

一种基于高斯分布的光子传输模型建模方法

贾延玺, 姜守达

(哈尔滨工业大学自动化测试与控制系, 黑龙江哈尔滨 150001)

摘 要: 虚拟模型与真实设备混合的仿真实验系统对虚拟模型提出了明确的实时性要求. 现有的光子传输模型运行时间较长, 不适用于对实时性要求较高的仿真实验系统. 本文针对此问题, 利用光子的群体特性来描述光子在多层平板型介质中的传输过程, 采用高斯分布描述接收平面的光子, 通过总光子数量和 63.2% 能量半径的计算结果得到接收平面的光子分布. 实验结果表明, 在相同的仿真条件下, 本文方法与标准 Monte Carlo 光子传输模型相比变化趋势和数值基本吻合, 而运行速度提高, 可满足一般仿真实验系统的实时性要求.

关键词: 光子传输模型; Monte Carlo; 高斯假设; 多层平板型介质

中图分类号: TP399 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2012)10-2073-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.10.028

A Photon Transport Modeling Approach Based on Gaussian Distribution

JIA Yan-xi, JIANG Shou-da

(Automatic Test and Control Institute, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001, China)

Abstract: The mixture simulation system of virtual model and real equipment requests for clear real-time characteristics to the virtual model. The running time of existing photon transmission model is too long to meet the real-time requirement of simulation system. For this problem, we described the photon transmission in the multi-layer flat-type media utilizing its group characteristics, and the photons in the received plane using Gaussian distribution, then got the photon distribution in receiving plane according to the results of total numbers and 63.2% energy radius. Experimental results show that the trends and values of this method are basically consistent with the standard Monte Carlo photon transmission model in the same simulation conditions, and this method delivers a substantial increase in speed which can meet the real-time requirements of general simulation system.

Key words: Monte Carlo; Gaussian assumption; photon transmission model; multi-layer flat media

1 引言

光传输模型是数字化仿真实验系统中的一个重要组成部分. 在采用虚拟与真实设备相结合方式构建的系统中, 为了满足与真实设备进行数据交互的需要, 对光传输模型提出了明确的实时性要求^[1]. 光子传输模型是光传输模型的一个重要分支, 它是基于随机理论和光的粒子特性发展起来的一种用于描述光在介质中传输的建模方法, 其核心思想是通过大量光子包的随机运动过程进行统计计算, 得到求解区域内的物理量信息. 光子传输模型的优点是不需要任何附加的物理假设, 应用十分灵活. 缺点是如果要得到比较精确的结果, 需要对大量的光子进行统计计算, 进行一次模拟实验所花费的时间较长. 针对此缺点, 有学者根据 GPU 适用于并行计算的特点, 采用多个运算单元对光子的传输过程进行并行加速运算^[2,3], 使其运算时间大幅缩短, 但代价昂贵,

应用灵活性差. 文献[4]提出了一种结合扩散理论和 Monte Carlo 方法(以下简称为 MC 方法)混合的光子传输模型, 文献[5]采用有限的指数多项式拟合三角函数和对数函数, 这两种方法都在一定程度上提高了运算效率, 但还远远无法达到实时计算的程度. 光子传输模型运行效率较低的主要原因是重复计算大量光子的运动过程, 待所有光子的运动结束后, 通过光子分布计算相关的物理量. 本文针对此特点, 对多层平板型介质, 采用高斯分布描述接收平面的光子, 不计算光子的随机运动过程, 而是直接计算总光子数量和 63.2% 能量半径, 得到最终接收平面的光子分布.

2 光子高斯分布假设的依据

接收平面的光子符合高斯分布是本文方法的一个基本前提, 下面对 MC 方法的仿真结果进行分析, 讨论高斯分布的依据.

MC 方法是最为常见的模拟光子传输的手段之一,其仿真结果的正确性已经得到多方面的验证^[6~9].下面对该方法在多层平板型介质中的仿真结果进行分析.仿真条件设置为:光子数量为 10^6 ,路径长度为 10km,散射系数为 0.4km^{-1} ,吸收系数为 0.015km^{-1} .通过仿真得到不同圆环 $\Delta r = r_j - r_i$ 内的光子权重和.

在文献[10]中假设单程传输的光束在垂直于光轴的平面上呈高斯分布,并得到较好的实验结果.本文根据该思想,假设其径向光子分布呈高斯状,则在圆环 r_{i-1} 和 r_i 之间的光子数 ΔP_i 和半径 r_j 内的光子总数 P_i 为:

$$\begin{aligned}\Delta P_i &= P \exp\left(-\frac{r_i}{S}\right) / \sum_i \exp\left(-\frac{r_i}{S}\right) \\ P_i &= P \sum_{k=1}^i \exp\left(-\frac{r_k}{S}\right) / \sum_{i=1}^{N_{\text{sp}}} \exp\left(-\frac{r_i}{S}\right) \\ P &= \sum_{i=1}^N \text{Photon}(i) \cdot \text{weight}\end{aligned}\quad (1)$$

如图 1 所示,通过(1)计算得到的光子分布与 MC 方法的仿真结果吻合程度很好,因此认为通过高斯分布能够正确地表征在多层平板型介质中光子的分布状态.

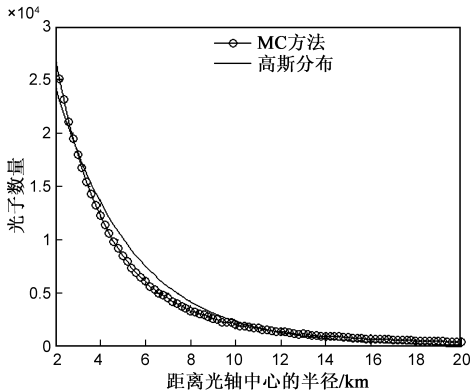


图1 MC方法仿真结果与高斯分布的 ΔP_i 对比

3 本文方法

图 2 为描述光子传输过程的示意图,在每一介质层面上,光子分布特性随着介质散射和吸收作用的影响而逐级发生改变.本文方法的核心思想是根据介质的层状分布,逐级计算每一层的相关变量,通过高斯分布假设得到最终的仿真结果.在本文方法中,由于是对光子的群体运动特性进行分析,并不讨论单一光子的运动过程,因

此认为每个光子权重为 1,仅以光子数量和分布描述接收平面的光场分布.

3.1 总光子数量计算

下面对 Z_1 、 Z_2 和 Z_3 层中的光子输运过程进行分析,并得到经不同次数散射后到达目标平面的光子数量计算公式, Z_n 代表第 n 层介质.

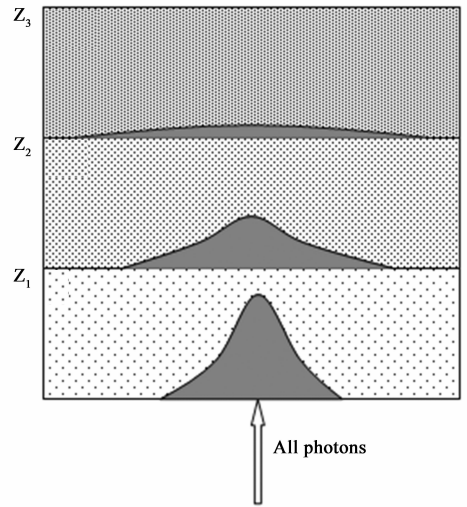


图2 顺次传输光强分布示意图

根据比尔朗伯定律,通过 Z_1 经衰减作用到达 Z_2 的光子数量为:

$$N_{0,1} = N_0 \exp[-\beta_1 \gamma_1 (Z_2 - Z_1)] \quad (2)$$

其中 N_0 表示初始的总光子数量, $N_{0,1}$ 如下标所示,表示在 Z_1 未经散射(0 阶散射,仅受衰减作用)的光子数量. β_1 表示 Z_1 的消光系数,单位为 km^{-1} , γ_1 表示相函数的前向峰值能量比,在第四节中介绍该参数的定义.

Z_2 中,前向散射的光子数量可表示为:

$$N_{1,2} = N_{0,1} \mu_2 \gamma_2 \alpha_2^2 (Z_3 - Z_2) \quad (3)$$

其中, μ_2 表示 Z_2 的散射系数,单位为 km^{-1} ; α_2 表示单次散射反照率. $\mu_2 \gamma_2 \alpha_2^2 (Z_3 - Z_2)$ 表示在 Z_2 介质层传输时,前向散射的光子数量占前一阶散射光子数量

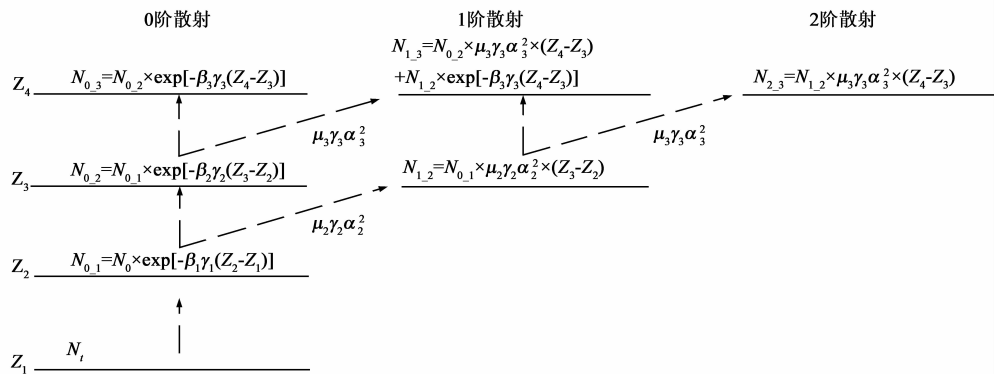


图3 在不同介质层上各阶散射光子数

的比例。 N_{1_2} 表示在 Z_2 层中一阶前向散射的光子数量。

Z_2 中一阶前向散射的光子,经衰减后到达 Z_3 层中,该部分光子一部分经衰减作用继续向前传输,另一部分经前向散射后,形成二阶散射光子:

$$N_{2_3} = N_{1_2} \times \mu_3 \gamma_3 \alpha_3^2 (Z_4 - Z_3) \quad (4)$$

其中 N_{2_3} 表示 Z_3 中二阶散射的光子数量.以上的传输过程如图3所示,依次类推可得到各阶散射光子数量的计算表达式.

0阶散射的光子数量为:

$$N_0 = N_t \prod_{n=1}^{N_{\text{medtotal}}} \exp[-\beta_n \gamma_n (Z_{n+1} - Z_n)] \quad (5)$$

1阶前向散射的光子数量为:

$$N_1 = N_0 \sum_{n=1}^{N_{\text{medtotal}}} [\mu_n \gamma_n \alpha_n^2 (Z_n - Z_{n-1})] \quad (6)$$

2阶前向散射的光子数量为:

$$N_2 = N_0 \sum_{n=1}^{N_{\text{medtotal}}} \sum_{m=n+1}^{N_{\text{medtotal}}} [\mu_n \gamma_n \alpha_n^2 (Z_{n+1} - Z_n)] \times [\mu_m \gamma_m \alpha_m^2 (Z_{m+1} - Z_m)] \quad (7)$$

3阶前向散射的光子数量为:

$$N_3 = N_0 \sum_{n=1}^{N_{\text{medtotal}}} \sum_{m=n+1}^{N_{\text{medtotal}}} \sum_{k=m+1}^{N_{\text{medtotal}}} [\mu_n \gamma_n \alpha_n^2 (Z_{n+1} - Z_n)] \times [\mu_m \gamma_m \alpha_m^2 (Z_{m+1} - Z_m)] \times [\mu_k \gamma_k \alpha_k^2 (Z_{k+1} - Z_k)] \quad (8)$$

其中 N_{medtotal} 为介质分层的总数.

更高阶散射的计算公式依次类推,因此到达目标

平面上的总光子数量为 $N_{\text{total}} = \sum_{i=0}^n N_i$;在计算时可根据不同的参数,选择适当的截止散射阶数 n 来得到满足精度要求的仿真结果.图4为传输距离为10km时各阶散射的光子数量,截止散射阶数为6即可满足仿真的精度要求(仿真参数在第五节中实验2给出).

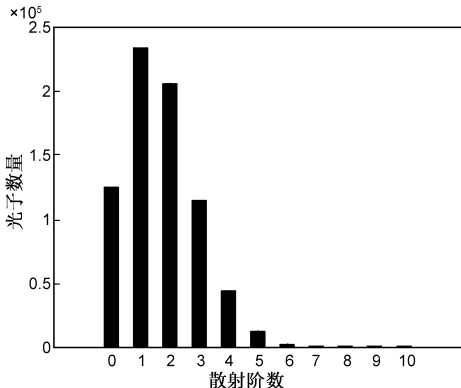


图4 各阶散射的光子数量

在仿真过程中,逐次计算各阶散射,当该阶散射的光子数量小于误差要求时即停止计算,得到总光子数.

3.2 63.2%能量半径计算

在计算63.2%能量半径 $\bar{S}$ 的过程中,需要计算每个介质层上的方位角 θ^2 的统计平均和光子径向位置与光子运动方向的协方差 $C^{\theta}(r)$.光子的方位角可以表示为 $\theta \sim (\theta_x, \theta_y)$, θ_x 和 θ_y 分别表示方位角的 x 轴分量和 y 轴分量.在光子运动过程中,随机变量的统计平均值按小角度近似的条件进行计算,即 $\sin(\theta) \simeq \theta$.

光子运动的几何定义如图5所示:

径向距离 S^2 可表示为:

$$S^2 = x^2 + y^2 \quad (9)$$

其微分可表示为:

$$\begin{aligned} dS^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= 2x\theta_x dZ + 2y\theta_y dZ \end{aligned} \quad (10)$$

径向距离与方位角之间的协方差可表示为:

$$C^{\theta} = \overline{x\theta_x} + \overline{y\theta_y} \quad (11)$$

因此:

$$d\bar{S}^2 = 2C^{\theta} dZ \quad (12)$$

$x\theta_x + y\theta_y$ 的微分可表示为:

$$d(x\theta_x + y\theta_y) = \theta_x dx + x d\theta_x + \theta_y dy + y d\theta_y \quad (13)$$

由于散射角度的微分与径向距离无关,因此公式(11)中 $x d\theta_x$ 和 $y d\theta_y$ 的统计平均为零,通过定义 $\bar{\theta}^2 = \overline{\theta_x^2} + \overline{\theta_y^2}$ 可得:

$$dC^{\theta} = \overline{\theta_x} d\bar{x} + \overline{\theta_y} d\bar{y} = \overline{\theta_x^2} dZ + \overline{\theta_y^2} dZ = \bar{\theta}^2 dZ \quad (14)$$

$\bar{\theta}^2$ 的变化可以看作是光子运动的一个群体特性,根据散射系数和单次散射反照率的物理意义可得方位角统计平均的微分可表示为:

$$d\bar{\theta}^2 = \mu \alpha^2 dZ \Theta^2 \quad (15)$$

其中 Θ 为相函数的63.2%能量散射角,在第四节中介绍其定义.

通过如上推导过程,逐次计算 $\bar{\theta}^2$ 和 C^{θ} 即可得到 $\bar{S}^2$:

$$\begin{cases} \bar{\theta}_{n+1}^2 = \bar{\theta}_n^2 + \mu_n \Theta_n^2 (Z_{n+1} - Z_n) \\ C_{n+1}^{\theta} = C_n^{\theta} + \bar{\theta}_n^2 (Z_2 - Z_1) \\ \quad + \mu_n \Theta_n^2 \frac{(Z_{n+1} - Z_n)^2}{2} \\ \bar{S}_{n+1}^2 = \bar{S}_n^2 + 2C_n^{\theta} (Z_2 - Z_1) \\ \quad + \bar{\theta}_n^2 (Z_2 - Z_1)^2 + \\ \quad + \mu_n \Theta_n^2 \frac{(Z_{n+1} - Z_n)^3}{3} \end{cases} \quad (16)$$

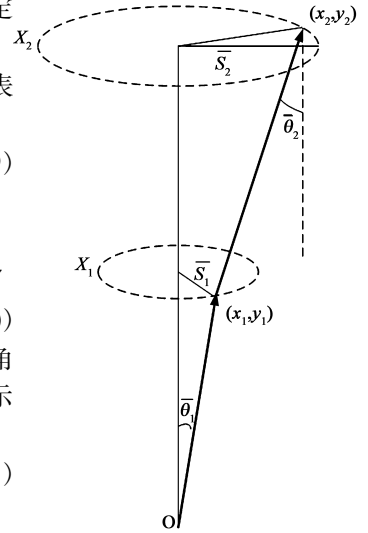


图5 单光子步进示意图

3.3 径向光子数量总和

在介质层 Z_n 中,与光轴中心距离为 r_i 的圆形平面内,光子总数 N_i 可表示为:

$$N_i = \sum_{k=1}^i N_{total} \exp(-\frac{r_k}{S_n}) / \sum_{p=1}^{\infty} \exp(-\frac{r_p}{S_n}) \quad (17)$$

4 本文方法中仿真参数的计算

根据 Mie 氏理论,散射因子和消光因子可表示为:

$$Q_s = \frac{2}{x^2} \sum_1^{\infty} (2n+1) [|a_n|^2 + |b_n|^2] \quad (18)$$

$$Q_{ext} = \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \text{Re}(a_n + b_n)$$

其中 a_n, b_n 为 Mie 氏系数.

根据介质中的粒子谱分布函数 $n(r)$,可得散射系数和消光系数分别为:

$$\mu_{ext} = \int_{r_1}^{r_2} n(r) Q_{ext}(r) dr$$
$$\mu_s = \int_{r_1}^{r_2} n(r) Q_{sca}(r) dr \quad (19)$$

相函数采用 Mie 氏理论的近似表达式 Henyey-Greenstein 函数:

$$P(\theta) = \frac{1 - g^2}{2(1 + g^2 + 2g\cos\theta)^{3/2}} \quad (20)$$

g 为不对称因子.其前向散射部分可近似为高斯分布, $P_{Gaussian}(\theta) = P(0)\exp(\frac{-\theta}{\Theta})$,HG 函数与前向散射的高斯近似对比如图 6 所示.

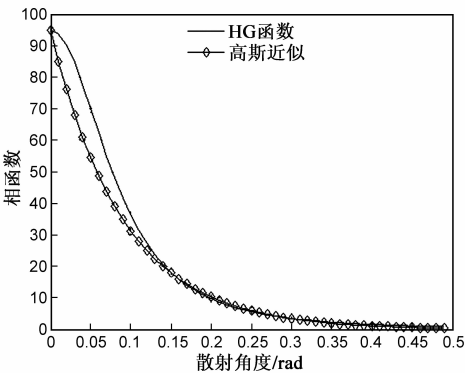


图6 当 $g=0.9$ 时,Henyey-Greenstein函数散射相函数与前向散射部分高斯近似的对比

通过对比结果可知,HG 函数可以近似为高斯函数,则前向散射的光子满足高斯分布.

γ 表示散射相函数的前向峰值能量比,其定义为 $\gamma = \int_0^{4\pi} [P(\theta)/4\pi] d\Omega = 0.5$. Θ 表示散射相函数的

63.2% 能量散射角,根据输运理论其定义为 $\int_0^{\Theta} P(\theta) \sin\theta d\theta = 0.632^{[10]}$,当 $g = 0.9$ 时, $\Theta = 0.3\text{rad}$.

本文方法需要选择合适的截止散射阶数和路径分

辨率以获取精确的仿真结果.在 MC 方法中光子运动长度统计平均为 $\bar{l} = \langle -\ln(\xi)/\mu_{ext} \rangle$,当到达目标平面时,平均散射阶数为 $N = \frac{L}{2\bar{l}}$,因此在计算光子总数量时,截止散射阶数应该大于光子运动的平均散射阶数: $n > N$.而路径长度的分辨率应该小于光子的平均运动步长: $\Delta L < \bar{l}$.

5 数值仿真结果

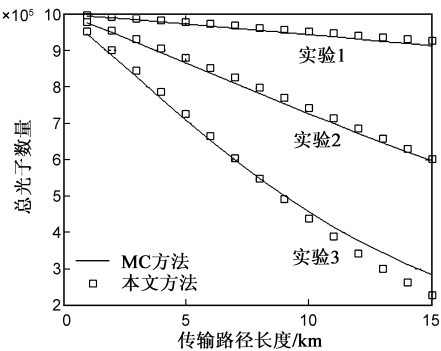
5.1 与 MC 方法仿真结果比较

为了验证本文方法的正确性,我们设置了三组实验,分别用 MC 方法和本文的方法获取不同传输路径上接收平面的总光子数量和 63.2% 能量半径,得到三组实验仿真结果的对比.三组实验的参数如表 1 所示,其他参数与第二节中的参数相同.

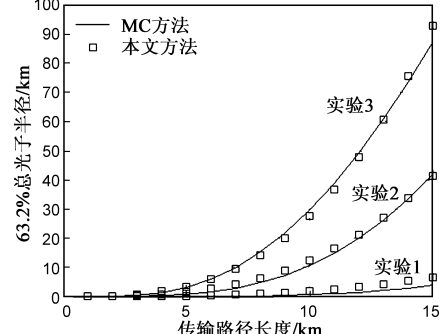
表 1 仿真参数

实验编号	吸收系数 μ_a/km^{-1}	散射系数 μ_s/km^{-1}	不对称因子 g	总光子数量 n_p	63.2% 前向峰值 散射角 Θ/rad	截止散 射阶数 n	介质 层数 $N_{medtotal}$
1	0.003	0.1	0.9	10^6	0.3	6	20
2	0.015	0.4	0.9	10^6	0.3	6	20
3	0.03	0.9	0.9	10^6	0.3	6	20

对比结果如图 7 所示.



(a) 本文方法和MC方法总光子数量的比较



(b) 本文方法和MC方法63.2%能量半径的比较

图7

实验 1 和实验 2 接收平面的总光子数量和 63.2% 能量半径在数值和变化趋势上基本一致,而图 7(a)中,实验 3 在仿真过程的后半段出现一定的偏差.这是由于

超过 10km 时介质层状分辨逐渐接近临界分辨率 $\bar{l}$. 当提高 $N_{medtotal} = 30$ 后可得到较为精确的仿真结果:

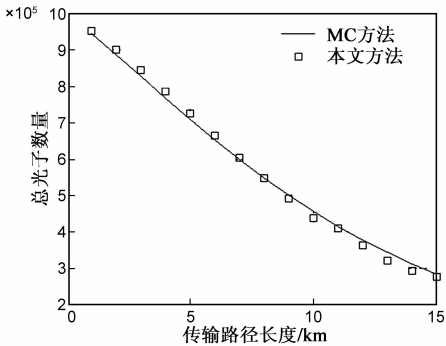


图8 改变参数后实验3的仿真结果

当传输距离为 10km 时,由接收平面总光子数和 63.2% 能量半径可计算得到不同半径内的光子总数,仿真结果如图 9 所示:

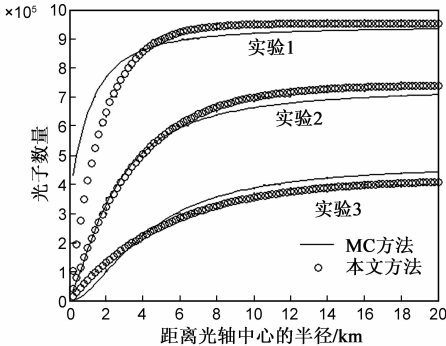


图9 本文方法与MC方法光子分布的对比结果

图 9 的实验 2 和实验 3 中,MC 方法和本方法得到的模拟结果基本吻合,只有局部点的数值稍有差异.随着实验次数和光子数量的增加,数值的误差会逐渐减小.而实验 1 的结果有较大出入.这是因为实验 1 中的消光系数为 0.103km^{-1} ,此时 MC 方法中光子的平均运动步长为 9.988km ,大部分光子在到达目标平面时所经历的散射次数比较少,因此接收平面的光子分布并没有显示出明显的高斯特性.随着传输距离的增加,高斯特性将逐渐显现出来.

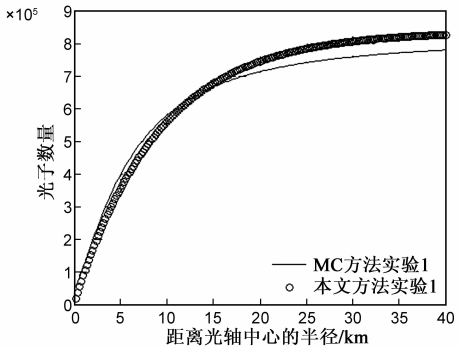


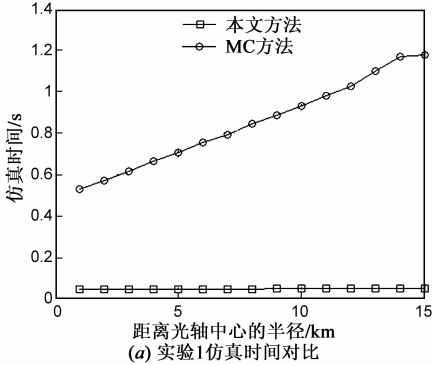
图10 实验1改变传输路径长度为30km时,光子分布的对比结果

图 10 为当传输距离为 30km 时的仿真结果.

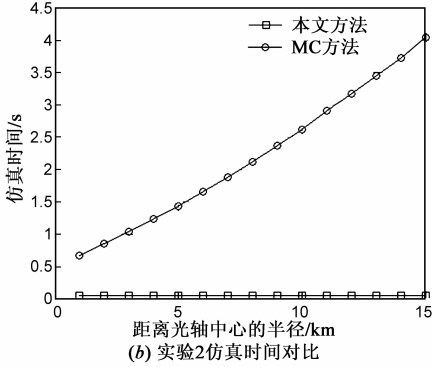
通过以上的三组实验基本可以证明本文方法的正确性.

5.2 与 MC 方法运行时间的比较

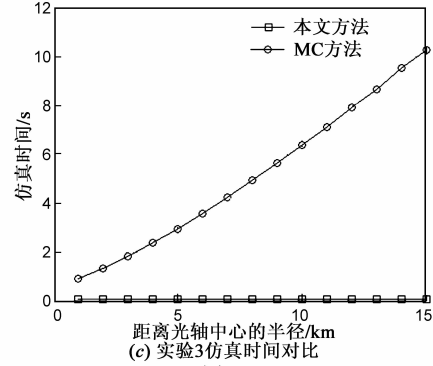
MC 方法计算时间的长短主要依赖于光子数量和介质光学参数的大小.而本文方法的计算时间仅与介质层状分布的分辨率和截止散射阶数有关,计算总光子数量占运算时间的大部分,其正比于 $N^m/m!$,其中 N 为介质层数, m 为截止散射阶数.图 11 为三组实验中 MC 方法和本文方法运算时间的比较.



(a) 实验1仿真时间对比



(b) 实验2仿真时间对比



(c) 实验3仿真时间对比

图11

本文方法在相同的仿真环境下 (Matlab, WindowsXP, INTEL Core (TM)₂, 2.66GHz) 运行效率远远高于 MC 方法,表 2 为仿真时间参数的对比结果.

本文方法在三个实验中的仿真时间均为 50ms 左右.在实验 3 中,对比 MC 方法最高可提高运行效率 210 倍.

表 2 仿真时间参数对比

实验编号	平均仿真时间/s		运行效率 提高倍数
	MC 方法	本文方法	
1	0.829	0.048	17
2	2.188	0.049	44
3	5.176	0.049	105

6 结论

针对多层平板型介质,在相同的仿真环境下,对于不同的介质参数及路径长度,通过大量实验证明本文方法与 MC 方法的仿真结果对比,总光子数量,63.2%能量半径和最终的光子分布基本吻合,而计算效率大大优于后者,单次仿真实验的运行时间基本可保证在毫秒量级.本文所给出的光子传输模型在灵活性和实时性上都可以满足现有仿真试验系统的需求.

参考文献

[1] 彭宇行,张拥军,李思昆.分布式虚拟环境的时空一致性研究[J].电子学报,2005,32(2):313-316.
Peng Yu-xing,Zhang Yong-jun,Li Si-kun. Time-Space consistency in distributed virtual environments[J]. Acta Electronica Sinica,2005,32(2):313-316. (in Chinese)

[2] Nunu Ren, Jimin Liang, Xiaochao. GPU-based Monte Carlo simulation for light propagation in complex heterogeneous tissues[J]. Optics Express,2010,18(7):6811-6823.

[3] Q Fang, D A Boas. Monte Carlo simulation of photon migration in 3D turbid media accelerated by graphics processing units [J]. Optics Express,2009,17(22):20178-20190.

[4] Norbert S Zolek, Adam Liebert, Roman Maniewski. Optimization of the monte carlo code for modeling of photon migration in tissue[J]. Computer Methods and Programs in Biomedicine, 2006,84(1):50-57.

[5] Erik Alerstam, Stefan Andersson-Engels, et al. White Monte Carlo for time-resolved photon migration [J]. Journal of Biomedical Optics,2008,13(4):1-10.

[6] Yun Tianliang, Zeng Nan, Li Wei, et al. Monte Carlo simulation of polarized photon scattering in anisotropic media[J]. Optics Express,2009,17(19):16590-16620.

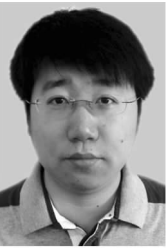
[7] Wang Jiangang, Wang Guiying, Xu Zhizhan. Monte Carlo simulation of photon migration path in turbid media[J]. Chin Opt Lett,2008,6(7):530-532.

[8] K E Kunkel, J A Weinman. Monte Carlo analysis of multiply scattered lidar return[J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 1976,33(1):1772-1881.

[9] 吴真,贺俊芳,吴登科.蒙特卡罗模拟光通过大气后的时间分布[J].强激光与粒子束,2011,23(3):779-782.
Wu Zhen, He Jun-fang, Wu Deng-ke. Simulation of transmitted light through atmosphere by Monte Carlo method [J]. High Power Laser and Particle Beams,2011,23(3):779-782. (in Chinese)

[10] Luc R Bissonnette. Multiple-scattering lidar equation[J]. Applied Optics,1996,35(33):6449-6465.

作者简介



贾延玺 男,1982年3月出生于哈尔滨,哈尔滨工业大学自动化测试与控制系博士研究生.2007年毕业于哈尔滨工业大学自动化测试与控制系,获得硕士学位.主要研究方向为光传输建模.
E-mail: jiayanxi2012@yahoo.com.cn

姜守达 男,1964年9月出生于黑龙江伊春,哈尔滨工业大学自动化测试与控制系教授.主要研究方向为图像处理、虚拟试验及验证技术、自动化测试技术等.