泛延拓矩阵的奇异值分解

袁晖坪
（重庆工商大学电子商务及供应链系统重庆市重点实验室，重庆 400067；重庆工商大学数学与统计学院，重庆 400067）

摘 要： 从普通奇异值分解出发，导出了泛延拓矩阵的奇异值和奇异向量与母矩阵的奇异值和奇异向量间的定量关系，并对泛延拓矩阵作了简单的扰动分析、信号与图像分析．给出了泛延拓矩阵的奇异值分解与广义逆公式，极大地减少了它们的计算量与存储量，又不会降低数值精度．同时推广和优化了文献[6,7]的相应结果．

关键词： 泛延拓矩阵；母矩阵；奇异值分解；扰动分析；图像分析；信号处理；时频分布；广义逆
中图分类号： TN911.7 **文献标识码：** A **文章编号：** 0372-2112（2012）08-1539-05
电子学报 URL： http://www.ejournal.org.cn **DOI：** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.08.007

Singular Value Factorization for Universal Extended Matrix

YUAN Hui-ping
（*Chongqing Key Laboratory of Electronic Commerce & Supply Chain System, Chongqing Technology and Business University, Chongqing, 400067, China; College of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing, 400067, China*）

Abstract： Based on the ordinary singular value factorization, a quantitative correspondence of the singular value and singular vectors between the universal extended matrix and its mother matrix is derived, and the perturbation analysis and image analysis for the universal extended matrix is provided accordingly. In addition, the formula of the singular value factorization and generalized inverse of universal extended matrix are given, which makes calculation easier and accurate. The results of Zou′s SVD for extended Matrix are generalized.

Key words： universal extended matrix; mother matrix; singular value factorization; perturbation analysis; image analysis; signal processing; time-frequency distribution; generalized inverse

1 引言

奇异值分解是矩阵的最基本分解方法之一，是现代数值分析中最重要的工具之一，它在信号与图像处理、系统辨识、时频分析、控制理论、酉不变范数理论、高质量统计计算、最小二乘问题、特征值问题、最优化问题、广义逆矩阵问题、工程领域的应用问题、商务智能等领域不仅有广泛的实际应用，而且也有重要的理论研究价值[1~14]．很多实际问题的数学模型，都可转化成线性问题，进而利用矩阵解决之；许多应用领域（如信息、控制、工程等）中大量出现的都是关于行、列或对角线的对称图象（矩阵），不仅短时 Fourier 变换具有对称现象，Gabor 变换、普图、Margenau-Hill 分布、伪 Margenau-Hill 分布、Margenau-Hill-普图分布、Page 分布、伪 Page 分布以及 Rihaczek 分布等等，均具有零频率轴对称特性，对称性检测、晶体结晶点阵、城区及建筑物的图象上亦有众多典型的对称结构[5~8,11~17]．当矩阵阶数很高时，奇异值分解的最大不足是其巨大的计算量和存储量，若能找到矩阵中某一部分与其它部分之间的一些定量关系，那么问题便很容易解决．因此寻找矩阵中某一部分和其它部分之间的结构关系就非常重要，尤其是当矩阵具有某种广义行或列对称性时，矩阵的奇异值分解就很容易求得，在计算上可以大量节省存储量和计算量．文献[1~14]对矩阵（尤其是行（列）对称矩阵）的奇异值分解或 ***QR*** 分解作了深入研究，特别文献[6,7]对延拓矩阵作了奇异值分解和扰动分析，获得了深刻而应用广泛的结果．但文献[6,7]的变换矩阵是单位阵 ***I*** 或反对角阵 ***J*** 或置换矩阵 ***P***，在实际应用领域中变换矩阵多为正交矩阵，故本文将变换矩阵推广为正交矩阵，提出了泛延拓矩阵的概念，研究了他们的性质，得到了一些新的结果，给出了泛延拓矩阵的奇异值分解和多种广义逆的公式，极大地减少了它们的计算量与存储量，并对泛延拓矩阵作了

收稿日期：2011-08-07；修回日期：2012-05-11
基金项目：国家自然科学基金（No.11001287）；重庆市自然科学基金（No.CSTS 2005 BB 0243）；电子商务及供应链系统重庆市重点实验室专项基金（No.2012ECSC0216）

简单的扰动分析、信号与图像分析,推广了文献[6,7]的相应结果,拓宽了实际应用领域的范围,导出了泛延拓矩阵的奇异值分解式中酉阵 $\boldsymbol{P}$ 的公式,勿须解矩阵方程来求酉阵 $\boldsymbol{P}$,因此比文[6,11]更简捷.这无论是对于矩阵理论或应用(如时频分析、信号与图像处理等)都是很有意义的.本文用 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置矩阵,$\boldsymbol{C}^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 复矩阵集,$\boldsymbol{C}_r^{m\times n}$ 表示秩为 r 的 $m\times n$ 复矩阵集,$\boldsymbol{A}^{\{i\}}$表示 $\boldsymbol{A}$ 的$\{i\}$逆,特别记 $\boldsymbol{A}^{\{1,2,3,4\}}=\boldsymbol{A}^{+}$.

定义 1 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$,$\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1}$均为 m 阶正交矩阵,则称 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{A}_1\\\vdots\\\boldsymbol{A}_{k-1}\end{pmatrix}$,(其中 $\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{A},i=1,2,\cdots,k-1$)为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次泛行延拓矩阵,$\boldsymbol{A}$ 称为它的母矩阵.特别,当 $\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{Q}_2=\cdots=\boldsymbol{Q}_{k-1}=\boldsymbol{Q}$ 时,简记 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=\boldsymbol{R}_k(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q})$.

定义 2 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$,$\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1}$均为 n 阶正交矩阵,则称 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_{k-1})$,(其中 $\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_i,i=1,2,\cdots,k-1$)为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次泛列延拓矩阵,$\boldsymbol{A}$ 称为它的母矩阵.特别,当 $\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{Q}_2=\cdots=\boldsymbol{Q}_{k-1}=\boldsymbol{Q}$ 时,简记 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q})$.

显然:当 $\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{Q}_2=\cdots=\boldsymbol{Q}_{k-1}=\boldsymbol{I}$(单位矩阵)时,

$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=\boldsymbol{R}_k(\boldsymbol{A};\boldsymbol{I})=\boldsymbol{R}_k(\boldsymbol{A})$即为文献[6]中的"$\boldsymbol{A}$ 的第一类 k 次行延拓".

$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A};\boldsymbol{I})=\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A})$即为文献[6]中的"$\boldsymbol{A}$ 的第一类 k 次列延拓".

当 $\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{Q}_2=\cdots=\boldsymbol{Q}_{k-1}=\boldsymbol{J}$(单位反对角矩阵[12])时,

$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=\boldsymbol{R}_k(\boldsymbol{A};\boldsymbol{J})$即为文献[6]中的"$\boldsymbol{A}$ 的第二类 k 次行延拓".

$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=\boldsymbol{C}_k(\boldsymbol{A};\boldsymbol{J})$即为文献[6]中的"$\boldsymbol{A}$ 的第二类 k 次列延拓".

当 $\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{J}_1,\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{J}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1}=\boldsymbol{J}_{k-1}$($\boldsymbol{J}_i$ 的定义与文[12]一致)时,

$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{J}_1,\cdots,\boldsymbol{J}_{k-1})$即为文[12]中的"$\boldsymbol{A}$ 的 k 次行对称矩阵".

$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{J}_1,\cdots,\boldsymbol{J}_{k-1})$即为文[12]中的"$\boldsymbol{A}$ 的 k 次列对称矩阵".

2 泛延拓矩阵的奇异值分解

定理 1 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}_r^{m\times n}(r>0)$,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解[18],其中两酉阵 $\boldsymbol{U}\in\boldsymbol{C}^{m\times m}$,$\boldsymbol{V}\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$,$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,$\sum=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r)$,$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_r>0$,则 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次泛行延拓矩阵 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})\in\boldsymbol{C}^{km\times n}$存在一个奇异值分解:$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=\boldsymbol{P}\boldsymbol{T}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}$,其中 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{D}\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{\Sigma}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,酉阵 $\boldsymbol{P}=$

$$\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{U}}{\sqrt{k}}&\frac{\boldsymbol{U}}{\sqrt{2}}&\frac{\boldsymbol{U}}{\sqrt{6}}&\cdots&\frac{\boldsymbol{U}}{\sqrt{k(k-1)}}\\\frac{\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{U}}{\sqrt{k}}&\frac{-\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{U}}{\sqrt{2}}&\frac{\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{U}}{\sqrt{6}}&\cdots&\frac{\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{U}}{\sqrt{k(k-1)}}\\\frac{\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{U}}{\sqrt{k}}&\boldsymbol{O}&\frac{-2\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{U}}{\sqrt{6}}&\cdots&\frac{\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{U}}{\sqrt{k(k-1)}}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\frac{\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{U}}{\sqrt{k}}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\cdots&\frac{(1-k)\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{U}}{\sqrt{k(k-1)}}\end{pmatrix}$$

证明 因$[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})]^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}_1^{\mathrm{H}}\cdots\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{Q}_{k-1}^{\mathrm{H}})\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{A}\\\vdots\\\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{A}\end{pmatrix}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{V}\boldsymbol{D}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{V}(k\sum^2)\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}$,$k\sigma_1^2,k\sigma_2^2,\cdots,k\sigma_n^2$ 为$[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})]^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})$的特征值,所以$\sqrt{k}\sigma_1,\sqrt{k}\sigma_2,\cdots,\sqrt{k}\sigma_n$ 为$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})$的奇异值,又容易验证:$\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{I}$,即 $\boldsymbol{P}$ 为酉阵,且 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{T}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}=$

$$\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{U}}{\sqrt{k}}&\frac{\boldsymbol{U}}{\sqrt{2}}&\frac{\boldsymbol{U}}{\sqrt{6}}&\cdots&\frac{\boldsymbol{U}}{\sqrt{k(k-1)}}\\\frac{\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{U}}{\sqrt{k}}&\frac{-\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{U}}{\sqrt{2}}&\frac{\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{U}}{\sqrt{6}}&\cdots&\frac{\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{U}}{\sqrt{k(k-1)}}\\\frac{\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{U}}{\sqrt{k}}&\boldsymbol{O}&\frac{-2\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{U}}{\sqrt{6}}&\cdots&\frac{\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{U}}{\sqrt{k(k-1)}}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\frac{\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{U}}{\sqrt{k}}&\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}&\cdots&\frac{(1-k)\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{U}}{\sqrt{k(k-1)}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{k}\boldsymbol{D}\\\boldsymbol{O}\\\vdots\\\boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}$$

$$=\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\\\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\\\vdots\\\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{A}\\\vdots\\\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{A}\end{pmatrix}=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1}).$$

显然:定理 1 推广了文献[6]的定理 1,并且导出了求泛行延拓矩阵的奇异值分解式中酉阵 $\boldsymbol{P}$ 的公式,勿须解矩阵方程来求酉阵 $\boldsymbol{P}$,比文献[6,11]更简捷.

定理 2 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}_r^{m\times n}(r>0)$,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解,其中两酉阵 $\boldsymbol{U}\in\boldsymbol{C}^{m\times m}$,$\boldsymbol{V}\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$,$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\Sigma&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,$\sum=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r)$,$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_r>0$,则 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次泛列延拓矩阵为 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})\in\boldsymbol{C}^{m\times kn}$存在一个奇异值分解:$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{Q}_1,\cdots,\boldsymbol{Q}_{k-1})=\boldsymbol{U}\boldsymbol{T}\boldsymbol{P}^{\mathrm{H}}$,其中 $\boldsymbol{T}=(\sqrt{k}\boldsymbol{D}\quad\boldsymbol{O})=\begin{pmatrix}\sqrt{k}\sum&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,酉阵

$$P=\begin{pmatrix} \frac{V}{\sqrt{k}} & \frac{V}{\sqrt{2}} & \frac{V}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{V}{\sqrt{k(k-1)}} \\ \frac{Q_1^{\mathrm{H}}V}{\sqrt{k}} & \frac{-Q_1^{\mathrm{H}}V}{\sqrt{2}} & \frac{Q_1^{\mathrm{H}}V}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{Q_1^{\mathrm{H}}V}{\sqrt{k(k-1)}} \\ \frac{Q_2^{\mathrm{H}}V}{\sqrt{k}} & O & \frac{-2Q_2^{\mathrm{H}}V}{\sqrt{6}} & \cdots & \frac{Q_2^{\mathrm{H}}V}{\sqrt{k(k-1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{Q_{k-1}^{\mathrm{H}}V}{\sqrt{k}} & O & O & \cdots & \frac{(1-k)Q_{k-1}^{\mathrm{H}}V}{\sqrt{k(k-1)}} \end{pmatrix}$$

证明　因为 $C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})[C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})]^{\mathrm{H}}=$

$$(A\quad AQ_1\quad \cdots\quad AQ_{k-1}A^{\mathrm{H}}Q_{k-1}^{\mathrm{H}})\begin{pmatrix} A^{\mathrm{H}} \\ Q_1^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}} \\ \vdots \\ Q_{k-1}^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}} \end{pmatrix}=kAA^{\mathrm{H}}$$

$=kUDD^{\mathrm{H}}U^{\mathrm{H}}=U(k\sum^2)U^{\mathrm{H}}$, $k\sigma_1^2,k\sigma_2^2,\cdots,k\sigma_m^2$ 为 $C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})[C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})]^{\mathrm{H}}$ 即 $[C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})]^{\mathrm{H}}C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})$的特征值,所以$\sqrt{k}\sigma_1,\sqrt{k}\sigma_2,\cdots,\sqrt{k}\sigma_m$ 为 $C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})$的奇异值,又容易验证:$P^{\mathrm{H}}P=PP^{\mathrm{H}}=I$,即 P 为酉阵,且

$$UTP^{\mathrm{H}}=(UDV^{\mathrm{H}}\quad UDV^{\mathrm{H}}Q_1\quad\cdots\quad UDV^{\mathrm{H}}Q_{k-1})$$
$$=(A\quad AQ_1\quad\cdots\quad AQ_{k-1})=C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1}).$$

定理 2 推广和优化了文献[7]的定理 3.

3　泛延拓矩阵的广义逆

在系统辨识和信号处理中,广义逆有重要应用.以下给出泛延拓矩阵的广义逆公式:

定理 3　设 $A\in C_r^{m\times n}(r>0)$,$A=UDV^{\mathrm{H}}$ 为 A 的奇异值分解,其中两酉阵 $U\in C^{m\times m}$, $V\in C^{n\times n}$, $D=\begin{pmatrix}\Sigma & O\\ O & O\end{pmatrix}$, $\sum=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r)$, $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_r>0$ 则

(1)A 的泛行延拓矩阵 $R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})\in C^{km\times n}$ 的 Moore-Penrose 逆:

$$[R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})]^{\{1\}}=V\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{k}}\Sigma^{-1} & K\\ L & M\end{pmatrix}P^{\mathrm{H}},$$

$$[R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})]^{\{1,2\}}=V\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{k}}\Sigma^{-1} & K\\ L & L\Sigma K\end{pmatrix}P^{\mathrm{H}},$$

$$[R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})]^{\{1,2,3\}}=V\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{k}}\Sigma^{-1} & O\\ L & O\end{pmatrix}P^{\mathrm{H}},$$

$$[R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})]^{\{1,2,4\}}=V\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{k}}\Sigma^{-1} & K\\ O & O\end{pmatrix}P^{\mathrm{H}},$$

$$[R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})]^{+}=V\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{k}}\Sigma^{-1} & O\\ O & O\end{pmatrix}P^{\mathrm{H}},$$

其中 P 与定理 1 相同,K,L,M 是有相应维数的任意矩阵.

(2)$A\in C^{m\times n}$的 k 次泛列延拓矩阵为 $C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})$的广义逆:

$$[C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})]^{\{1\}}=P\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{k}}\Sigma^{-1} & K\\ L & M\end{pmatrix}U^{\mathrm{H}},$$

$$[C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})]^{\{1,2\}}=P\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{k}}\Sigma^{-1} & K\\ L & L\Sigma K\end{pmatrix}U^{\mathrm{H}},$$

$$[C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})]^{\{1,2,3\}}=P\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{k}}\Sigma^{-1} & O\\ L & O\end{pmatrix}U^{\mathrm{H}},$$

$$[C(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})]^{\{1,2,4\}}=P\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{k}}\Sigma^{-1} & K\\ O & O\end{pmatrix}U^{\mathrm{H}},$$

$$[R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})]^{+}=P\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{k}}\Sigma^{-1} & O\\ O & O\end{pmatrix}U^{\mathrm{H}},$$

其中 P 与定理 2 相同,K,L,M 是有相应维数的任意矩阵.

证明　由题设及定理 1 知,泛行延拓矩阵 $R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})\in C^{km\times n}$存在一个奇异值分解:$R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})=P\begin{pmatrix}\sqrt{k}\Sigma & O\\ O & O\end{pmatrix}V^{\mathrm{H}}$,其中 P 与定理 1 相同,由文献[18]中公式(1.5.3)可知:

$$[R(A;Q_1,\cdots,Q_{k-1})]^{\{1\}}=V\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{k}}\Sigma^{-1} & K\\ L & M\end{pmatrix}P^{\mathrm{H}}.$$

类似可证:其余等式均成立.

4　扰动分析

在实际应用中,待分解的矩阵通常是混有噪声的测量矩阵,我们希望知道噪声对奇异值和奇异向量的影响,一般刻画该影响有两条途径:(1)寻找扰动界;(2)给出扰动展开.Weyl[19]在 1912 年找到了受噪声扰动的奇异值与未受噪声扰动的奇异值之差的一个上界:

定理 4(Weyl)　设 $A\in C^{m\times n}(m\geqslant n)$,令 $\tilde{A}=A+E$ 为矩阵 A 的扰动,E 为噪声,若 $A=U\begin{pmatrix}\Sigma\\ O\end{pmatrix}V^{\mathrm{H}}$,$\tilde{A}=\tilde{U}\begin{pmatrix}\tilde{\Sigma}\\ O\end{pmatrix}\tilde{V}^{\mathrm{H}}$ 分别为 $A,\tilde{A}$ 的奇异值分解,其中$\sum=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$,$\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n\geqslant0$,$\tilde{\sum}_i=\mathrm{diag}(\tilde{\sigma}_1,\tilde{\sigma}_2,\cdots,\tilde{\sigma}_n)$,$\tilde{\sigma}_1\geqslant\tilde{\sigma}_2\geqslant\cdots\geqslant\tilde{\sigma}_n\geqslant0$,则 $|\tilde{\sigma}_i-\sigma_i|\leqslant\|E\|_2$,$i=1,2,$

$\cdots, n$

关于泛行延拓矩阵的奇异值分解,我们给出了含有部分噪声的母矩阵的奇异值与不含噪声的母矩阵的奇异值之差的一个上界:

定理 5 设 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{C}^{m \times n}(m \geqslant n)$, $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_{k-1}) \in \boldsymbol{C}^{km \times n}$,令 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}_i, i = 0, 1, \cdots, k-1, \boldsymbol{A}_0 = \boldsymbol{A}$,若 $\widetilde{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_{k-1}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_{k-1}) + \boldsymbol{E}$,其中,

$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_0 \\ \boldsymbol{E}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{E}_{k-1} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\begin{pmatrix} \Sigma \\ \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}$, $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i = \widetilde{\boldsymbol{U}}\begin{pmatrix} \widetilde{\Sigma}_i \\ \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{H}}$ 分别为 $\boldsymbol{A}$, $\widetilde{\boldsymbol{A}}_i$ 的奇异值分解,其中

$\sum = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n), \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n \geqslant 0, \widetilde{\sum}_i = \mathrm{diag}(\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \cdots, \sigma_{in}), \tilde{\sigma}_{i1} \geqslant \tilde{\sigma}_{i2} \geqslant \cdots \geqslant \tilde{\sigma}_{in} \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, k-1$,则

$$\left| \tilde{\sigma}_{ij} - \sigma_i \right| \leqslant \| \boldsymbol{E} \|_2, i = 1, 2, \cdots, k-1, j = 1, 2, \cdots, n$$

证明 由定理 4 知 $\left| \tilde{\sigma}_{ij} - \sigma_i \right| \leqslant \| \boldsymbol{E}_i \|_2, i = 1, 2, \cdots, k-1, j = 1, 2, \cdots, n$,

由 $\| \cdot \|_2$ 的定义知 $\| \boldsymbol{E}_i \|_2 \leqslant \| \boldsymbol{E} \|_2 \leqslant \sum_{i=1}^{k-1} \| \boldsymbol{E}_i \|_2, i = 1, 2, \cdots, k-1$,故

$$\left| \tilde{\sigma}_{ij} - \sigma_i \right| \leqslant \| \boldsymbol{E} \|_2, i = 1, 2, \cdots, k-1, j = 1, 2, \cdots, n$$

以下我们给出了含有噪声的泛行延拓矩阵的奇异值与不含噪声的母矩阵的奇异值间的一个关系式:

定理 6 设 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{C}^{m \times n}(m \geqslant n)$,若 $\widetilde{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_{k-1}) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_{k-1}) + \boldsymbol{E}$ 为泛行延拓矩阵 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_{k-1})$ 的扰动, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\begin{pmatrix} \Sigma \\ \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{H}}$, $\widetilde{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_{k-1}) = \widetilde{\boldsymbol{U}}\begin{pmatrix} \widetilde{\Sigma} \\ \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\widetilde{\boldsymbol{V}}^{\mathrm{H}}$ 分别为 $\boldsymbol{A}$, $\widetilde{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_{k-1})$ 的奇异值分解,其中 $\sum = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n), \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n \geqslant 0$,

$\widetilde{\sum}_i = \mathrm{diag}(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \cdots, \tilde{\sigma}_n), \tilde{\sigma}_1 \geqslant \tilde{\sigma}_2 \geqslant \cdots \geqslant \tilde{\sigma}_n \geqslant 0$,则

$$\left| \tilde{\sigma}_i - \sqrt{k}\sigma_i \right| \leqslant \| \boldsymbol{E} \|_2, i = 1, 2, \cdots, n$$

证明 由定理 1 知 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_{k-1})$ 的奇异值为 $\sqrt{k}\sigma_1 \geqslant \sqrt{k}\sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sqrt{k}\sigma_n \geqslant 0$,故由定理 4 知

$$\left| \tilde{\sigma}_i - \sqrt{k}\sigma_i \right| \leqslant \| \boldsymbol{E} \|_2, i = 1, 2, \cdots, n$$

泛列延拓矩阵 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_{k-1})$ 的扰动分析与泛行延拓阵 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_{k-1})$ 类似.

5 图像压缩

奇异值分解在信号与图像处理中有着重要应用.设泛行延拓矩阵 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_{k-1})$ 表示要传送的原 $km \times n$ 个像素,由定理 1 得 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_{k-1})$ 的奇异值分解 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_{k-1}) = \boldsymbol{PTV}^{\mathrm{H}}$,若选择 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_{k-1})$ 的前 r 个奇异值以及与这些奇异值对应的左和右奇异向量逼近原图像,便可用 $r(km+n+1)$(不妨设 $r(km+n+1) < kmn$)个数值代替原来的 $km \times n$ 个图像数据.这 $r(km+n+1)$ 个被选择的新数据是 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_{k-1})$ 的前 r 个奇异值构成的对角阵 $\sum = \sqrt{k}\,\mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r)$、$km \times km$ 左奇异向量矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的前 r 列构成的矩阵 $\boldsymbol{P}_r$ 及 $n \times n$ 右奇异向量矩阵 $\boldsymbol{V}$ 的前 r 列构成的矩阵 $\boldsymbol{V}_r$ 的元素,当接收端接受到这些新数据后,便可通过截尾的奇异值分解公式 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_{k-1}) = \boldsymbol{P}_r \Sigma \boldsymbol{V}_r^{\mathrm{H}}$ 重构造出原图像.泛列延拓矩阵 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_{k-1})$ 的数据传送分析与泛行延拓矩阵 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_{k-1})$ 类似.

6 结束语

本文研究了泛延拓矩阵,对它们作了简单的扰动分析、信号与图像分析,给出了它们的奇异值分解和多种广义逆公式,导出了泛延拓矩阵与母矩阵两者的奇异值分解及广义逆之间的定量关系,用母矩阵代替 k 次泛延拓矩阵进行奇异值分解和求广义逆,当 k 较大时,计算量和储存量的减少非常明显,又不会对数值精度有任何影响,同时本文推广和优化了文献[6,7]的结果,拓宽了实际应用领域的范围,给出了泛延拓矩阵的奇异值分解式中酉阵 P 的公式,勿须解矩阵方程来求酉阵 P,因此比文献[6,11]更简捷.

参考文献

[1] C Eckart, G Young. A principal axis transformation for non-Hermitian matrices [J]. Null Amer Math Soc, 1939, 45(2): 118-121.

[2] C C Paige, M A Saunders. Towards a generalized singular value decomposition [J]. SIAM J Numer Anal 1981, 18(3): 398-405.

[3] J C Doyle. Analysis of feedback systems with structured uncertainties [J]. Proc IEE, Part D 1982, 129(6): 242-250.

[4] H Zha. The restricted singular value decomposition of matrix triplets [J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 1991, 12: 172-194.

[5] Zou H, Wang D, Dai Q, et al. SVD for row or column symmetric matrix[J]. Chinese Science Bulletin, 2000, 45(14): 2042-2044.

[6] 邹红星,王殿军,戴琼海,李衍达.延拓矩阵的奇异值分解[J].科学通报,2000,45(14):1560-1562.
Zou H-X, Wang D-J, Dai Q-H, et al. SVD for extended matrix [J]. Chinese Science Bulletin, 2000, 45(14): 1560-1562. (in Chinese)

[7] 邹红星,王殿军,戴琼海,李衍达.延拓矩阵的奇异值分解

[J].电子学报,2001,29(3):290-292.
ZOU Hong xing, WANG Dian jun, DAI Qiong hai, LI Yan da. Singular value decomposition for extended matrix[J]. Acta Electronica Sinica, 2001, 29(3): 290-292. (in Chinese)
[8] Zou H, Wang D, Dai Q, et al. SVD for row or column symmetric matrix [J]. Chinese Journal of Electronics, 2004, 12(2): 157-161.
[9] 刘瑞祯,谭铁牛.基于奇异值分解的数字图像水印方法[J].电子学报,2001,29(2):168-171.
LIU Rui-zhen, TAN Tie-niu. SVD based digital watermarking method[J]. Acta Electronica Sinica, 2001, 29(2): 168-171. (in Chinese)
[10] 孙丽萍,胡光锐.直接序列扩频通信中窄带干扰抑制的奇异值分解方法[J].电子与信息学报,2003,25(9):1291-1293.
Sun Li-ping, Hu Guang-rui. Narrow-band interference rejection in PN spread spectrum systems using SVD method[J]. Journal of Electronics and Information Technology, 2003, 25(9): 1291-1293. (in Chinese)
[11] 蔺小林,王震,蒋耀林.酉延拓矩阵的奇异值分解及其广义逆[J].纯粹数学与应用数学,2008,24(1):49-53.
LIN Xiao-lin, WANG Zhen, JIANG Yao-lin. Singular value decomposition and Moore-penrose inverse for unitary extended matrix[J]. Pure and Applied Mathematics, 2008, 24(1): 49-53. (in Chinese)
[12] 邹红星,王殿军,戴琼海,李衍达.行(或列)对称矩阵的QR分解[J].中国科学(A辑),2002,32(9):842-849.
Zou H-X, Wang D-J, Dai Q-H, et al. QR factorization for row or column symmetric matrix[J]. Science of China (Series A), 2002, 32(9)842-849. (in Chinese)
[13] 蔺小林,蒋耀林.酉对称矩阵的QR分解及其算法[J].计算机学报,2005,28(5):818-822.
LIN Xiao-Lin, JIANG Yao-Lin. QR decomposition and algorithm for unitary symmetric matrix[J]. Chinese Journal of Computers, 2005, 28(5): 818-822. (in Chinese)
[14] 张贤达.矩阵分析与应用[M].北京:清华大学出版社,2004,9.
Zhang X-D. Matrix Analysis and Applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004, 9. (in Chinese)
[15] M J Atallah. On symmetry detection [J]. IEEE Trans Computers, 1985, 34(7): 663-666.
[16] H Zabrodsky, S Pelega, D Avnir. Symmetry as a continuous feature [J]. IEEE Trans PAMI, 1995, 17(12): 1154-1166.
[17] Hill R D, Waters S R. On k-real and k-hermitian matrices[J]. Linear Algebra and its Applications, 1992, 169: 17-29.
[18] 魏木生.广义最小二乘问题的理论和计算[M].北京:科学出版社,2006.2-284.
WEI Mu-sheng. Theories and Compute for Generalized Least Squares Problem[M]. Beijing: Science Press, 2006.2-284. (in Chinese)
[19] H Weyl. Das asynptotische verteilungsgestez der eigenwert linearer partieller differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf der Theorie der Hohlraumstrahlung) [J]. Mathematische Annalen, 1912, 71: 441-479.

作者简介

袁晖坪 男,1958 年出生,重庆人,重庆工商大学教授,从事矩阵论、数字图像分析、模式识别等研究.
E-mail: yhp@ctbu.edu.cn; hpyuan@163.com