一类具多比例延时的细胞神经网络的指数稳定性

张迎迎,周立群
(天津师范大学数学科学学院,天津 300387)

摘 要: 讨论了一类具多比例延时的细胞神经网络的指数稳定性.利用非线性测度得到了一个保证平衡点存在唯一且指数稳定的充分条件,并给出了解的指数收敛速度.最后验证了结论的正确性并进行了模拟仿真.

关键词: 细胞神经网络;指数稳定;比例延时;非线性测度;收敛速度

中图分类号: O175.13 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2012) 06-1159-05

电子学报 URL: http://www.ejournal.org.cn **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.06.015

Exponential Stability of a Class of Cellular Neural Networks with Multi-Pantograph Delays

ZHANG Ying-ying, ZHOU Li-qun
(*School of Mathematics Science, Tianjin Normal University, Tianjin 300387, China*)

Abstract: The exponential stability of a class of cellular neural networks with multi-pantograph delays is studied. In view of nonlinear measure, a sufficient condition is derived for the existence, uniqueness and exponential stability of the equilibrium point. And the method gains the exponential convergent velocity of the solutions. Finally, an example is provided to illustrate effectiveness of the method.

Key words: cellular neural networks; exponential stability; pantograph delay; nonlinear measure; convergent velocity

1 引言

细胞神经网络是一种反馈型的网络[1,2],它的网络结构是局域连接型的,因而它非常适合于超大规模集成电路的实现.目前,细胞神经网络已被广泛应用于模式识别、联想记忆、图像处理及组合优化等领域[3].由于在神经网络的设计中,延时特性是固有的,近年来,对于延时细胞神经网络稳定性的研究已经取得了很多很好的结果[3~13],但是大多学者研究的模型是常延时或变延时的,对于比例延时的细胞神经网络模型研究较少,比例延时和常延时有很大不同,比例延时是无界延时.并且以往研究的方法大多数结果是通过构造 Lyapunov 函数得到的,众所周知,Lyapunov 函数的构造具有一定的技巧性,并没有一般的方法可寻.在文献[8,10]中没有构造 Lyapunov 函数而是应用非线性测度方法研究了延时神经网络,并得到了较好的结果.本文应用非线性测度方法,研究了一类具多比例延时的细胞神经网络的指数稳定性.此方法并不要求激活函数是有界的、可微的和单调增的,并给出了解的指数收敛速度.

2 预备知识

考虑如下的多比例延时细胞神经网络系统

$$\begin{cases} \dot{u}_i(t) = -d_i u_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(u_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} g_j(u_j(q_1 t)) \\ \qquad + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} h_j(u_j(q_2 t)) + I_i \\ u_i(0) = u_{i0} \end{cases} \tag{1}$$

其中 $t>0, 0<q_1, q_2<1, i=1,2,\cdots,n, n\geqslant 2$ 表示网络的神经元个数;u_i 表示第 i 个神经元的状态;$d_i>0$ 表示在与神经网络不连通并且无外部附加电压差的情况下第 i 个神经元恢复孤立静息状态的速率;a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} 表示从第 j 个神经元的突触连接权系数;f_j, g_j, h_j 表示第 j 个神经元的激励函数;I_i 表示第 i 个神经元的常外部输入.

先作假设(H):

收稿日期:2010-06-16;修回日期:2010-11-09
基金项目:国家自然科学基金(No.60974144);天津市高等学校科技发展基金(No.20100813);天津师范大学博士基金(No.52LX34)

f_j,g_j 和 h_j 对于 $j=1,2,\cdots,n$ 满足 Lipschitz 连续,且

$$L(f_j)=\sup_{\substack{x,y\in\mathbf{R}\\x\neq y}}\frac{\|f_j(x)-f_j(y)\|}{\|x-y\|},$$

$$L(g_j)=\sup_{\substack{x,y\in\mathbf{R}\\x\neq y}}\frac{\|g_j(x)-g_j(y)\|}{\|x-y\|},$$

$$L(h_j)=\sup_{\substack{x,y\in\mathbf{R}\\x\neq y}}\frac{\|h_j(x)-h_j(y)\|}{\|x-y\|}.$$

分别称为 f_j,g_j 和 h_j 的最小 Lipschitz 常数(MLC),其中 $\|\cdot\|$ 表示范数,在本文中特指 1-范数.

在 n 维实向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中,1-范数 $\|\cdot\|_1$ 定义如下

$$\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|,\forall\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$$

其中上标"T"表示转置.令 $<\cdot,\cdot>$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的内积,且 $\mathrm{sgn}(\boldsymbol{x})=(\mathrm{sgn}(x_1),\mathrm{sgn}(x_2),\cdots,\mathrm{sgn}(x_n))^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 的符号向量,其中 $\mathrm{sgn}(r)$ 表示 $r\in\mathbf{R}$ 的符号函数.对于 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$,有 $\|\boldsymbol{x}\|_1=<\boldsymbol{x},\mathrm{sgn}(x)>$,且 $\|\boldsymbol{x}\|_1\geqslant<\boldsymbol{x},\mathrm{sgn}(\boldsymbol{y})>$.

考虑如下系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{v}}(t)=\mathrm{e}^tF(\boldsymbol{v}(t))+\mathrm{e}^tG(\boldsymbol{v}_\tau(t)),\boldsymbol{v}(t)\in\Omega,t\geqslant0,\\\boldsymbol{v}_0=\varphi\in C([-\tau,0],\Omega)\end{cases}\tag{2}$$

其中 F 和 G 是从 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 上的非线性算子,$C([-\tau,0],\Omega)$表示从$[-\tau,0]$到 Ω 的所有连续函数的集合.$\boldsymbol{v}_\tau\in C([-\tau,0],\Omega)$定义如下

$$\boldsymbol{v}_\tau(t)=(v_1(t-\tau),v_2(t-\tau),\cdots,v_n(t-\tau))^{\mathrm{T}}$$

且有

$$F(\boldsymbol{v}(t))=(F_1(v_1(t)),F_2(v_2(t)),\cdots,F_n(v_n(t)))^{\mathrm{T}},$$

$$G(\boldsymbol{v}_\tau(t))=(G_1(v_1(t-\tau)),G_2(v_2(t-\tau)),\cdots,G_n(v_n(t-\tau)))^{\mathrm{T}}$$

定义 1 假设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集,F 是一个从 Ω 到 $\mathbf{R}^n$ 的非线性算子,常数

$$m_\Omega(F)=\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\x\neq y}}\frac{<F(\boldsymbol{x})-F(\boldsymbol{y}),\mathrm{sgn}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})>}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_1}$$

称为 F 在 Ω 上的非线性测度.

定义 2 设 $\boldsymbol{u}^*$ 是系统(1)的一个平衡点,Ω 是 $\boldsymbol{u}^*$ 的一个开邻域,称 $\boldsymbol{u}^*$ 在 Ω 上是指数稳定的,若存在两个正常数 α,M,使得系统(1)由任何 $\phi\in C([-\tau,0],\Omega)$初始的解 $\boldsymbol{u}(t)$满足

$$\|\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{u}^*\|_1\leqslant M\mathrm{e}^{-\alpha t}\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant0}\|\phi(s)-\boldsymbol{u}^*\|_1,t\geqslant0$$

更进一步,若 $\boldsymbol{u}^*$ 在全空间 $\mathbf{R}^n$ 是指数稳定的,则称系统(1)是全局指数稳定的.

引理 1[8] 若 $m_\Omega(F)<0$,则 $F:\Omega\to\mathbf{R}^n$ 是一一映射.另外,若 $\Omega=\mathbf{R}^n$,则 F 是 $\mathbf{R}^n$ 上的一个同胚.

引理 2[8] 设 Ω 是系统(2)的平衡点 $\boldsymbol{v}^*$ 的邻域,若对某一矩阵 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,其中 $a_i>0(1\leqslant i\leqslant n)$,有

$$m_{\boldsymbol{A}^{-1}(\Omega)}(F\boldsymbol{A})+L_{\boldsymbol{A}^{-1}(\Omega)}(G\boldsymbol{A})<0$$

成立,则 $\boldsymbol{v}^*$ 在 Ω 上是指数稳定的.其中 $L_{\boldsymbol{A}^{-1}(\Omega)}(G\boldsymbol{A})$表示非线性 Lipschitz 算子 $G\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{A}^{-1}(\Omega)$上的 MLC.更进一步,系统(1)由 $\phi\in C([-\tau,0],\Omega)$初始的任一解 $\boldsymbol{v}(t)$的指数衰减估计为

$$\|\boldsymbol{v}(t)-\boldsymbol{v}^*\|_1\leqslant\mathrm{e}^{-\lambda t}\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant0}\|\phi(s)-\boldsymbol{v}^*\|_1,t\geqslant0$$

其中 λ 是如下方程的唯一正解

$$\lambda\min_{1\leqslant i\leqslant n}a_i+m_{\boldsymbol{A}^{-1}(\Omega)}(F\boldsymbol{A})+L_{\boldsymbol{A}^{-1}(\Omega)}(G\boldsymbol{A})\mathrm{e}^{\tau\lambda}=0$$

3 主要结果

在这部分中,首先证明系统(1)在 Ω 中存在唯一的平衡点.

定理 1

若假设(H)成立,且存在正实数 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$使得

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{d_j-\sum_{i=1}^{n}\frac{p_j}{p_i}(|a_{ij}|L(f_j)+|b_{ij}|L(g_j)+|c_{ij}|L(h_j))\right\}>0\tag{3}$$

成立,其中 $L(f_j),L(g_j)$和 $L(h_j)$分别表示 f_j,g_j 和 h_j 在 Ω_j 上的 MLC,Ω_j 表示 Ω 在 $\mathbf{R}^n$ 的第 j 轴上的投影.则对于每个外部输入 I_i,系统(1)在 Ω 上有唯一的平衡点 $\boldsymbol{u}^*$.

证明:令 $v_i(t)=u_i(\mathrm{e}^t)$,则系统(1)变为如下常延时变系数系统

$$\begin{cases}\dot{v}_i(t)=-d_i\mathrm{e}^tv_i(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\mathrm{e}^tf_j(v_j(t))\\\qquad+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\mathrm{e}^tg_j(v_j(t-\tau_1))\\\qquad+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\mathrm{e}^th_j(v_j(t-\tau_2))+\mathrm{e}^tI_i,\\v_i(t)=\phi_i(t),t\in[-\tau,0]\end{cases}\tag{4}$$

其中 $\tau_1=-\log q_1,\tau_2=-\log q_2,\tau=\max\{\tau_1,\tau_2\},\phi_i\in C([-\tau,0],R),i=1,2,\cdots,n$.

定义 $\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(p_1,p_2,\cdots,p_n)$,其中 $p_i>0(i=1,2,\cdots,n)$.算子 $H:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$,

$$H(\boldsymbol{v})=(H_1(v_1),H_2(v_2),\cdots,H_n(v_n))^{\mathrm{T}}$$

其中 $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$,且

$$H_i(v_i)=-d_i\mathrm{e}^tv_i(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\mathrm{e}^tf_j(v_j(t))+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\mathrm{e}^tg_j(v_j(t))+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\mathrm{e}^th_j(v_j(t))+\mathrm{e}^tI_i$$

易知,$\boldsymbol{v}^*=(v_1^*,v_2^*,\cdots,v_n^*)^{\mathrm{T}}$是系统(4)的平衡点的充要条件是 $H(\boldsymbol{v}^*)=0$.对$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{P}^{-1}(\Omega)$,

$$
\begin{aligned}
&<\boldsymbol{P}^{-1}H(\boldsymbol{Px})-\boldsymbol{P}^{-1}H(\boldsymbol{Py}),\operatorname{sgn}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})>\\
&=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sgn}(x_i-y_i)\Big\{\frac{1}{p_i}\Big[-d_i\mathrm{e}^t p_i(x_i-y_i)\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\mathrm{e}^t\Big(f_j(p_jx_j)-f_j(p_jy_j)\Big)\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\mathrm{e}^t\Big(g_j(p_jx_j)-g_j(p_jy_j)\Big)\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\mathrm{e}^t\Big(h_j(p_jx_j)-h_j(p_jx_j)\Big)\Big]\Big\}\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}\Big\{-d_i\mathrm{e}^t p_i|x_i-y_i|\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\mathrm{e}^t|f_j(p_jx_j)-f_j(p_jy_j)|\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|\mathrm{e}^t|g_j(p_jx_j)-g_j(p_jy_j)|\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|\mathrm{e}^t|h_j(p_jx_j)-h_j(p_jy_j)|\Big\}\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}\Big\{-d_i\mathrm{e}^t p_i|x_i-y_i|\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\mathrm{e}^tL(f_j)p_j|x_j-y_j|\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|\mathrm{e}^tL(g_j)p_j|x_j-y_j|\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|\mathrm{e}^tL(h_j)p_j|x_j-y_j|\Big\}\\
&=-\sum_{i=1}^{n}d_i\mathrm{e}^t|x_i-y_i|\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{n}\Big[|a_{ij}|L(f_j)+|b_{ij}|L(g_j)+|c_{ij}|L(h_j)\Big]\\
&\quad\cdot\mathrm{e}^t p_j|x_j-y_j|\\
&=-\sum_{i=1}^{n}d_i\mathrm{e}^t|x_i-y_i|\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{p_j}{p_i}\Big[|a_{ij}|L(f_j)+|b_{ij}|L(g_j)+|c_{ij}|L(h_j)\Big]\\
&\quad\cdot\mathrm{e}^t|x_j-y_j|\\
&=-\sum_{j=1}^{n}d_j\mathrm{e}^t|x_j-y_j|\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_j}{p_i}\Big[|a_{ij}|L(f_j)+|b_{ij}|L(g_j)+|c_{ij}|L(h_j)\Big]\\
&\quad\cdot\mathrm{e}^t|x_j-y_j|\\
&=-\sum_{j=1}^{n}\Big[d_j-\sum_{i=1}^{n}\frac{p_j}{p_i}\Big(|a_{ij}|L(f_j)+|b_{ij}|L(g_j)+|c_{ij}|L(h_j)\Big)\Big]\\
&\quad\cdot\mathrm{e}^t|x_j-y_j|
\end{aligned}
$$

由已知$\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\Big\{d_j-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{p_j}{p_i}\Big(|a_{ij}|L(f_j)+|b_{ij}|L(g_j)+|c_{ij}|L(h_j)\Big)\Big\}>0$,可得 $m_{\boldsymbol{P}^{-1}(\Omega)}(\boldsymbol{P}^{-1}H\boldsymbol{P})<0$,由引理 1 知 $\boldsymbol{P}^{-1}H\boldsymbol{P}$ 是一一映射,故有唯一的 $\boldsymbol{v}^*\in\Omega$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}H\boldsymbol{P}(\boldsymbol{v}^*)=0$,故系统(4)在 Ω 上有唯一的平衡点.从而系统(1)在 Ω 上有唯一的平衡点 $\boldsymbol{u}^*$.

下面给出系统(4)指数稳定的判据.令 $F:\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}^n$

$$F(\boldsymbol{v})=(F_1(v_1),F_2(v_2),\cdots,F_n(v_n))^{\mathrm{T}}$$

其中 $F_i(v_i)=-d_iv_i(t)+\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}f_j(v_j(t))$,令 $G:\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}^n$

$$G(\boldsymbol{v})=(G_1(v_1),G_2(v_2),\cdots,G_n(v_n))^{\mathrm{T}}$$

其中 $G_i(v_i)=\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}g_j(v_j(t))+\sum\limits_{j=1}^{n}c_{ij}h_j(v_j(t))+I_i$.

定理 2　假设 f_j,g_j 和 h_j 满足(H),$\boldsymbol{v}^*$是系统(4)的平衡点,且 Ω 是 $\boldsymbol{v}^*$ 的一个邻域.若存在一列正实数 p_i ($i=1,2,\cdots,n$)使得式(3)成立,则对每一个外部输入 I_i,系统(4)在 Ω 上是指数稳定的.特别地,若 $\boldsymbol{v}(t)$是系统(4)由 $\phi\in C([-\tau,0],\Omega)$初始的解,则

$$\|\boldsymbol{v}(t)-\boldsymbol{v}^*\|_1\leqslant\mathrm{e}^{-\sigma t}\frac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}p_i}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}p_i}\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}\|\phi(s)-\boldsymbol{v}^*\|_1,\ t\geqslant 0$$

其中 σ 是如下方程的唯一正解

$$\sigma\min_{1\leqslant j\leqslant n}a_j^{-1}-1+k\mathrm{e}^{\tau\sigma}=0$$

而$a_j=d_j-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{p_j}{p_i}|a_{ij}|L(f_j)$,

$$k=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\Big\{\frac{1}{a_j}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_j}{p_i}\Big[|b_{ij}|L(g_j)+|c_{ij}|L(h_j)\Big]\Big\}.$$

证明:令 $\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(p_1,p_2,\cdots,p_n)$,取 $\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}(a_1^{-1},a_2^{-1},\cdots,a_n^{-1})$,由式(3)知

$$a_j=d_j-\sum_{i=1}^{n}\frac{p_j}{p_i}|a_{ij}|L(f_j)>0,j=1,2,\cdots,n.$$

对$\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}(\Omega)$,

$$
\begin{aligned}
&<\mathrm{e}^t\boldsymbol{P}^{-1}F(\boldsymbol{PAx})-\mathrm{e}^t\boldsymbol{P}^{-1}F(\boldsymbol{PAy}),\operatorname{sgn}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})>\\
&=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{sgn}(x_i-y_i)\Big\{\mathrm{e}^t\frac{1}{p_i}\Big[-d_i\frac{p_i}{a_i}(x_i-y_i)\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\Big(f_j(\frac{p_j}{a_j}x_j)-f_j(\frac{p_j}{a_j}y_j)\Big)\Big]\Big\}\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^t\frac{1}{p_i}\Big\{-d_i\frac{p_i}{a_i}|x_i-y_i|\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\Big|f_j(\frac{p_j}{a_j}x_j)-f_j(\frac{p_j}{a_j}y_j)\Big|\Big\}\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{n}-\mathrm{e}^t\frac{d_i}{a_i}|x_i-y_i|\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|L(f_j)\frac{p_j}{a_j}\mathrm{e}^t|x_j-y_j|\\
&=\sum_{j=1}^{n}-\mathrm{e}^t\frac{d_j}{a_j}|x_j-y_j|\\
&\quad+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_j}{a_jp_i}|a_{ij}|L(f_j)\mathrm{e}^t|x_j-y_j|\\
&=\sum_{j=1}^{n}\Big\{-\frac{d_j}{a_j}+\sum_{i=1}^{n}\frac{p_j}{a_jp_i}|a_{ij}|L(f_j)\Big\}\mathrm{e}^t|x_j-y_j|
\end{aligned}
$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \mathrm{e}^t \left| x_j - y_j \right|$$

于是 $m_{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}(\Omega)}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{FPA}) \leqslant -1 < 0$. $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}(\Omega)$,有

$$\begin{aligned}
&\| \mathrm{e}^t \boldsymbol{P}^{-1} G(\boldsymbol{PAx}) - \mathrm{e}^t \boldsymbol{P}^{-1} G(\boldsymbol{PAy}) \|_1 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{p_i} \mathrm{e}^t \Big[\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \Big(g_j(\frac{p_j}{a_j} x_j) - g_j(\frac{p_j}{a_j} y_j) \Big) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \Big(h_j(\frac{p_j}{a_j} x_j) - h_j(\frac{p_j}{a_j} y_j) \Big) \Big] \right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{p_i} \mathrm{e}^t \Big[\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| \left| g_j(\frac{p_j}{a_j} x_j) - g_j(\frac{p_j}{a_j} y_j) \right| \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| \left| h_j(\frac{p_j}{a_j} x_j) - h_j(\frac{p_j}{a_j} y_j) \right| \Big] \right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{p_i} \mathrm{e}^t \Big[\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| L(g_j) \frac{p_j}{a_j} |x_j - y_j| \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| L(h_j) \frac{p_j}{a_j} |x_j - y_j| \Big] \right| \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{p_i} \mathrm{e}^t \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j}{a_j} \Big(|b_{ij}| L(g_j) + |c_{ij}| L(h_j) \Big) |x_j - y_j| \right| \\
&= \sum_{j=1}^{n} \Big[\frac{1}{a_j} \sum_{i=1}^{n} \frac{p_j}{p_i} \Big(|b_{ij}| L(g_j) + |c_{ij}| L(h_j) \Big) \Big] \\
&\quad \cdot \mathrm{e}^t |x_j - y_j|
\end{aligned}$$

则有 $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}(\Omega)}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{GPA}) \leqslant k$.

故有

$$\begin{aligned}
&m_{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}(\Omega)}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{FPA}) + L_{\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}(\Omega)}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{GPA}) \\
&\leqslant -1 + k \\
&= \max_{1\leqslant j\leqslant n} \frac{-a_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{p_j}{p_i} \big(|b_{ij}| L(g_j) + |c_{ij}| L(h_j) \big)}{a_j} < 0.
\end{aligned}$$

由引理 2 知 $\boldsymbol{v}^*$ 是指数稳定的.且有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^t \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{FP}(\boldsymbol{x}(t)) + \mathrm{e}^t \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{GP}(\boldsymbol{x}_\tau(t)) \qquad (5)$$

满足

$$\| \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{v}^* \|_1 \leqslant \mathrm{e}^{-\sigma t} \sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0} \| \phi(s) - \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{v}^* \|_1, t \geqslant 0$$

其中 $\sigma \min_{1\leqslant j\leqslant n} a_j^{-1} - 1 + k\mathrm{e}^{\tau\sigma} = 0$. 注意到 $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{v}(t)$ 是系统(5)由 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}^{-1}\phi \in C([-\tau, 0], \Omega)$ 初始的解,而 $\boldsymbol{v}(t)$ 是系统(4)由 $\phi \in C([-\tau, 0], \Omega)$ 初始的解,则有

$$\| \boldsymbol{v}(t) - \boldsymbol{v}^* \|_1 \leqslant \mathrm{e}^{-\sigma t} \frac{\max_{1\leqslant i\leqslant n} p_i}{\min_{1\leqslant i\leqslant n} p_i} \sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0} \| \phi(s) - \boldsymbol{v}^* \|_1, t \geqslant 0$$

为系统(4)的解的指数衰减估计.

需要说明的是:系统(1)的指数稳定性与系统(4)的指数稳定是等价的.系统(1)经过变换 $v_i(t) = u_i(\mathrm{e}^t)$ 后得到系统(4),而系统(4)不同于文献[10]所研究的模型,文献[10]要求系数函数 $a_i(u_i(t))$ 是有界的,而本文中系统(4)的系数函数含有 e^t 是无界的.

4 算例与仿真

考虑下面二维的多比例延时细胞神经网络

$$\begin{cases}
\dot{u}_1(t) = -9u_1(t) + f_1(u_1(t)) + 2f_2(u_2(t)) \\
\qquad + 2g_1(u_1(\frac{1}{2}t)) - h_2(u_2(\frac{2}{3}t)), \\
\dot{u}_2(t) = -6u_2(t) + 2f_1(u_1(t)) - f_2(u_2(t)) \\
\qquad - g_2(u_2(\frac{1}{2}t)) + 2h_1(u_1(\frac{2}{3}t)).
\end{cases} \qquad (6)$$

其中 $f_j(x_j) = x_j - \mathrm{arctg}(\frac{x_j}{2})$, $g_j(x_j) = x_j - \sin(x_j)$, $h_j(x_j) = \sin(\frac{x_j}{3}) + \frac{x_j}{3}$,于是 $L(f_j) = 1, L(g_j) = 2, L(h_j) = \frac{2}{3}$, $(j = 1, 2)$. 取 $p_1 = p_2 = 1$,于是

$$\begin{aligned}
&\min_{1\leqslant j\leqslant 2} \left\{ 9 - (1 + 4 + 2 + \frac{4}{3}), 6 - (2 + \frac{2}{3} + 1 + 2) \right\} \\
&= \min_{1\leqslant j\leqslant 2} \left\{ \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\} = \frac{1}{3} > 0
\end{aligned}$$

于是由定理 1 知该系统具有唯一的平衡点 $\boldsymbol{u}^* = (0, 0)^{\mathrm{T}}$. 由定理 2 知系统(6)的平衡点是指数稳定的且满足如下指数衰减估计

$$|u_1(t) + u_2(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-\sigma t} \sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0} \phi(s)_1, t \geqslant 0$$

其中 $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), u_2(t))^{\mathrm{T}}$ 是系统(6)由 $\phi \in C([-\log 2, 0], \mathbf{R}^2)$ 的任一解,σ 是如下方程的唯一正解

$$\frac{1}{6}\sigma - 1 + \frac{8}{9} 2^\sigma = 0$$

系统(6)的解 $\boldsymbol{u}(t)$ 的指数稳定性如图 1.

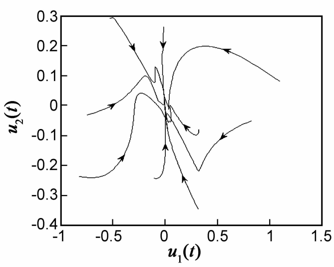

图1 系统(6)的全局指数稳定性

5 结论

本文研究了一类具多比例延时的细胞神经网络的指数稳定性,得到了平衡点存在唯一且指数稳定的充分条件,并且这个充分条件不依赖于延时,且激活函数不必是有界的、可微的和单调增的.最后,通过数值算例验证了所得结论,并利用计算机做了数值仿真.

参考文献

[1] L O Chua, L Yang. Cellular neural networks: theory[J]. IEEE Trans Circuits Syst, 1988, 35(10): 1257 – 1272.

[2] L O Chua, L Yang. Cellular neural networks: applications[J]. IEEE Trans Circuits Syst, 1988, 35(10): 1273 – 1290.

[3] 乔俊飞,李淼,刘江.一种神经网络快速修剪算法[J].电子学报,2010,38(4):830 – 834.
Qiao Jun-fei, Li Miao, Liu Jiang. A fast pruning algorithm for

neural network[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(4): 830 – 834. (in Chinese)

[4] Jinde Cao. Periodic occillation and exponential stability of delayed CNNs[J]. Physics Letters A, 2000, 270(3/4): 157 – 163.

[5] Liqun Zhou, Guangda Hu. Global exponential periodicity and stability of cellular neural networks with variable and distributed delays[J]. Appl Math and Compu, 2008, 195: 402 – 411.

[6] Chuangxia Huang, Lihong Huang, Zhaohui Yuan. Global stability analysis of a class of delayed cellular neural networks[J]. Math and Compu, 2005, 70(3): 133 – 148.

[7] Changyin Sun, Chun-bo Feng. Exponential periodicity and stability of delayed neural networks[J]. Math and Compu, 2004, 66(6): 469 – 478.

[8] Jigen Peng, Hong Qiao, Zong-ben Xu. A new approach to stability of neural networks with time-varying delays[J]. Neural Networks, 2002, 15(1): 95 – 103.

[9] Jinde Cao, Qiong Li. On the exponential stability and periodic solutions of delayed cellular neural networks[J]. J Math Analysis and Appl, 2000, 252(1): 50 – 64.

[10] Song Xueli, Peng Jigen. Exponential stability of a class of neural networks with discrete time-varying and distributed delays[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2010, 27(4): 731 – 740.

[11] Liu Y. Stability of θ-methods for neutral functional differential equations[J]. Numer Math, 1995, 70: 473 – 485.

[12] 钟守铭,黄廷祝,黄元清.具有无穷时滞的细胞神经网络的稳定性分析[J].电子学报,2001,29(5):626 – 629.

Zhong Shou-ming, Huang Ting-zhu, Huang Yuan-qing. The stability analysis of ceullular networks with infinite delay[J]. Acta Electronica Sinica, 2001, 29(5): 626 – 629. (in Chinese)

[13] 沈轶,张玉民,廖晓昕.随机细胞神经网络的指数稳定性[J].电子学报,2002,30(11):1672 – 1675.

Shen Yi, Zhang Yu-min, Liao Xiao-xin. Exponential stability of stochastic cellular neural networks[J]. Acta Electronica Sinica, 2002, 30(11): 1672 – 1675. (in Chinese)

作者简介

张迎迎 女,1987 年四月出生于山东省夏津县.2009 年毕业于齐齐哈尔大学理学院数学与应用数学专业并获得理学学士学位,其后考入天津师范大学数学科学学院基础数学.现为硕士研究生,主要从事细胞神经网络的动力学性质的研究.

E-mail: zhangyy.3@163.com

周立群 女,1972 出生,吉林省德惠市人,博士、副教授,硕士生导师.1998 年本科毕业于齐齐哈尔大学数学系;2004 年硕士毕业于哈尔滨工业大学数学系;2007 年博士毕业于哈尔滨工业大学控制科学与工程系.现在天津师范大学数学科学学院任教.主要从事神经网络的理论及应用的研究.

E-mail: zhouliqun20000@163.com