	40	38
正确匹配率% (QLRSC 算法)	100	100	100	97.5	100	95
正确匹配数 (Laplace)	30	33	35	25	26	18
正确匹配率% (Laplace)	75	82.5	87.5	62.5	65	45
正确匹配数 (Spectrum + EM)	37	38	38	34	33	29
正确匹配率% (Spectrum + EM)	92.5	95	95	85	82.5	72.5

的差值变大,各算法的正确匹配率均有下降, Laplace 谱方法的匹配效果要弱于 Spectrum + EM 算法,在帧数差别不大时, Spectrum + EM 算法匹配正确率较高,但随着帧数差变大,其匹配正确率有较大的下降.但 QLRSC 算法明显好于其他两种算法,这说明视差的变化对

QLRSC 算法的影响较小.图 5 列举了 20 帧与 30 帧(左),30 帧与 50 帧(右)在不同方法下的匹配结果图像,图 6 列举了帧数差变大时(20 帧与 50 帧)的匹配结果图像.

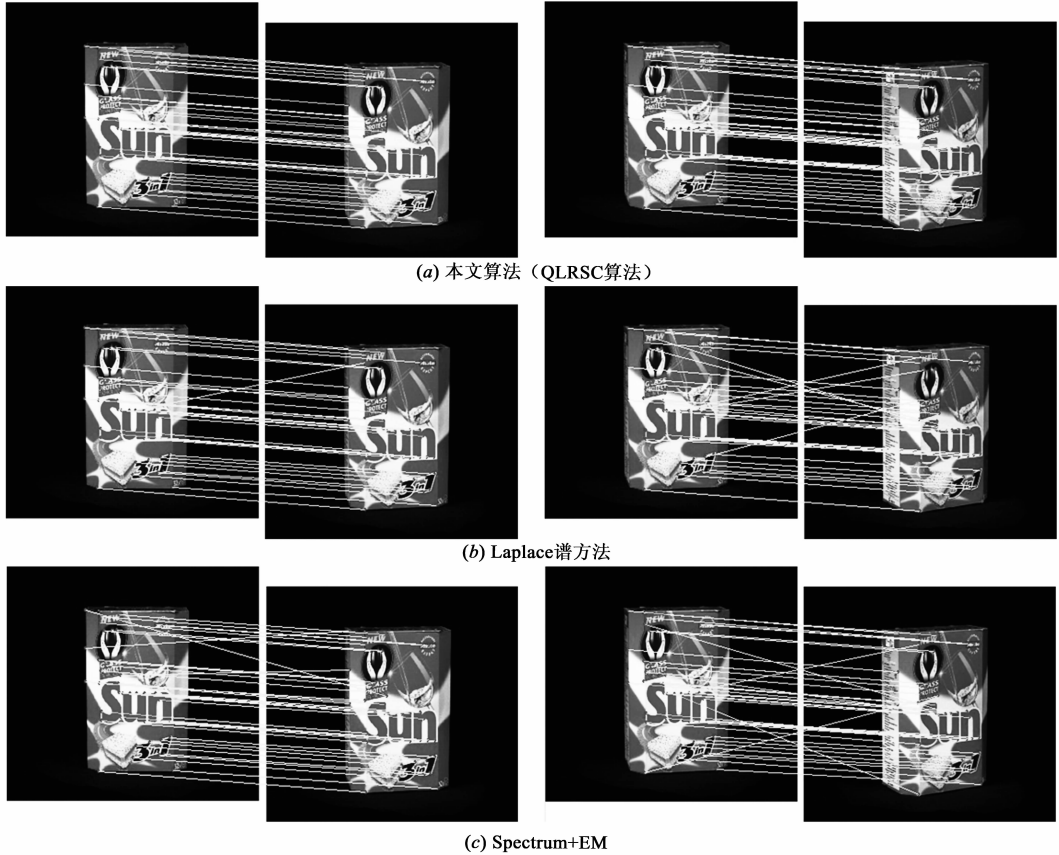


图5 20帧与30帧(左),30帧与50帧(右)在不同方法下的匹配结果

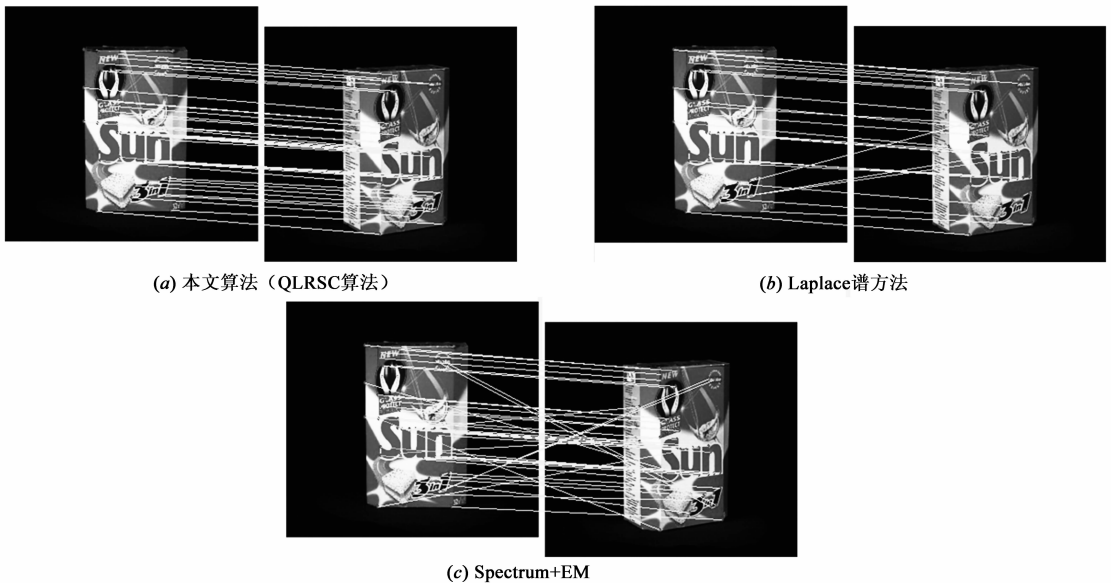


图6 20帧与50帧在不同方法下的匹配结果

## 6 结论

本文提出了一种基于局部相对形状上下文与 Q-谱的点模式匹配算法,首先,通过线图的 Q-谱获得点的初始匹配概率;其次,定义局部相对形状上下文计算点的相似性距离;最后,将 Q-谱与局部相对形状上下文结合进行概率松弛迭代获得匹配结果.实验结果表明本文算法的可行性与有效性.

与传统的谱方法不同,Q-谱方法完全应用特征值作为点的特征来获得初始匹配结果;局部相对形状上下文具有处理图像旋转、翻转、缩放的能力,结合二者的本文算法在实验中体现出了比较强的能力.今后,我们将研究如何进一步利用 Q-谱方法来处理模式识别的一些相关的匹配问题.

### 参考文献

- [1] Fan R K Chung. Spectral Graph Theory[M]. CBMS, 1997.
- [2] G L Scott, H C Longuet-Higgins. An algorithm for associating the features of 2 images[J]. Proc Roy Soc London Ser B, 1991, 244: 21 – 26.
- [3] L S Shapiro, J M Brady. Feature-based correspondence: An eigenvector approach[J]. Image Vision Comput, 1992, 10(5): 283 – 288.
- [4] 王年, 范益政, 韦穗, 梁栋. 基于图的 Laplace 谱的特征匹配[J]. 中国图像图形学报, 2006, 11(3): 332 – 336.  
Wang Nian, Fan Yi-zheng, Wei Sui, et al. Feature matching based on laplacian spectra of graphs[J]. Journal of Image and Graphics, 2006, 11(3): 332 – 336. (in Chinese)
- [5] 宣善立, 梁栋, 朱明, 范益政, 王年. 一种基于修正的最小生成树及其邻接谱的特征匹配算法[J]. 电子学报, 2010, 38(2): 269 – 274.  
Xuan Shan-li, Liang Dong, Zhu Ming, et al. A feature matching algorithm based on adjacent spectrum of modificatory minimize spanning tree[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(2): 269 – 274. (in Chinese)
- [6] M Carcassoni, E R Hancock. Spectral correspondence for point pattern matching[J]. Pattern Recognition, 2003, 36(1): 193 – 204.
- [7] Jun Tang, Dong Liang, Nian Wang, Yi zheng Fan. A laplacian spectral method for stereo correspondence[J]. Pattern Recognition Letters, 2007, 28(12): 1391 – 1399.
- [8] 唐俊, 王年, 梁栋, 范益政, 贾兆红. 一种结合形状上下文分析的 Laplace 谱匹配算法[J]. 系统仿真学报, 2009, 14(21): 4344 – 4350.  
Tang Jun, Wang Nian, Liang Dong, et al. Laplacian spectral correspondence combined with shape context analysis[J]. Journal of System Simulation, 2009, 14(21): 4344 – 4350. (in Chinese)

- [9] 赵键, 孙即祥, 李智勇, 陈明生. 基于相对形状上下文和谱匹配方法的点模式匹配算法[J]. 电子与信息学报, 2010, 10(32): 2287 – 2293.  
Zhao Jian, Sun Ji-xiang, Li Zhi-yong, et al. Point pattern matching algorithm based on relative shape context and spectral matching method [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2010, 10(32): 2287 – 2293. (in Chinese)
- [10] B Mohar. Some applications of Laplace eigenvalues of graphs [J]. Graph symmetry: Algebraic Methods and Applications, 1997, 497: 227 – 275.
- [11] R Grone, R Merris, V S Sunder. The Laplacian spectrum of a graph[J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 1990, 11(2): 218 – 238.
- [12] R Merris. Laplacian matrices of graphs: A survey[J]. Linear Algebra Appl, 1994, 197/198: 143 – 176.
- [13] C S Oliveira, L S de Lima, N M M Abreu de, S Kirkland. Bounds on the Q-spread of a graph[J]. Linear Algebra Appl, 2010, 432(9): 2342 – 2351.
- [14] E R van Dam, W Haemers. Which graphs are determined by their spectrum [J]? Linear Algebra Appl, 2003, 373: 241 – 272.
- [15] D Cvetkovi\_ c, S K Simi\_ c. Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian I [J]. Publ Inst Math (Beograd), 2009, 85(99): 19 – 33.
- [16] D Cvetkovi\_ c, S K Simi\_ c. Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian II [J]. Linear Algebra Appl, 2010, 432(9): 2257 – 2272.
- [17] D Cvetkovi\_ c, S K Simi\_ c. Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian III [J]. Appl Anal Discrete Math, 2010, 4(1): 156 – 166.
- [18] R Sinkhorn. A relationship between arbitrary positive matrices and doubly stochastic matrices [J]. The Annals of Mathematical Statistics (S0003-4851), 1964, 35(2): 876 – 879.
- [19] S Belongie, J Malik, J Puzicha. Shape matching and object recognition using shape contexts [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002, 24(4): 509 – 522.

### 作者简介



梁 栋 男, 1963 年出生, 博士, 教授, 博士生导师. 研究方向为计算机视觉、图像处理、模式识别.

E-mail: dliang@ahu.edu.cn

朱 明 男, 1984 出生, 博士生. 研究方向为计算机视觉、图像处理、模式识别. E-mail: zhu\_m@163.com