

阵列模型误差影响下 ESPRIT 算法的二阶性能分析

王 鼎, 姚 晖, 吴 瑛

(解放军信息工程大学信息工程学院, 河南郑州 450002)

摘 要: 针对阵列模型误差扰动的影响, 该文对 ESPRIT 算法的方位估计性能进行二阶性能分析(即忽略模型误差扰动量的三次及以上各项). 与经典分析方法(即一阶分析方法)相比, 文中的性能分析方法能够在模型误差扰动较大的情况下提高性能预测精度. 此外, 文中的理论推导不仅针对阵列流形失配的情况, 还针对阵元噪声模型失配的情形. 数值实验表明: 在较大模型误差的条件下, 文中的二阶性能分析方法能够提高对 ESPRIT 算法的性能预测精度.

关键词: ESPRIT 算法; 模型误差; 二阶性能分析; 阵列流形失配; 噪声模型失配

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2012) 10-2133-07

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.10.039

A Second-Order Performance Analysis of the ESPRIT Algorithm in Presence of Array Modeling Errors

WANG Ding, YAO Hui, WU Ying

(Institute of Information Engineering, PLA Information Engineering University, Zhengzhou, Henan 450002, China)

Abstract: Aiming at the effects of the array modeling errors, the second-order performance analysis method (i. e., discarding the third-order and higher-order terms of the modeling errors) for the ESPRIT algorithm is proposed in this paper. Compared to the classical analysis method (i. e., the first-order analysis method), the second-order analysis method can yield higher performance prediction precision, especially in the presence of large modeling errors. In addition, the presented analysis method is not only suitable for the case of the array manifold mismatch, but also applies to the case of the sensor noise model mismatch. The numerical experiments verify the superiority of the second-order performance analysis method in the presence of large modeling errors.

Key words: ESPRIT algorithm; modeling errors; second-order performance analysis; array manifold mismatch; noise model mismatch

1 引言

关于理论上推导 ESPRIT 算法^[1,2]理论性能的报道已有很多. 文献[3~6]分析有限采样影响下 ESPRIT 算法的方位估计性能, 文献[7~9]针对阵列模型误差的影响对 ESPRIT 算法的性能进行预测. 上述文献在一定条件下能够取得较好效果, 但都是一阶分析方法, 即忽略误差二次及其以上各项, 于是在误差扰动较大的情况下, 其性能预测精度会有所下降. 文献[10]给出 ESPRIT 算法的二阶性能分析, 其中仅推导 ESPRIT 算法的方位估计偏差(事实上, 方位估计均方误差更为重要), 并且其中主要针对有限采样的影响进行分析.

事实上, 在超分辨率算法性能的理论研究中, 针对阵列模型误差的二阶性能分析方法已有文献报道, 例如, 文献[11~13]针对 MUSIC 算法展开理论研究, 文献

[14]针对最大似然算法进行理论分析, 其中的数值实验验证了高阶性能分析方法的优势. 然而, 在模型失配的条件下, 针对 ESPRIT 算法的二阶性能分析则很少有文献报道, 因此本文做了相关工作, 虽然文中的性能分析过程与文献[7~10]类似, 但是每一个环节都采用二阶性能分析, 因此能够在误差扰动较大的情况下提高性能预测精度. 另一方面, 由于文中在信号子空间的扰动分析中利用矩阵特征扰动理论, 所以文中的性能分析方法不仅适用于阵列流形失配的情况(最常见的阵列模型误差), 还适用噪声模型失配的情况.

2 阵列信号模型与 ESPRIT 算法简介

不失一般性, 考虑 M 元均匀线阵, 有 D 个非相干窄带信源到达该阵列, 第 k 个信源的方位为 θ_k , 阵列输出响应为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中 $\mathbf{n}(t)$ 为复高斯白噪声, $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1) \mathbf{a}(\theta_2) \cdots \mathbf{a}(\theta_D)]$ 为阵列方向矩阵, $\mathbf{a}(\theta_k)$ 为阵列流形向量, 其表达式为

$$\mathbf{a}(\theta_k) = [1 \quad e^{j2\pi d \sin(\theta_k)/\lambda} \quad \cdots \quad e^{j2\pi(M-1)d \sin(\theta_k)/\lambda}]^T \quad (2)$$

根据式(1)可知阵列协方差阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= \mathbb{E}[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)] \\ &= \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma_n^2\mathbf{I}_M \end{aligned} \quad (3)$$

对 \mathbf{R}_x 进行特征分解, 则能够得到 D 个大特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_D$, 相应的单位特征向量为 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_D$, 它们张成信号子空间, 记为 $\mathbf{E}_S = [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \cdots \mathbf{e}_D]$.

假设在 ESPRIT 算法中两个子阵列的选择矩阵分别为 \mathbf{J}_1 和 \mathbf{J}_2 , 则满足

$$\mathbf{J}_1\mathbf{A}\Phi = \mathbf{J}_2\mathbf{A} \quad (4)$$

式中 $\Phi = \text{diag}\{e^{j\phi_k}\}_{k=1}^D$. 图 1 给出两种常见子阵列构造方式, 第一种是“间隔式”, 其中 $\phi_k = 2\pi d \sin(\theta_k)/\lambda$; 第二种是“重叠式”, 其中 $\phi_k = 2\pi(M-m)d \sin(\theta_k)/\lambda$. 在子阵列结构已明确的情况下, 子阵列的选择矩阵仍存在多种形式, 这是因为同一阵元在同一选择矩阵中可被重复选用. 例如, 对于“重叠式”子阵列构造方式, 文献[4]给出一种子阵列选择矩阵构造方式

$$\begin{cases} \mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} [\bar{\mathbf{J}}_1^T & \bar{\mathbf{J}}_2^T & \cdots & \bar{\mathbf{J}}_{m_s+1}^T]^T & \mathbf{O}_{m_s(m-m_s+1) \times (M-m)} \\ \mathbf{O}_{m_s(m-m_s+1) \times (M-m)} & [\bar{\mathbf{J}}_1^T & \bar{\mathbf{J}}_2^T & \cdots & \bar{\mathbf{J}}_{m_s+1}^T]^T \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{m_s(m-m_s+1) \times (M-m)} & [\bar{\mathbf{J}}_1^T & \bar{\mathbf{J}}_2^T & \cdots & \bar{\mathbf{J}}_{m_s+1}^T]^T \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5)$$

式中 $\bar{\mathbf{J}}_i$ 表示选择第 i 至第 $m_s + i - 1$ 个共计 m_s 个连续阵元, 其形式为 $\bar{\mathbf{J}}_i = [\mathbf{O}_{m_s \times (i-1)} \quad \mathbf{I}_{m_s} \quad \mathbf{O}_{m_s \times (m-m_s-i+1)}]$. 根据式(4)可进一步得

$$\mathbf{J}_1\mathbf{E}_S\mathbf{T} = \mathbf{E}_{S1}\mathbf{T} = \mathbf{J}_2\mathbf{E}_S = \mathbf{E}_{S2} \quad (6)$$

式中 $\mathbf{T} \in \mathbf{C}^{D \times D}$ 称为转移矩阵, 其特征值 $\{\rho_k\}_{k=1}^D$ 为 Φ 对角元素 $\{e^{j\phi_k}\}_{k=1}^D$, 根据 ϕ_k 的表达式可获得信源方位.

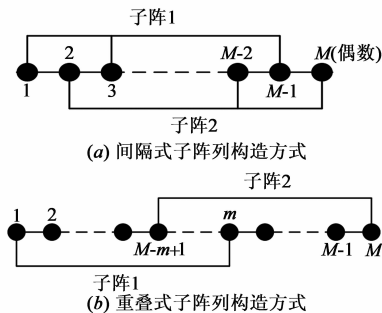


图1 两种子阵列构造方式

实际中 ESPRIT 算法会受到各种误差影响, 主要包括: (1) 有限采样; (2) 阵列流形模型失配; (3) 噪声模型失配等, 其中情况(2)和情况(3)归为阵列模型误差, 这也是本文主要讨论的误差形式. 本文将针对情况(2)和情况(3), 对 ESPRIT 算法进行二阶性能分析.

3 模型误差影响下 ESPRIT 算法二阶性能分析

为了推导 ESPRIT 算法性能, 需要给出 \mathbf{E}_S 的扰动, 然后讨论 \mathbf{E}_S 扰动量对 \mathbf{T} 的影响, 从而确定其特征值 ρ_k 的扰动量, 最后再根据 ρ_k 与 θ_k 的关系推导方位估计扰动量. 由于文中是二阶性能分析, 所以在推导上述变量扰动量(记为 $\tilde{\mathbf{E}}_S, \tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\rho}_k$ 和 $\tilde{\theta}_k$)时, 均要同时给出它们关于误差一阶和二阶表达式, 文中将变量一阶和二阶扰动量记为 $\tilde{\mathbf{X}}^{(1)}$ 和 $\tilde{\mathbf{X}}^{(2)}$ (\mathbf{X} 泛指上述变量).

3.1 阵列协方差阵的二阶扰动分析

文中扰动分析是基于矩阵特征扰动理论的, 下面将分别针对情况(2)和情况(3), 对协方差阵 \mathbf{R}_x 的扰动量进行讨论. 假设受扰动协方差阵为 $\hat{\mathbf{R}}_x = \mathbf{R}_x + \tilde{\mathbf{R}}_x$, 其中 $\tilde{\mathbf{R}}_x$ 为扰动量, 针对不同模型误差, $\tilde{\mathbf{R}}_x$ 具有不同形式. 若阵列流形失配, 令方向矩阵为 $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \tilde{\mathbf{A}}$, 其中 $\tilde{\mathbf{A}}$ 为扰动量, 则 $\tilde{\mathbf{R}}_x$ 是关于 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的二次矩阵函数; 若噪声模型失配, 令噪声协方差阵为 $\hat{\Sigma} = \sigma_n^2\mathbf{I}_M + \tilde{\Sigma}$, 其中 $\tilde{\Sigma}$ 为扰动量, 则 $\tilde{\mathbf{R}}_x$ 即为 $\tilde{\Sigma}$. 令 $\tilde{\mathbf{R}}_x^{(1)}$ 和 $\tilde{\mathbf{R}}_x^{(2)}$ 表示 \mathbf{R}_x 一阶和二阶扰动量, 则针对阵列流形失配的情况可得

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{R}}_x^{(1)} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \mathbf{A}\tilde{\mathbf{R}}_s\mathbf{A}^H \\ \tilde{\mathbf{R}}_x^{(2)} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \mathbf{A}\tilde{\mathbf{R}}_s\mathbf{A}^H + \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R}_s\tilde{\mathbf{A}}^H \end{cases} \quad (7)$$

针对噪声模型失配的情况可得 $\tilde{\mathbf{R}}_x^{(1)} = \tilde{\mathbf{R}}_x^{(2)} = \tilde{\Sigma}$.

3.2 信号子空间的二阶扰动分析

令 $\tilde{\mathbf{R}}_x = \epsilon\mathbf{B}$ ($0 < \epsilon \ll 1$), 根据矩阵特征扰动理论知受扰动的特征值和相应的特征向量(非单位化)分别为

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_k = \lambda_k + \beta_k^{(1)}\epsilon + \beta_k^{(2)}\epsilon^2 + \cdots \\ \hat{\mathbf{e}}_k = \mathbf{e}_k + \sum_{i=1, i \neq k}^M \alpha_{ki}^{(1)}\epsilon\mathbf{e}_i + \sum_{i=1, i \neq k}^M \alpha_{ki}^{(2)}\epsilon^2\mathbf{e}_i + \cdots \end{cases} \quad (k=1, 2, \cdots, D) \quad (8)$$

式中 $\beta_k^{(1)}$ 和 $\beta_k^{(2)}$ 分别代表特征值一阶和二阶扰动系数, 而 $\alpha_{ki}^{(1)}$ 和 $\alpha_{ki}^{(2)}$ 分别代表特征向量一阶和二阶扰动系数. 对式(8)中的特征向量 $\hat{\mathbf{e}}_k$ 进行单位化处理可得

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_k &\approx \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1, i \neq k}^M |\alpha_{ki}^{(1)}|^2 \epsilon^2\right) \mathbf{e}_k + \sum_{i=1, i \neq k}^M \alpha_{ki}^{(1)} \epsilon \mathbf{e}_i \\ &\quad + \sum_{i=1, i \neq k}^M \alpha_{ki}^{(2)} \epsilon^2 \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (9)$$

通过比较等式 $\hat{\mathbf{R}}_x \hat{\mathbf{e}}_k = \hat{\lambda}_k \hat{\mathbf{e}}_k$ 中 ϵ 和 ϵ^2 项系数, 并利用特征等式 $\mathbf{R}_x \mathbf{e}_k = \lambda_k \mathbf{e}_k$ 和特征向量之间的正交关系 $\mathbf{e}_k^H \mathbf{e}_l = 0$ (当 $k \neq l$ 时)可推得

$$\begin{cases} \alpha_{kl}^{(1)} = \frac{\mathbf{e}_l^H \mathbf{B} \mathbf{e}_k}{\lambda_k - \lambda_l} \\ \alpha_{kl}^{(2)} = \frac{\sum_{i=1, i \neq k}^M \mathbf{e}_i^H \mathbf{B} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_i^H \mathbf{B} \mathbf{e}_i}{(\lambda_k - \lambda_l)(\lambda_k - \lambda_l)} - \frac{\mathbf{e}_l^H \mathbf{B} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_i^H \mathbf{B} \mathbf{e}_k}{(\lambda_k - \lambda_l)^2} \end{cases} \quad (k \neq l) \quad (10)$$

将式(10)代入式(9)可知

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{e}}_k^{(1)} = \mathbf{F}_{1k} \tilde{\mathbf{R}}_x^{(1)} \mathbf{e}_k \\ \tilde{\mathbf{e}}_k^{(2)} = \mathbf{F}_{1k} \tilde{\mathbf{R}}_x^{(2)} \mathbf{e}_k + \mathbf{F}_{1k} \tilde{\mathbf{R}}_x^{(1)} \mathbf{F}_{1k} \tilde{\mathbf{R}}_x^{(1)} \mathbf{e}_k \\ \quad - \frac{1}{2} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^H \tilde{\mathbf{R}}_x^{(1)} \mathbf{F}_{2k} \tilde{\mathbf{R}}_x^{(1)} \mathbf{e}_k - \mathbf{F}_{2k} \tilde{\mathbf{R}}_x^{(1)} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^H \tilde{\mathbf{R}}_x^{(1)} \mathbf{e}_k \end{cases} \quad (11)$$

式中 $\mathbf{F}_{1k} = \sum_{i=1, i \neq k}^M \frac{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H}{\lambda_k - \lambda_i}$ 和 $\mathbf{F}_{2k} = \sum_{i=1, i \neq k}^M \frac{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H}{(\lambda_k - \lambda_i)^2}$.

3.3 转移矩阵及其特征值的二阶扰动分析

由于转移矩阵 \mathbf{T} 是根据式(6)进行求解的,因此其扰动量 $\tilde{\mathbf{T}}$ 与 \mathbf{E}_S 的扰动量 $\tilde{\mathbf{E}}_S$ 有着直接关系,文献[7~10]已经推导其一阶和二阶扰动表达式为

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{T}}^{(1)} = \mathbf{E}_{S1}^\dagger (\tilde{\mathbf{E}}_{S2}^{(1)} - \tilde{\mathbf{E}}_{S1}^{(1)} \mathbf{T}) \\ \tilde{\mathbf{T}}^{(2)} = (\mathbf{E}_{S1}^H \mathbf{E}_{S1})^{-1} \tilde{\mathbf{E}}_{S1}^{(1)H} (\mathbf{I}_m - \mathbf{E}_{S1} \mathbf{E}_{S1}^\dagger) (\tilde{\mathbf{E}}_{S2}^{(1)} - \tilde{\mathbf{E}}_{S1}^{(1)} \mathbf{T}) \\ \quad + \mathbf{E}_{S1}^\dagger (\tilde{\mathbf{E}}_{S2}^{(2)} - \tilde{\mathbf{E}}_{S1}^{(2)} \mathbf{T}) - \mathbf{E}_{S1}^\dagger \tilde{\mathbf{E}}_{S1}^{(1)} \mathbf{E}_{S1}^\dagger (\tilde{\mathbf{E}}_{S2}^{(1)} - \tilde{\mathbf{E}}_{S1}^{(1)} \mathbf{T}) \end{cases} \quad (12)$$

式中 $\tilde{\mathbf{E}}_{S1}^{(i)} = \mathbf{J}_1 \tilde{\mathbf{E}}_S^{(i)}$ 和 $\tilde{\mathbf{E}}_{S2}^{(i)} = \mathbf{J}_2 \tilde{\mathbf{E}}_S^{(i)}$ ($i=1,2$). 下面考虑 \mathbf{T} 的特征值扰动问题,令 $\tilde{\mathbf{T}} = \epsilon \mathbf{B}$, 其中 $0 < \epsilon \ll 1$, 假设对应于特征值 ρ_k 的右和左单位特征向量为 \mathbf{u}_k 和 \mathbf{v}_k , 则有 $\mathbf{T} \mathbf{u}_k = \rho_k \mathbf{u}_k$ 和 $\mathbf{v}_k^H \mathbf{T} = \rho_k \mathbf{v}_k^H$, 当 \mathbf{T} 的特征值互不相同, 左、右特征向量系 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_D$ 和 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_D$ 均各自线性独立, 并满足正交关系 $\mathbf{u}_k^H \mathbf{v}_l = 0$ ($l \neq k$), 此时根据矩阵特征扰动理论可知受扰动的特征值和相应的右特征向量(非单位化)分别为

$$\begin{cases} \hat{\rho}_k = \rho_k + \gamma_k^{(1)} \epsilon + \gamma_k^{(2)} \epsilon^2 + \dots \\ \bar{\mathbf{u}}_k = \mathbf{u}_k + \sum_{i=1, i \neq k}^D \eta_{ki}^{(1)} \epsilon \mathbf{u}_i \\ \quad + \sum_{i=1, i \neq k}^D \eta_{ki}^{(2)} \epsilon^2 \mathbf{u}_i + \dots \end{cases} \quad (k=1,2,\dots,D) \quad (13)$$

式中 $\gamma_k^{(1)}$ 和 $\gamma_k^{(2)}$ 代表特征值一阶和二阶扰动系数, $\eta_{ki}^{(1)}$ 和 $\eta_{ki}^{(2)}$ 代表右特征向量一阶和二阶扰动系数. 比较等式 $\tilde{\mathbf{T}} \bar{\mathbf{u}}_k = \hat{\rho}_k \bar{\mathbf{u}}_k$ 中 ϵ 和 ϵ^2 系数, 并利用等式 $\mathbf{T} \mathbf{u}_k = \rho_k \mathbf{u}_k$ 以及左、右特征向量间正交关系 $\mathbf{v}_l^H \mathbf{u}_l = 0$ ($l \neq k$) 可得

$$\begin{cases} \mathbf{h}_k = i c_{nk} \rho_k w_k^* (\mathbf{u}_k^* \otimes (\bar{\mathbf{J}}_k^H \mathbf{E}_{S1}^H \mathbf{v}_k)) \\ \mathbf{H}_{1k} = \frac{1}{4} \tan(\theta_k) \mathbf{h}_k \mathbf{h}_k^H - i c_{nk} \rho_k^* w_k ((\mathbf{E}_{S1}^T \mathbf{E}_{S1}^*)^{-1} \mathbf{v}_k^* \mathbf{u}_k^T) \otimes (\mathbf{J}_1^H (\mathbf{I}_m - \mathbf{E}_{S1} \mathbf{E}_{S1}^\dagger) \bar{\mathbf{J}}_k) \\ \mathbf{H}_{2k} = \frac{1}{4} \tan(\theta_k) \mathbf{h}_k^* \mathbf{h}_k^H + i c_{nk} \rho_k^* w_k \mathbf{\Pi}_1^H ((\mathbf{J}_1^T \mathbf{E}_{S1}^{\dagger T} \mathbf{v}_k^* \mathbf{u}_k^T) \otimes (\mathbf{E}_{S1}^\dagger \bar{\mathbf{J}}_k)) + \frac{1}{2} i c_{nk} \rho_k^* w_k^2 \mathbf{\Pi}_1^H ((\bar{\mathbf{J}}_k^T \mathbf{E}_{S1}^{\dagger T} \mathbf{v}_k^* \mathbf{u}_k^T) \otimes (\mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^H \mathbf{E}_{S1}^\dagger \bar{\mathbf{J}}_k)) \\ \quad - i c_{nk} \rho_k^* \sum_{i=1, i \neq k}^D \frac{w_k w_i \mathbf{\Pi}_1^H ((\bar{\mathbf{J}}_k^T \mathbf{E}_{S1}^{\dagger T} \mathbf{v}_i^* \mathbf{u}_i^T) \otimes (\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^H \mathbf{E}_{S1}^\dagger \bar{\mathbf{J}}_i))}{\rho_k - \rho_i} \end{cases} \quad (19)$$

其中 $\mathbf{\Pi}_1$ 是满足等式 $\text{vec}(\tilde{\mathbf{A}}^T) = \mathbf{\Pi}_1 \cdot \text{vec}(\tilde{\mathbf{A}})$. 下面需要利用式(11)给出方位估计扰动量与协方差阵扰动量间的关系, 为此可先记 $\mathbf{h}_k^{(i)}$ 表示 \mathbf{h}_k 的第 $(i-1)M+1$ 至第

$$\begin{cases} \gamma_k^{(1)} = w_k \mathbf{v}_k^H \mathbf{B} \mathbf{u}_k \\ \gamma_k^{(2)} = \sum_{i=1, i \neq k}^D \frac{w_k w_i \mathbf{v}_i^H \mathbf{B} \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^H \mathbf{B} \mathbf{u}_i}{\rho_k - \rho_i} \end{cases} \quad (14)$$

式中 $w_k = 1/(\mathbf{v}_k^H \mathbf{u}_k)$. 将式(14)代入式(13)可得特征值 ρ_k 一阶和二阶扰动量分别为

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_k^{(1)} = w_k \mathbf{v}_k^H \tilde{\mathbf{T}}^{(1)} \mathbf{u}_k \\ \tilde{\rho}_k^{(2)} = w_k \mathbf{v}_k^H \tilde{\mathbf{T}}^{(2)} \mathbf{u}_k + \sum_{i=1, i \neq k}^D \frac{w_k w_i \mathbf{v}_i^H \tilde{\mathbf{T}}^{(1)} \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^H \tilde{\mathbf{T}}^{(1)} \mathbf{u}_i}{\rho_k - \rho_i} \end{cases} \quad (15)$$

再将式(12)代入式(15)可得

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_k^{(1)} = w_k \mathbf{v}_k^H \mathbf{E}_{S1}^\dagger \bar{\mathbf{J}}_k \tilde{\mathbf{E}}_S^{(1)} \mathbf{u}_k \\ \tilde{\rho}_k^{(2)} = w_k \mathbf{v}_k^H \mathbf{E}_{S1}^\dagger \bar{\mathbf{J}}_k \tilde{\mathbf{E}}_S^{(2)} \mathbf{u}_k - w_k \mathbf{v}_k^H \mathbf{E}_{S1}^\dagger \mathbf{J}_1 \tilde{\mathbf{E}}_S^{(1)} \mathbf{E}_{S1}^\dagger \bar{\mathbf{J}}_k \tilde{\mathbf{E}}_S^{(1)} \mathbf{u}_k \\ \quad + w_k \mathbf{v}_k^H (\mathbf{E}_{S1}^H \mathbf{E}_{S1})^{-1} \tilde{\mathbf{E}}_S^{(1)H} \mathbf{J}_1^H (\mathbf{I}_m - \mathbf{E}_{S1} \mathbf{E}_{S1}^\dagger) \bar{\mathbf{J}}_k \tilde{\mathbf{E}}_S^{(1)} \mathbf{u}_k \\ \quad + \sum_{i=1, i \neq k}^D \frac{w_k w_i \mathbf{v}_i^H \mathbf{E}_{S1}^\dagger \bar{\mathbf{J}}_k \tilde{\mathbf{E}}_S^{(1)} \mathbf{u}_k \mathbf{v}_i^H \mathbf{E}_{S1}^\dagger \bar{\mathbf{J}}_k \tilde{\mathbf{E}}_S^{(1)} \mathbf{u}_i}{\rho_k - \rho_i} \end{cases} \quad (16)$$

式中 $\bar{\mathbf{J}}_k = \mathbf{J}_2 - \rho_k \mathbf{J}_1$.

3.4 方位估计的二阶扰动分析

ESPRIT 算法的方位估计取决于特征值 ρ_k 的相位因子 ϕ_k , 对于均匀线阵, 无论子阵构造方式如何, ρ_k 的表达式均为 $\rho_k = e^{i2\pi nd \sin(\theta_k)/\lambda}$, 其中正整数 n 的取值由子阵列构造方式决定, 根据一阶和二阶 Taylor 展开不难得到方位估计一阶和二阶扰动量分别为^[7-10]

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_k^{(1)} = \text{Im}\{c_{nk} \rho_k^* \tilde{\rho}_k^{(1)}\} \\ \tilde{\theta}_k^{(2)} = \frac{1}{2} \tan(\theta_k) \tilde{\theta}_k^{(1)2} - \frac{1}{2} \text{Im}\{c_{nk} \rho_k^* \tilde{\rho}_k^{(1)2}\} + \text{Im}\{c_{nk} \rho_k^* \tilde{\rho}_k^{(2)}\} \end{cases} \quad (17)$$

其中 $c_{nk} = \lambda/2\pi nd \cos(\theta_k)$. 将式(16)代入式(17)可得

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_k^{(1)} = \text{Re}\{\mathbf{h}_k^H \tilde{\xi}_S^{(1)}\} \\ \tilde{\theta}_k^{(2)} = \text{Re}\{\mathbf{h}_k^H \tilde{\xi}_S^{(2)}\} + \text{Re}\{\tilde{\xi}_S^{(1)H} \mathbf{H}_{1k} \tilde{\xi}_S^{(1)}\} + \text{Re}\{\tilde{\xi}_S^{(1)T} \mathbf{H}_{2k} \tilde{\xi}_S^{(1)}\} \end{cases} \quad (18)$$

式中 $\tilde{\xi}_S^{(1)} = \text{vec}(\tilde{\mathbf{E}}_S^{(1)})$ 和 $\tilde{\xi}_S^{(2)} = \text{vec}(\tilde{\mathbf{E}}_S^{(2)})$, 而 $\mathbf{h}_k, \mathbf{H}_{1k}$ 和 \mathbf{H}_{2k} 的表达式分别如式(19).

iM 个元素构成的列向量, 并令 $\mathbf{H}_{1k}^{(ij)}$ 和 $\mathbf{H}_{2k}^{(ij)}$ 分别表示 \mathbf{H}_{1k} 和 \mathbf{H}_{2k} 的第 $(i-1)M+1$ 至第 iM 行、第 $(j-1)M+1$ 至第 jM 列构成的子矩阵, 如式(20).

$$\begin{cases} \tilde{\theta}_k^{(1)} = \sum_{i=1}^D \operatorname{Re}\{h_k^{(i)H} \tilde{e}_i^{(1)}\} = \boldsymbol{\tau}_k^H \mathbf{r}_x^{(1)} \\ \tilde{\theta}_k^{(2)} = \sum_{i=1}^D \operatorname{Re}\{h_k^{(i)H} \tilde{e}_i^{(2)}\} + \sum_{i=1}^D \sum_{j=1}^D \operatorname{Re}\{\tilde{e}_i^{(1)H} \mathbf{H}_{1k}^{(ij)} \tilde{e}_j^{(1)}\} + \sum_{i=1}^D \sum_{j=1}^D \operatorname{Re}\{\tilde{e}_i^{(1)H} \mathbf{H}_{2k}^{(ij)} \tilde{e}_j^{(1)}\} = \boldsymbol{\tau}_k^H \mathbf{r}_x^{(2)} + \tilde{\mathbf{r}}_x^{(1)H} \boldsymbol{\Omega}_k \tilde{\mathbf{r}}_x^{(1)} \end{cases} \quad (20)$$

式中 $\tilde{\mathbf{r}}_x^{(1)} = \operatorname{vec}(\tilde{\mathbf{R}}_x^{(1)})$ 和 $\tilde{\mathbf{r}}_x^{(2)} = \operatorname{vec}(\tilde{\mathbf{R}}_x^{(2)})$, 而 $\boldsymbol{\tau}_k$ 和 $\boldsymbol{\Omega}_k$ 如式(21).

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^D (\mathbf{e}_i^* \otimes (\mathbf{F}_{1i} \mathbf{h}_k^{(i)}) + (\mathbf{F}_{1i}^* \mathbf{h}_k^{(i)*}) \otimes \mathbf{e}_i) \\ \boldsymbol{\Omega}_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^D ((\mathbf{F}_{1i}^* \mathbf{h}_k^{(i)*} \mathbf{e}_i^T) \otimes \mathbf{F}_{1i} + (\mathbf{e}_i^* \mathbf{h}_k^{(i)T} \mathbf{F}_{1i}^*) \otimes \mathbf{F}_{1i}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^D \sum_{j=1}^D ((\mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_j^T) \otimes (\mathbf{F}_{1i} \mathbf{H}_{1k}^{(ij)} \mathbf{F}_{1j}) \\ + (\mathbf{e}_j^* \mathbf{e}_i^T) \otimes (\mathbf{F}_{1j} \mathbf{H}_{1k}^{(ji)H} \mathbf{F}_{1i})) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^D \sum_{j=1}^D (\mathbf{\Pi}_2^H ((\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T) \otimes (\mathbf{F}_{1i} \mathbf{H}_{2k}^{(ij)} \mathbf{F}_{1j})) + ((\mathbf{e}_j^* \mathbf{e}_i^H) \otimes (\mathbf{F}_{1j} \mathbf{H}_{2k}^{(ij)H} \mathbf{F}_{1i}^*)) \mathbf{\Pi}_2) \\ - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^D ((\mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_i^T \mathbf{h}_k^{(i)*} \mathbf{e}_i^T) \otimes \mathbf{F}_{2i} + (\mathbf{e}_i^* \mathbf{h}_k^{(i)T} \mathbf{e}_i^* \mathbf{e}_i^T) \otimes \mathbf{F}_{2i}) \\ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^D ((\mathbf{F}_{2i}^* \mathbf{h}_k^{(i)*} \mathbf{e}_i^T) \otimes (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H) + (\mathbf{e}_i^* \mathbf{h}_k^{(i)T} \mathbf{F}_{2i}^*) \otimes (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^H)) \end{cases} \quad (21)$$

其中 $\mathbf{\Pi}_2$ 满足等式 $\operatorname{vec}(\tilde{\mathbf{R}}_x^{(1)T}) = \mathbf{\Pi}_2 \cdot \operatorname{vec}(\tilde{\mathbf{R}}_x^{(1)})$.

3.5 方位估计的统计特性

3.5.1 阵列流形失配

阵列模型误差大都是指阵列流形上的扰动误差, 无论哪一种形式, 它们对阵列方向矩阵的影响都可以等效为加性扰动. 不妨将方向矩阵扰动量 $\tilde{\mathbf{A}}$ 按列分块表示为 $\tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{\mathbf{a}}_1 \tilde{\mathbf{a}}_2 \cdots \tilde{\mathbf{a}}_D]$, 为了便于下文的理论分析, 这里假设 $\tilde{\mathbf{a}}_k$ 服从零均值复圆高斯分布, 并且满足

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{a}}_k \tilde{\mathbf{a}}_l^H] = \delta_{kl} \sigma_a^2 \mathbf{I}_M \\ \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{a}}_k \tilde{\mathbf{a}}_l^T] = \mathbf{O}_M \end{cases} \quad (22)$$

式中 δ_{kl} 表示 delta 函数, 若 $k = l$, 则取 1, 否则取 0. 首先, 根据式(7)中第一式可得

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}_x^{(1)} &= ((\mathbf{A}^* \mathbf{R}_s^*) \otimes \mathbf{I}_M) \tilde{\mathbf{a}} + (\mathbf{I}_M \otimes (\mathbf{A} \mathbf{R}_s)) \mathbf{\Pi}_1 \tilde{\mathbf{a}}^* \\ &= \mathbf{P}_1 \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{P}_2 \tilde{\mathbf{a}}^* \end{aligned} \quad (23)$$

式中 $\tilde{\mathbf{a}} = \operatorname{vec}(\tilde{\mathbf{A}})$, $\mathbf{P}_1 = (\mathbf{A}^* \mathbf{R}_s^*) \otimes \mathbf{I}_M$, $\mathbf{P}_2 = (\mathbf{I}_M \otimes (\mathbf{A} \mathbf{R}_s)) \mathbf{\Pi}_1$, 将式(23)代入式(20)中第一式可得

$$\tilde{\theta}_k^{(1)} = \boldsymbol{\tau}_k^H \mathbf{r}_x^{(1)} = \boldsymbol{\tau}_k^H \mathbf{P}_1 \tilde{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\tau}_k^H \mathbf{P}_2 \tilde{\mathbf{a}}^* \quad (24)$$

再结合式(22)可知一阶分析方法给出的方位估计均方误差为

$$\mathbb{E}[\tilde{\theta}_k^{(1)2}] = \mathbb{E}[(\boldsymbol{\tau}_k^H \mathbf{r}_x^{(1)})^2] = \sigma_a^2 \boldsymbol{\tau}_k^H (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2^T + \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1^T) \boldsymbol{\tau}_k^* \quad (25)$$

接着, 根据式(7)中第二式可得

$$\tilde{\mathbf{r}}_x^{(2)} = \mathbf{P}_1 \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{P}_2 \tilde{\mathbf{a}}^* + \operatorname{vec}(\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{R}_s \tilde{\mathbf{A}}^H) = \mathbf{P}_1 \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{P}_2 \tilde{\mathbf{a}}^* + \tilde{\mathbf{d}} \quad (26)$$

式中 $\tilde{\mathbf{d}} = \operatorname{vec}(\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{R}_s \tilde{\mathbf{A}}^H)$, 显然 $\tilde{\mathbf{d}}$ 是关于扰动向量 $\tilde{\mathbf{a}}$ 的二次函数, 将式(26)代入式(20)中第二式可得

$$\tilde{\theta}_k^{(2)} = \tilde{\theta}_k^{(1)} + \boldsymbol{\tau}_k^H \tilde{\mathbf{d}} + \tilde{\mathbf{r}}_x^{(1)H} \boldsymbol{\Omega}_k \tilde{\mathbf{r}}_x^{(1)} \quad (27)$$

显然, 式(27)右边第一项 $\tilde{\theta}_k^{(1)}$ 是扰动向量 $\tilde{\mathbf{a}}$ 的线性函数, 第二项 $\boldsymbol{\tau}_k^H \tilde{\mathbf{d}}$ 和第三项 $\tilde{\mathbf{r}}_x^{(1)H} \boldsymbol{\Omega}_k \tilde{\mathbf{r}}_x^{(1)}$ 均为扰动向量 $\tilde{\mathbf{a}}$ 的

二次函数, 根据零均值高斯变量的奇数阶矩为零这一性质可知二阶分析方法给出的方位估计均方误差为

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{\theta}_k^{(2)2}] &= \mathbb{E}[\tilde{\theta}_k^{(1)2}] + \sigma_a^4 (\operatorname{tr}^2(\boldsymbol{\Gamma}_k) \operatorname{tr}^2(\mathbf{R}_s) + \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Gamma}_k^2) \operatorname{tr}(\mathbf{R}_s^2) \\ &+ \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Gamma}_k) \operatorname{tr}(\mathbf{R}_s) \operatorname{tr}(2\bar{\mathbf{P}}_k^{(11)} + 2\bar{\mathbf{P}}_k^{(22)}) \\ &+ \operatorname{tr}(2\mathbf{\Pi}_1^H (\boldsymbol{\Gamma}_k^* \otimes \mathbf{R}_s) \mathbf{\Pi}_1 (\bar{\mathbf{P}}_k^{(11)*} + \bar{\mathbf{P}}_k^{(22)})) \\ &+ \sigma_a^4 (\operatorname{tr}^2(\bar{\mathbf{P}}_k^{(11)} + \bar{\mathbf{P}}_k^{(22)}) + \operatorname{tr}(\bar{\mathbf{P}}_k^{(11)2} + \bar{\mathbf{P}}_k^{(22)2} \\ &+ 2\bar{\mathbf{P}}_k^{(11)} \bar{\mathbf{P}}_k^{(22)*} + 2\bar{\mathbf{P}}_k^{(21)} \bar{\mathbf{P}}_k^{(21)*} + 2\bar{\mathbf{P}}_k^{(21)} \bar{\mathbf{P}}_k^{(12)}) \end{aligned} \quad (28)$$

式中 $\bar{\mathbf{P}}_k^{(ij)} = \mathbf{P}_i^H \boldsymbol{\Omega}_k \mathbf{P}_j$, $\boldsymbol{\Gamma}_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^D (\mathbf{F}_{1i} \mathbf{h}_k^{(i)} \mathbf{e}_i^H + \mathbf{e}_i \mathbf{h}_k^{(i)H} \mathbf{F}_{1i})$, 它满足性质 $\boldsymbol{\tau}_k = \operatorname{vec}(\boldsymbol{\Gamma}_k)$.

3.5.2 噪声模型失配

在阵列信号处理研究中, 通常将阵列噪声假设为等功率且空域独立高斯噪声, 这种假设过于理想, 实际噪声模型可能空域相关^[8]. 这里将阵列噪声设为等功率空域相关的高斯噪声(即空域色噪声), 于是 $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ 为对角元素为零的 Hermite 阵. 类似文献[8], 这里假设 $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ 对角线以上(下)元素服从零均值复圆高斯分布, 并满足

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{ij} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{ij}^*] = \mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{ij} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{ji}] = \sigma_{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}}^2 \\ \mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{ij}^2] = \mathbb{E}[\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{ij} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{kl}] = 0 \\ (i < j) \cap (k < l) \cap (i \neq k \text{ 或 } j \neq l) \end{cases} \quad (29)$$

式中 $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{ij}$ 是指 $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ 中的第 i 行、第 j 列元素, 于是有

$$\tilde{\mathbf{r}}_x^{(1)} = \tilde{\mathbf{r}}_x^{(2)} = \operatorname{vec}(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}) = \mathbf{Q}_1 \tilde{\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{Q}_2 \tilde{\boldsymbol{\mu}}^* \quad (30)$$

式中 $\tilde{\boldsymbol{\mu}} \in \mathbf{C}^{M(M-1)/2 \times 1}$ 表示由 $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ 的对角线下方元素构成的列向量, 并且按照列的顺序堆栈放置, 即有

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = [\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{21} \quad \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{31} \quad \cdots \quad \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{M1} \quad \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{32} \quad \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{42} \quad \cdots \quad \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{M2} \quad \cdots \\ \cdots \quad \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{M-1, M-2} \quad \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{M, M-2} \quad \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{M, M-1}]^T \quad (31)$$

而 $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathbf{R}^{M^2 \times M(M-1)/2}$ 为 0-1 矩阵, 每一列只有一个 1 元素, 其中 \mathbf{Q}_1 第 k 列将“1”放在第 $k + i(i+1)/2$ 行,

Q_2 第 k 列将“1”放在第 $kM + i(i+1)M/2 + i - (i-1)M^2 - M$ 行, 这里 i 满足 $(i-1)M - i(i-1)/2 + 1 \leq k \leq iM - i(i+1)/2$ 且属于区间 $[1, M-1]$ 的正整数. 将式(30)代入式(20)中第一式可得

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_k^{(1)} &= \tau_k^H \tilde{r}_x^{(1)} \\ &= \tau_k^H Q_1 \tilde{\mu} + \tau_k^H Q_2 \tilde{\mu}^* \end{aligned} \quad (32)$$

再结合式(29)可知一阶分析方法给出的方位估计均方误差为

$$\begin{aligned} E[\hat{\theta}_k^{(1)2}] &= E[(\tau_k^H \tilde{r}_x^{(1)})^2] \\ &= \sigma_\Sigma^2 (\tau_k^H Q_1 Q_2^T \tau_k^* + \tau_k^H Q_2 Q_1^T \tau_k^*) \end{aligned} \quad (33)$$

接着, 将式(30)代入式(20)中第二式可得

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_k^{(2)} &= \tau_k^H \tilde{r}_x^{(2)} + \tilde{r}_x^{(1)H} \Omega_k \tilde{r}_x^{(1)} \\ &= \hat{\theta}_k^{(1)} + \tilde{r}_x^{(1)H} \Omega_k \tilde{r}_x^{(1)} \end{aligned} \quad (34)$$

显然, 式(34)右边第一项 $\hat{\theta}_k^{(1)}$ 是扰动向量 $\tilde{\mu}$ 的线性函数, 第二项 $\tilde{r}_x^{(1)H} \Omega_k \tilde{r}_x^{(1)}$ 是扰动向量 $\tilde{\mu}$ 的二次函数, 根据零均值高斯随机变量的奇数阶矩为零这一性质可知二阶分析方法给出的方位估计均方误差为

$$\begin{aligned} E[\hat{\theta}_k^{(2)2}] &= E[\hat{\theta}_k^{(1)2}] + \sigma_a^4 (\text{tr}(\overline{Q}_k^{(11)} + \overline{Q}_k^{(22)}) \\ &\quad + \text{tr}(\overline{Q}_k^{(11)2} + \overline{Q}_k^{(22)2} + 2\overline{Q}_k^{(11)}\overline{Q}_k^{(22)*} \\ &\quad + 2\overline{Q}_k^{(21)}\overline{Q}_k^{(21)*} + 2\overline{Q}_k^{(21)}\overline{Q}_k^{(12)}) \end{aligned} \quad (35)$$

式中 $\overline{Q}_k^{(ij)} = Q_i^H \Omega_k Q_j$.

4 数值实验

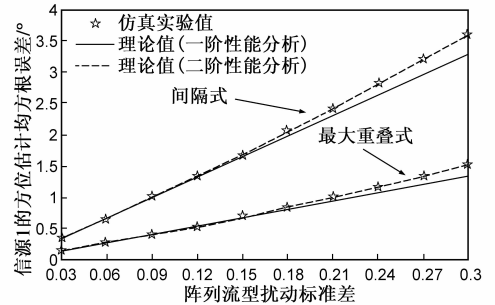
说明:(1)由于本文并未考虑有限采样影响, 因此阵列协方差阵直接由其渐近表达式产生(噪声功率 σ_n^2 设为 1); (2)图中“间隔式”指图 1 中第一种子阵列构造方式, “最大重叠式”指图 1 中第二种子阵列构造方式, 并且 m 取 $M-1$; (3)信源方位指与线阵法线夹角.

首先针对阵列流形失配的情况进行数值实验. 假设阵列流形为 8 元均匀线阵, 相邻阵元间距与波长比为 0.5, 现有两个独立等功率信源到达该阵列, 信噪比为 10dB, 信源方位分别为 30° (信源 1)和 44° (信源 2), 图 2 给出了 ESPRIT 算法的均方根误差随着阵列流形扰动标准差 σ_a 的变化曲线.

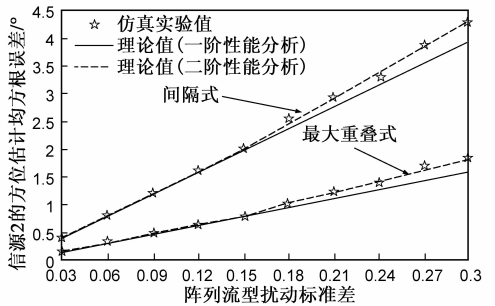
接着针对噪声模型失配的情况进行数值实验. 假设阵列流形为 8 元均匀线阵, 相邻阵元间距与波长比为 0.5, 现有两个独立等功率信源到达该阵列, 信噪比为 10dB, 信源方位分别为 20° (信源 1)和 30° (信源 2), 图 3 给出了 ESPRIT 算法的均方根误差随着噪声模型扰动标准差 σ_Σ 的变化曲线.

从图 2 和图 3 中可以得到如下结论:(1)二阶性能分析方法的理论值和仿真实验值基本都能够较好地吻合, 从而验证文中理论推导的有效性;(2)随着阵列模型扰动标准差的增大, 二阶分析方法的性能预测精度要逐渐高于一阶分析方法;(3)“最大重叠式”的方位估

计性能要明显高于“间隔式”的方位估计性能, 因此子阵列的构造方式对于 ESPRIT 算法的性能会产生较大影响. 此外, 由式(5)可知, 对于“重叠式”的子阵列构造方式, 其选择矩阵存在多种形式, 并且主要由子阵间距 Δ 和 m_s 所决定, 而上述“最大重叠式”的选择矩阵构造方式也仅仅是其中的一种, 其性能未必是最优的, 下面将通过数值实验进一步分析选择矩阵中的可变参数对 ESPRIT 算法性能的影响.

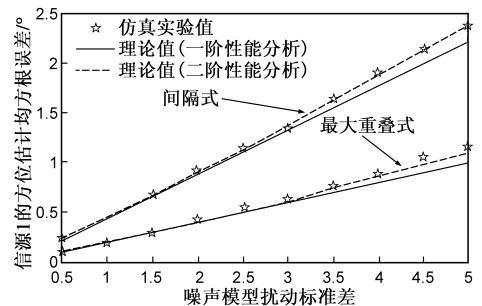


(a) 信源1的方位估计均方根误差

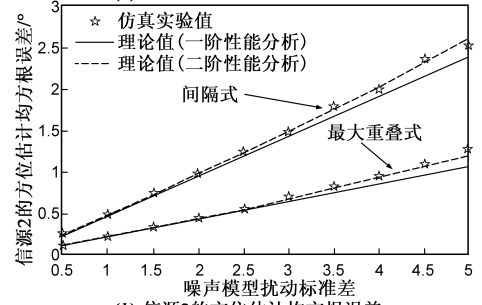


(b) 信源2的方位估计均方根误差

图2 方位估计均方根误差随着扰动标准差的变化曲线



(a) 信源1的方位估计均方根误差



(b) 信源2的方位估计均方根误差

图3 方位估计均方根误差随着扰动标准差的变化曲线

限于篇幅,下面仅针对阵列流形失配的情况进行数值实验.实验条件与前面的实验基本类似,只是将阵元个数设为 20,信源方位分别为 30° (信源 1) 和 40° (信源 2),并将 σ_a 设为 0.2,图 4 给出了 ESPRIT 算法的均方根误差随着子阵间距 Δ 和 m_s 的变化曲面.

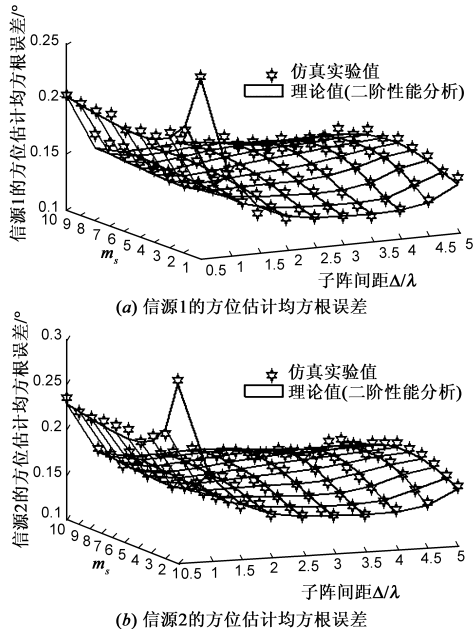


图4 方位估计均方根误差随着子阵间距 Δ 和 m_s 的变化曲面

从图 4 中可以看出,无论是子阵间距 Δ 还是 m_s ,它们都能够对 ESPRIT 算法的性能产生一定影响,尽管从中很难得到十分规律性的结论,但仍可以看出一些潜在规律:(1) m_s 在子阵间距 Δ 为半波长的情况下(即最大重叠式),对 ESPRIT 算法性能的影响最大,并且针对不同的子阵间距 Δ ,随着 m_s 的增加,ESPRIT 算法性能的变化趋势也并不相同,一般而言,在小间距条件下,ESPRIT 算法的均方误差是先减少后增加(或趋于平稳),而在大间距条件下,ESPRIT 算法的性能是先增加后减少(或趋于平稳);(2)子阵间距 Δ 在 m_s 取 1 的情况下,对 ESPRIT 算法性能的影响最大,并且此时随着子阵间距 Δ 的增加,ESPRIT 算法的均方误差是先快速减少再缓慢增加.

5 结束语

本文针对阵列模型误差的影响,对 ESPRIT 算法的方位估计性能进行二阶理论分析,其性能分析中的每个环节都采用二阶分析方法,因此能够在误差扰动较大的情况下提高性能预测精度.数值实验表明二阶分析方法的性能预测值与仿真实验值吻合地较好,并且其性能预测精度要高于二阶方法(尤其是在大阵列模型误差的条件下).需要指出,文中的二阶性能分析方

法可推广应用于任意可施行 ESPRIT 算法的阵形,其具体方法可在今后的工作中讨论.

参考文献

- [1] ROY R, KAILATH T. ESPRIT—estimation of signal parameters via rotational invariance techniques [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1989, 37(7): 984–995.
- [2] 肖维民,彭应宁.两种快速 ESPRIT 算法[J].电子学报, 1995, 23(7): 102–104.
XIAO Wei-min, PENG Ying-ning. Two fast ESPRIT algorithm [J]. Acta Electronica Sinica, 1995, 23(7): 102–104. (in Chinese)
- [3] STOICA P, NEHORAI A. Performance comparison of subspace rotation and MUSIC methods for direction estimation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1991, 39(2): 446–453.
- [4] OTTERSTEN B, VIBERG M, KAILATH T. Performance analysis of the total least squares ESPRIT algorithm [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1991, 39(5): 1122–1135.
- [5] LI F, VACCARO R J, TUFTS D W. Performance analysis of the state-space realization (TAM) and ESPRIT algorithms for DOA estimation [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1991, 39(3): 418–423.
- [6] LI F, LIU H, VACCARO R J. Performance analysis for DOA estimation algorithms: unification, simplification and observations [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1993, 29(4): 1170–1184.
- [7] SWINDLEHURST A, KAILATH T. On the sensitivity of the ESPRIT algorithm to non-identical subarrays [J]. Sadhana, 1990, 15(3): 197–212.
- [8] SWINDLEHURST A, KAILATH T. A performance analysis of subspace-based methods in the presence of model errors: part II—multidimensional algorithms [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1993, 41(9): 2882–2890.
- [9] SOON V C, HUANG Y F. An analysis of ESPRIT under random sensor uncertainties [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40(9): 2353–2358.
- [10] LI F, LU Y. Bias analysis for ESPRIT-type estimation algorithms [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1994, 42(3): 418–423.
- [11] FERRÉOL A, LARZABAL P, VIBERG M. On the asymptotic performance analysis of subspace DOA estimation in the presence of modeling errors: case of MUSIC [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(3): 907–920.
- [12] FERRÉOL A, LARZABAL P, VIBERG M. On the resolution probability of MUSIC in presence of modeling errors [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(5): 1945–1953.

[13] FERRÉOL A, LARZABAL P, VIBERG M. Statistical analysis of the MUSIC algorithm in the presence of modeling errors: taking into account the resolution probability [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(8): 4156 – 4166.

[14] FERRÉOL A, LARZABAL P, VIBERG M. Performance prediction of maximum-likelihood direction-of-arrival estimation in the presence of modeling errors [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(10): 4785 – 4793.

作者简介



王 鼎 男, 1982 年生于安徽芜湖, 博士, 信息工程大学讲师, 感兴趣的研究方向: 现代信号处理.

E-mail: wang_ding814@yahoo.com.cn



姚 晖 男, 1985 年生于江西上饶, 现为信息工程大学博士研究生, 感兴趣的研究方向: 阵列信号处理.

E-mail: yaohui56@sina.com

吴 瑛 女, 1960 年生于河南郑州, 信息工程大学教授, 博士生导师, 感兴趣的研究方向: 现代信号处理.

E-mail: hnwuying22@163.com