

# 仿射不变的中心投影

杨建伟, 蓝如师

(南京信息工程大学数学与统计学院, 江苏南京 210044)

**摘要:** 考虑将区域和轮廓类不变特征提取算法结合: 利用中心投影将目标转化为闭曲线, 对闭曲线运用轮廓类方法提取不变特征. 证明了图像经中心投影所得闭曲线保持仿射变换的结论. 介绍了一种利用小波变换进行仿射不变特征提取的算法. 对一些汉字、26 个大写英文字母等的实验结果表明结论的有效性, 与传统方法相比该算法对噪声具有较强的鲁棒性.

**关键词:** 中心投影; 仿射不变; 广义轮廓; 小波变换

**中图分类号:** TP391.4      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2012)11-2315-05

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.11.027

## Affine Invariance of Central Projection Transformation

YANG Jian-wei, LAN Ru-shi

(College of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing, Jiangsu 210044, China)

**Abstract:** A method is proposed by combining contour-based methods with region-based methods. A closed contour is derived from the object by central projection transformation, and invariant features are extracted from this closed contour. The affine invariance of the closed curve derived by central projection transformation has been proved. An algorithm is provided to extract affine invariant features by employing stationary wavelet transform. Some Chinese characters and 26 capital letters are used to evaluate the proposed method. Experimental results show that the proposed method can efficiently extract invariant features. Compared to traditional methods, the proposed method is robust to noise.

**Key words:** central projection transformation; affine invariance; general contour; stationary wavelet transform

### 1 引言

仿射不变特征提取已广泛用于图像检索、配准和目标识别等领域. 现有算法可分局部和全局两类, 它们各有优缺点<sup>[1]</sup>, 本文考虑全局仿射不变的特征提取算法.

全局不变的特征提取算法大体分为两类: 轮廓类和区域类<sup>[2]</sup>. 轮廓类算法<sup>[3-5]</sup>只利用目标轮廓, 计算量小且易实现, 但一般不适于多部分组成的目标(如汉字“海”); 而区域类算法主要有 Hu 矩<sup>[6]</sup>、仿射不变矩 (AMIs)<sup>[7,8]</sup>、多尺度自卷积 (MSA)<sup>[9]</sup>等, 这类算法利用图像上所有像素, 提取的不变量更能反映图像特性, 但计算量大且对背景噪声敏感<sup>[9]</sup>.

本文考虑将区域和轮廓类算法结合: 利用中心投影将目标转化为闭曲线, 对闭曲线运用轮廓类方法提取仿射不变特征. 中心投影是由 Tang 等<sup>[10,11]</sup>提出的, 他们将中心投影所得闭曲线展开, 并将展开曲线的分形维数作为不变特征. 本文直接利用所得闭曲线提取特征, 证明

了目标广义轮廓和仿射变换后目标的广义轮廓具有相同的仿射变换关系. Tang 等<sup>[10,11]</sup>仅考虑旋转不变特征的提取, 本文考虑提取仿射不变特征, 旋转仅是仿射变换的特例. 也介绍了一种利用小波变换进行仿射不变特征提取的算法, 实验验证了前述结论的有效性.

### 2 中心投影变换

以定义在区域  $D$  上的二值图像  $I(x, y)$  ( $D_0 \subset D$ ) 为待识别对象:

$$I(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D_0 \\ 0, & (x, y) \notin D_0 \end{cases} \quad (1)$$

设目标区的质心为  $M(x_0, y_0)$ . 目标区中各像素与质心  $M$  的最大距离为:  $L = \max_{(x, y) \in D_0} |N(x, y) - M(x_0, y_0)|$ , 这里  $|N(x, y) - M(x_0, y_0)|$  表点  $N \in D_0$  和质心  $M$  的欧几里德距离. 进一步, 以  $M$  点为坐标原点, 将原直角坐标系转化为极坐标系:  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ , 其中  $r \in [0, L]$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ . 记  $G(r, \theta)$  为原图像在极坐标下的表示.

**定义 1** 对任意角  $\theta$ , 计算如下积分:

$$f(\theta) = \int_0^L G(r, \theta) dr \quad (2)$$

称上式定义的变换为中心投影.  $\{(\theta, f(\theta)) | \theta \in [0, 2\pi]\}$  是一条闭曲线, 称该闭曲线为目标  $I(x, y)$  的广义轮廓, 记为  $\partial I$ .

实际中, 一些目标往往由多部分组成(如汉字“海”), 一般的轮廓类方法无法直接应用, 而中心投影可从任何目标中抽取广义轮廓. 如图 1(a) 的英文字母“A”图像中间有空洞, 而图 1(b) 是由几部分构成的中文字符“海”. 图 1(c) 和 (d) 给出了图 1(a)、(b) 的广义轮廓. 可见中心投影将任何目标转化为一闭曲线, 从而可利用轮廓类方法提取不变特征.

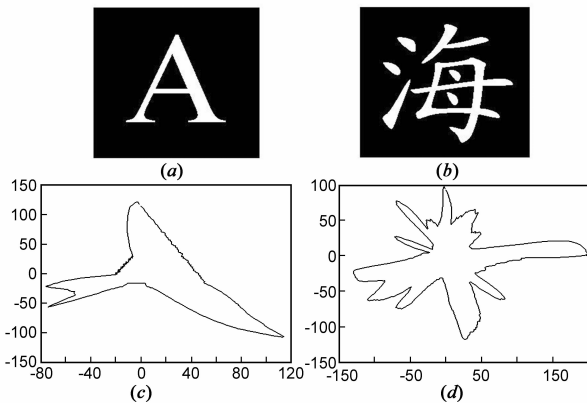


图1 图像及其广义轮廓:(c)、(d)分别为字母“A”、汉字“海”的广义轮廓

类似文献[12]的讨论, 可证明广义轮廓对 0 均值加性噪声具有较强的鲁棒性.

值得指出的是不同目标可能具有相同的广义轮廓, 如图 2(a)、(b) 两不同形状的广义轮廓几乎相同(如图 2(c)、(d) 示). 尽管如此, 中心投影可将目标内部的

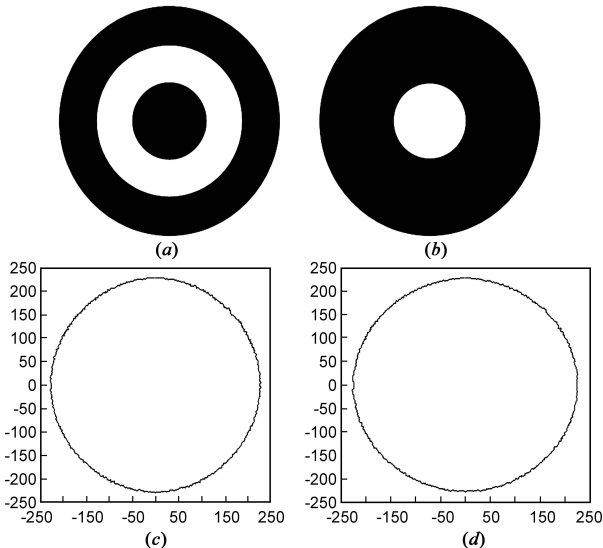


图2 形状及其广义轮廓:(c)、(d)分别为图(a)、(b)的广义轮廓

一些形状信息保留在广义轮廓上, 实验也表明利用中心投影可有效提取不变特征.

### 3 仿射不变的中心投影

**定义 2** 仿射变换由下式给出:

$$x' = Ax + b, \quad x \in R^2 \quad (3)$$

这里  $b = (b_1, b_2)^T \in R^2$  且  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  是一非奇异实矩阵.

式(3)中,  $b$  为平移因子. 选不同的  $A$ , 可实现目标的旋转、尺度和斜切变换. 旋转仅是仿射变换的特例.

**定理 1** 设两个目标  $F$  和  $F'$  满足仿射变换关系  $A$ :

$$F' = \{x' | x' = Ax + b, x \in F\} \quad (4)$$

则  $F$  和  $F'$  的广义轮廓  $\partial F$  和  $\partial F'$  满足同样的仿射变换关系  $A$ :

$$\partial F' = \{x' | x' = Ax + b, x \in \partial F\} \quad (5)$$

**证明** 平移  $b$  可通过将原点移到质心而消除, 因此假设  $b = 0$ . 若由目标  $F$  质心出发的所有射线与  $F$  的边界只有一个交点, 显然  $\partial F$  和  $\partial F'$  具有同样的仿射变换关系. 下面考虑目标  $F$  由质心出发的射线中存在与其边界交点不止一个的情况. 不失一般性, 假设  $F$  和  $F'$  由两部分组成(如图 3 示), 其它情况可类似说明.

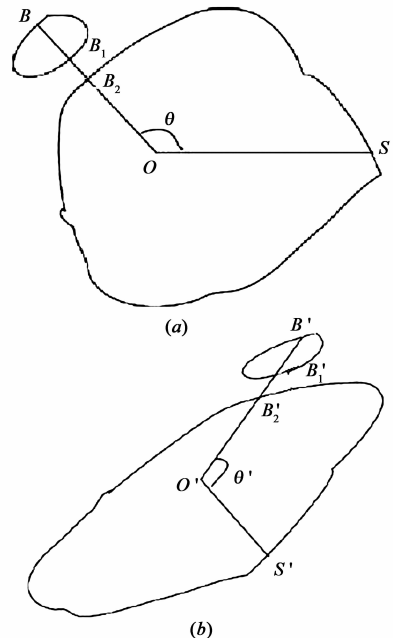


图3 由多部分组成的目标及其仿射变换形式

图 3 中,  $O, O'$  分别表示  $F$  和  $F'$  的质心.  $S$  是  $F$  边界上的一点, 而  $S'$  是  $F'$  上对应的点, 则  $S' = AS$ . 假设  $B_1(x_1, y_1), B_2(x_2, y_2), B(x_3, y_3)$  是与  $OS$  夹角为  $\theta$  的极径上三点,  $B_2$  是  $F$  一个部分边界上的点, 而  $B_1, B$  是  $F$  另一部分边界上的点, 有  $\begin{cases} x_i = r_i \cos \theta \\ y_i = r_i \sin \theta \end{cases}$ , 其中  $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ ,

$$\cos\theta = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}, \sin\theta = \frac{y_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}}, i = 1, 2, 3.$$

假设  $\tilde{B}(x, y)$  是目标  $F$  的广义轮廓上同一角度  $\theta$

的投影点,  $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ , 那么  $r = r_3 - r_1 + r_2$ . 显然,

$$\begin{cases} x = (r_3 - r_1 + r_2)\cos\theta \\ y = (r_3 - r_1 + r_2)\sin\theta \end{cases}, \text{可写成}$$

$$\tilde{B} = B - B_1 + B_2 \quad (6)$$

假设  $F'$  上  $B'(x'_3, y'_3), B'_1(x'_1, y'_1), B'_2(x'_2, y'_2)$  三点对应于  $F$  上点  $B, B_1, B_2$ , 那么

$$\begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (7)$$

令  $\begin{cases} x'_i = r'_i \cos\theta' \\ y'_i = r'_i \sin\theta' \end{cases}$ , 这里  $r'_i = \sqrt{x_i'^2 + y_i'^2}$ ,

$$\cos\theta' = \frac{x'_i}{\sqrt{x_i'^2 + y_i'^2}}, \sin\theta' = \frac{y'_i}{\sqrt{x_i'^2 + y_i'^2}}, i = 1, 2, 3, \theta'$$
 是直线

$B'_2, B'_1, B'$  与  $O'S'$  的夹角. 设沿角度  $\theta'$  广义轮廓上的点为  $\tilde{B}'(x', y')$ , 则

$$\tilde{B}' = B' - B'_1 + B'_2 \quad (8)$$

由式(6)、(7)、(8)得:  $\tilde{B}' = A(B - B_1 + B_2) = A\tilde{B}$ , 证毕.

该定理说明仿射变换后目标的广义轮廓可由原目标广义轮廓经同样仿射变换得到. 因此, 要判断图像  $\Theta$  与  $F$  之间是否存在仿射变换, 可考察  $\Theta$  与  $F$  的广义轮廓  $\partial\Theta$  和  $\partial F$  之间是否存在仿射变换, 进而利用轮廓类方法提取仿射不变特征.

## 4 基于中心投影的仿射不变特征提取

本文对由中心投影所得的广义轮廓进行平稳小波变换以提取仿射不变特征.

### 4.1 轮廓参数化

仿射变换前后广义轮廓上点的位置可能改变, 为此需对广义轮廓参数化, 以建立原广义轮廓和变换后广义轮廓间的一一对应关系. 本文采用文献[13]中被称为 EAN 的参数化方法(详见文献[13]).

### 4.2 仿射不变特征提取

采用不同尺度下小波变换的细节信号来提取仿射不变特征. 令  $[x(\sigma), y(\sigma)]$  表目标  $F_1$  参数化后的广义轮廓,  $[\tilde{x}(\tilde{\sigma}), \tilde{y}(\tilde{\sigma})]$  表  $F_1$  经仿射变换并参数化的广义轮廓, 对两轮廓进行平稳小波变换<sup>[5]</sup>:

$$\begin{cases} W_{\tilde{x}}(\tilde{\sigma}) = a_{11} W_{jx}(\sigma) + a_{12} W_{jy}(\sigma) \\ W_{\tilde{y}}(\tilde{\sigma}) = a_{21} W_{jx}(\sigma) + a_{22} W_{jy}(\sigma) \end{cases}$$

这里  $W$  表小波变换算子, 令:

$$S(i, j, \sigma) = W_{jx}(\sigma) W_{jy}(\sigma) - W_{jy}(\sigma) W_{jx}(\sigma),$$

$$\tilde{S}(i, j, \tilde{\sigma}) = W_{\tilde{jx}}(\tilde{\sigma}) W_{\tilde{jy}}(\tilde{\sigma}) - W_{\tilde{jy}}(\tilde{\sigma}) W_{\tilde{jx}}(\tilde{\sigma})$$

则  $\tilde{S}(i, j, \tilde{\sigma}) = \det(A) S(i, j, \sigma)$  ( $\det$  表行列式). 令

$$I(i, j, \sigma) = \frac{S(i, j, \sigma)}{\|S(i, j, \sigma)\|} \quad (9)$$

可证  $I(i, j, \sigma)$  仿射不变, 称上式定义的不变量为 CPWDs(中心投影小波描绘子). 后文中也以 CPWDs 表示所提方法, 而广义轮廓参数化采用 256 个采样点, 平稳小波变换采用最后两层, 即式(9)中  $i$  取 7,  $j$  取 8.

### 4.3 相似性度量

对两个序列  $a_k, b_k$ , 采用相关系数来衡量它们的相似度<sup>[5]</sup>:

$$\text{Sim}(a_k, b_k) = \frac{\sum_k a_k b_{k-l}}{\sqrt{\sum_k a_k^2 \sum_k b_k^2}} \quad (10)$$

其中  $l$  为对序列  $b_k$  的平移. 相关系数不是平移不变的, 为此周期平移  $a_k$  或  $b_k$  中的一个, 取最大的那个相关系数作为序列  $a_k, b_k$  的相似度, 可消除由于小波变换引起的起始点问题.

## 5 实验结果

类似于文献[4], 采用如下矩阵生成仿射变换:

$$A = k \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中  $k \in \{0.8, 1.2\}$ ,  $\theta \in \{0, 72^\circ, \dots, 288^\circ\}$ ,  $b \in \{-1.5, -1, 0.5, 0, 0.5, 1, 1.5\}$ ,  $a \in \{1, 2\}$ , 从而试验中每幅图像产生 140 个不同图像. 识别率定义为:

$$\gamma = \frac{n_r}{N_t} \quad (12)$$

其中  $n_r$  为正确识别的图像数,  $N_t$  为测试图像总数. 后文中以文[7]中的 AMIs 和文[9]中的 MSA 作为比较对象, 分别采用 3 个 AMIs 及 29 个 MSA 不变量作为特征.

### 5.1 识别力测试

首先采用图 4(a) 中 10 个相似汉字作实验图像(用数 1 到 10 表示), 字体为楷体, 大小为  $128 \times 128$ . 图 4(b) 中图像由图 4(a) 中图像经仿射变换得到(用 test1, test2 等表示), 可发现即便是人眼也难以迅速识别一些变化较小的汉字. 对图 4(a)、(b) 中图像利用所提算法, 结果列在表 1, 可看出测试图像均被正确识别.

更进一步采用图 5 所示的 81 个汉字为测试图像. 字体为楷体, 大小为  $128 \times 128$ . 实验表明 CPWDs、MSA、AMIs 的识别率分别为 99.93%, 99.53%, 94.80%.

如前述, 不同目标可能具有相同的广义轮廓, 但实际中目标往往具有不同的广义轮廓. 图 6(a) 是图 4(a) 中前三个汉字的广义轮廓, 尽管这三个汉字非常相似, 它们的广义轮廓却有一些不同, 广义轮廓能保持原目标的特征. 图 6(b) 是提取的不变特征, 尽管它们整体变化趋势相似, 但在一些局部却是不同, 因此所提算法可

将它们区分。

表 1 图 4 中测试图像与各目标的相似度

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Test1	<b>0.9994</b>	0.9862	0.9943	0.8510	0.8522	0.9294	0.7734	0.7756	0.9644	0.7454
Test2	0.9904	<b>0.9996</b>	0.9917	0.7960	0.7778	0.8988	0.7526	0.7460	0.9612	0.7929
Test3	0.9938	0.9935	<b>0.9997</b>	0.8340	0.8162	0.9141	0.7538	0.7325	0.9457	0.7574
Test4	0.8581	0.8089	0.8532	<b>0.9991</b>	0.9466	0.9475	0.6854	0.6493	0.8223	0.8041
Test5	0.8537	0.7897	0.8363	0.9407	<b>0.9992</b>	0.8672	0.8227	0.8162	0.8255	0.6497
Test6	0.9177	0.8858	0.9091	0.9379	0.8708	<b>0.9996</b>	0.6567	0.6091	0.8865	0.8435
Test7	0.8000	0.7451	0.8080	0.7595	0.8742	0.7292	<b>0.9913</b>	0.9764	0.7928	0.3663
Test8	0.7945	0.7694	0.7559	0.6432	0.8096	0.6045	0.9933	<b>0.9977</b>	0.8269	0.3962
Test9	0.9617	0.9558	0.9366	0.7962	0.7978	0.8879	0.8163	0.8012	<b>0.9995</b>	0.7857
Test10	0.7776	0.8172	0.7711	0.7763	0.6312	0.8393	0.4073	0.3926	0.7986	<b>0.9981</b>

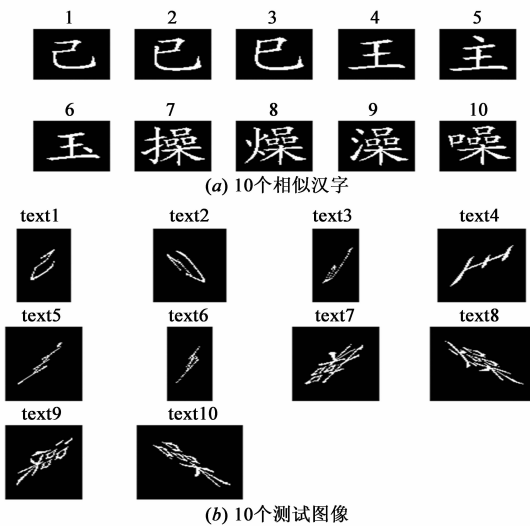


图 4 10 个汉字及其仿射变换



图 5 实验所用 81 个相似汉字

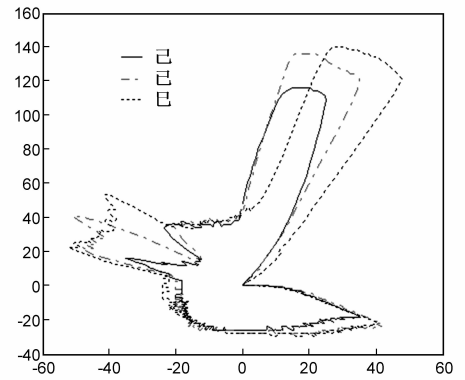
## 5.2 与 AMIs, MSA 方法比较

为测试算法对噪声的鲁棒性,对 26 个英文字符图像(Times Now Roman 字体)进行加噪实验.本实验中,每幅图像的大小为  $256 \times 256$ ,对每个字母如前所述 140 次变换.当没有噪声时,每种方法几乎都获得了 100% 的识别率.

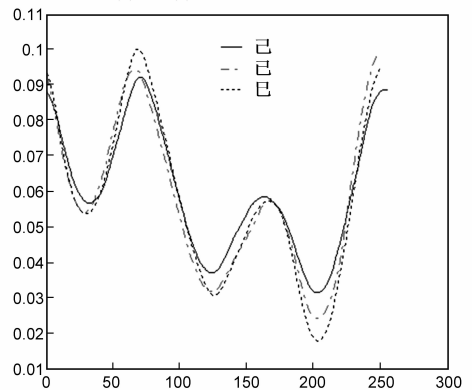
图 7 显示 AMIs, MSA 和 CPWDs 在不同强度椒盐噪声下的识别结果. AMIs 对背景噪声最敏感, MSA 的识别

率下降较 AMIs 缓慢.但当噪声强度为 0.015, MSA 的识别率为 81.68%, 比 CPWDs 低约 10 个百分点;当增加到 0.02 时, MSA 和 CPWDs 的识别率分别为 71.13% 和 87.55%;当增加至 0.03 时, CPWDs 的识别率依然接近 80%.

中心投影式(2)利用了积分运算,离散情况下就是沿极径方向像素的累加,类似于文献[12],可证明中心投影对加性的 0 均值噪声具有较强的鲁棒性,上面结果也验证了该结论.



(a) 图 4(a) 中前三个汉字的广义轮廓



(b) 图 4(a) 中前三个汉字提取的 CPWDs  
图 6 三个汉字的广义轮廓及其 CPWDs

## 6 结束语

考虑仿射不变的特征提取,采用中心投影将区域

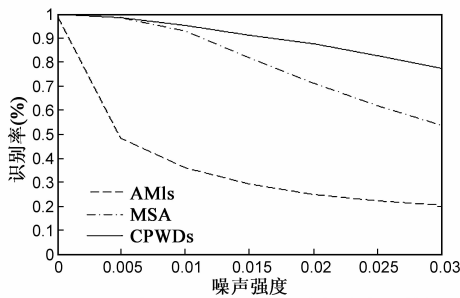


图7 AMIs,MSA和CPWDs在不同强度噪声下的识别率

类和轮廓类算法结合;证明了经仿射变换后图像的广义轮廓是原图像广义轮廓的仿射变换形式.理论和试验也可验证文中算法与 AMIs 有类似的计算复杂度,当图像尺寸较大时比 MSA 的计算量小很多.

本文仅讨论了二值图像,该方法可推广到灰度和彩色图像.

#### 参考文献

- [1] 黄波,赵继印,等.基于多尺度自卷积归一化直方图的仿射不变量模式识别[J].电子学报,2011,39(1):64-69.  
Huang Bo, Zhao Jiyin, et. al. Affine invariant pattern recognition based on multiscale autoconvolution normalized histograms [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(1): 64-69. (in Chinese)
- [2] Zhang D S, Lu G J. Review of shape representation and description techniques [J]. Pattern Recognition, 2004, 37(1): 1-19.
- [3] Arbter K, Snyder W E, Burkhardt H, Hirzinger G. Application of affine-invariant fourier descriptors to recognition of 3-D objects [J]. IEEE Trans on PAMI, 1990, 12(7): 640-647.
- [4] Khalil M I, Bayoumi M M. A dyadic wavelet affine invariant function for 2D shape recognition [J]. IEEE Trans on PAMI, 2001, 23(10): 1152-163.
- [5] Rube I E, Ahmed M, Kamel M. Wavelet approximation-based affine invariant shape representation functions [J]. IEEE Trans on PAMI, 2006, 28(2): 323-327.
- [6] Hu M K. Image analysis via the general theory of moments [J]. IRE Trans on Information Theory, 1962, 8(2): 179-187.
- [7] Flusser J, Suk T. Pattern recognition by affine moment invariants [J]. Pattern Recognition, 1993, 26(1): 167-174.

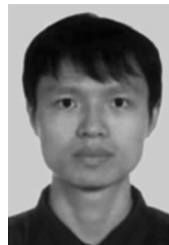
- [8] Suk T, Flusser J. Affine moment invariants generated by graph method [J]. Pattern Recognition, 2011, 44(9): 2047-2056.
- [9] Rahtu E, Salo M, Heikkila J. Affine invariant pattern recognition using multiscale autoconvolution [J]. IEEE Trans on PAMI, 2005, 27(6): 908-918.
- [10] Tang Y Y, Tao Y, Lam Ernest C M. New method for extraction based on fractal behavior [J]. Pattern Recognition, 2002, 35(5): 1071-1081.
- [11] Tao Y, Lam Ernest C M, Tang Y Y. Feature extraction using wavelet and fractal [J]. Pattern Recognition Letters, 2000, 22(3): 2527-2530.
- [12] Jafari-Khouzani K, Soltanian-Zadeh H. Rotation-invariant multiresolution texture analysis using radon and wavelet transforms [J]. IEEE Trans on Image Processing, 2005, 14(6): 783-795.
- [13] Yang M Q, Kpalma K, Ronsin J. Affine invariance contour descriptor based on the equal area normalization [J]. LAENG International Journal of Applied Mathematics, 2007, 36(2): 1-6.

#### 作者简介



杨建伟 男,1970年生于河南荥阳,1996年和2003年于西安交通大学分获硕士和博士学位,现任南京信息工程大学教授,研究方向为模式识别及数值计算.

E-mail: yjianw@hotmail.com



蓝如师 男,1986年生于广西河池,2011年于南京信息工程大学获硕士学位,现在南京信息工程大学攻读博士学位,研究方向为空间天气、图像处理和模式识别.

E-mail: lrs0106@yahoo.com