

# 有源忆阻器伏安关系与有源忆阻电路频率特性研究

包伯成<sup>1</sup>, 邹 相<sup>1</sup>, 胡 文<sup>2</sup>, 武花干<sup>3</sup>

(1. 常州大学信息科学与工程学院, 江苏常州 213164; 2. 南京航空航天大学电子信息工程学院, 江苏南京 210016;  
3. 南京理工大学电子工程系, 江苏南京 210094)

**摘 要:** 忆阻器是具有记忆特性的非线性电阻器, 是物理上新实现的第四种基本二端电路元件. 以分段二次型非线性函数描述的有源磁控忆阻器为例, 分析了有源忆阻器的伏安关系, 研究了有源忆阻器与电容串联电路(简称有源 WC 电路)的频率响应特性, 并与有源 RC 电路进行了比较分析. 结果表明: 有源忆阻器的伏安特性曲线为紧磁滞回线, 且依赖于其内部初始状态; 有源 WC 电路与有源 RC 电路均呈现高通特性, 但前者为超前网络而后者为滞后网络. 基于有源磁控忆阻器的等效电路进行了电路仿真, 其结果很好地验证了理论分析结果.

**关键词:** 有源忆阻器; 伏安关系; 有源 WC 电路; 频率特性

**中图分类号:** TM13      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2013)03-0593-05

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.03.029

## Voltage-Current Relationship of Active Memristor and Frequency Characteristic of Active Memristive Circuit

BAO Bo-cheng<sup>1</sup>, ZOU Xiang<sup>1</sup>, HU Wen<sup>2</sup>, WU Hua-gan<sup>3</sup>

(1. School of Information Science and Engineering, Changzhou University, Changzhou, Jiangsu 213164, China;

2. College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, Jiangsu 210016, China;

3. Department of Electronic Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, Jiangsu 210094, China)

**Abstract:** Memristor, a nonlinear resistor with memory property, is the fourth basic two-terminal circuit element realized physically recently. In this paper, an active flux-controlled memristor with piecewise-quadratic nonlinearity is taken as an example, upon which voltage-current relationship of the active memristor is analyzed, and frequency response characteristic of a series circuit consisting of an active flux-controlled memristor and a capacitor (simplified by active WC circuit) is studied. The comparison analysis between active WC circuit and active RC circuit is performed. The results indicate that voltage-current characteristics of the active memristor exhibit pinched hysteresis loops and depend on the inner initial states; both active WC circuit and active RC circuit show high pass properties, but the former is a lead network and the latter is a lag network. Circuit simulations are performed based on equivalent circuit of active flux-controlled memristor, which well verify theoretical analysis results.

**Key words:** active memristor; voltage-current relationship; active WC circuit frequency characteristic

## 1 引言

忆阻器具有其它三种基本元件的任意组合都不能复制的特性, 它是一种有记忆功能的非线性电阻, 可以记忆流经它的电荷数量, 通过控制电流的变化可改变其阻值<sup>[1,2]</sup>. 2008年5月, 惠普公司实验室 Strukov等<sup>[3]</sup>在《自然》上首次报道了忆阻器的实现性, 研究成果震惊了国际电工电子技术世界, 极大的唤起了人们开展忆阻器及其电路的研究兴趣. 忆阻器将对计算机科学<sup>[4]</sup>、生物工程学<sup>[5]</sup>、神经网络<sup>[6]</sup>、电子工程<sup>[7]</sup>等产生极其深远的影响; 同时忆阻电路元件的存在, 使基础元件由电阻、电容和电感增加到了四个, 忆阻器为电路设计及其忆阻电

路应用提供了全新的发展空间<sup>[8,9]</sup>.

自忆阻器实现性报道后, 关于忆阻器与忆阻电路方面的研究在全方位迅速地延伸开来, 包括纳米忆阻器及其相关器件的物理实现<sup>[3]</sup>、忆阻器建模与基本电路的特性研究<sup>[10~12]</sup>、忆阻混沌电路动力学分析与等效电路实现<sup>[8,9,13~16]</sup>等. 通过对忆阻电路的模型分析, 可以了解在电路中引入忆阻器后电路特性的变化; 通过对忆阻电路进行动力学分析, 可以建立和完善忆阻电路的动力学理论基础; 通过对忆阻电路的等效实现, 可以在简单的实验环境下观察到忆阻电路所产生的物理现象, 进而验证理论分析的正确性.

忆阻器是物理上新实现的第四种基本电路元件,尚有很多不为人们所知道的特性.关于忆阻器及其基本组成电路的文献成果报道较少,尤其缺乏相应的电路仿真结果.忆阻器内部初始状态对其外在电路的动力学特性有着较大的影响<sup>[13,15]</sup>,但对其元件伏安关系是如何影响的,尚无研究成果报道.另外,由于忆阻电路是非线性电路,因此也有必要研究基本忆阻电路的频率响应特性.基于此,本文首先将以分段二次型非线性函数描述的有源磁控忆阻器模型为例,进行有源忆阻器的伏安关系研究,给出其依赖于忆阻器内部初始状态的理论分析结果;其次从理论上进行有源 WC 电路基波频率特性的研究,并与有源 RC 电路作比较分析;最后利用有源磁控忆阻器的等效电路,进行有源忆阻器与有源 WC 电路的电路仿真,以此来验证理论分析结果.

## 2 有源磁控忆阻器基本特性

一个分段二次型非线性特性曲线描述的有源磁控忆阻器<sup>[13,16]</sup>可表示为

$$q(\varphi) = -a\varphi + 0.5b\varphi^2 \operatorname{sgn}(\varphi) \quad (1)$$

式中,  $a, b > 0$ ,  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  为符号函数. 相应的忆导  $W(\varphi)$  为

$$W(\varphi) = -a + b|\varphi| \quad (2)$$

假设电压  $v(t)$  与电流  $i(t)$  采用关联参考方向,则有源磁控忆阻器的伏安关系为

$$i(t) = W(\varphi)v(t) = (-a + b|\varphi|)v(t) \quad (3)$$

由于忆导在一定的工作范围内可变成负值,忆阻器的即时功率  $p(t) = W(\varphi)v^2(t)$  和流入的能量  $w(t_0, t) = \int_{t_0}^t p(\tau)d\tau$  (对所有  $t \geq t_0$ ) 随着时间的演化将在正值和负值之间变化着. 根据忆阻器无源定理<sup>[1]</sup>, 可判断式(1)所描述的磁控忆阻器不具备无源性, 即是有源的.

在有源磁控忆阻器上外加一个正弦电压激励, 即设  $v(t) = V_m \sin(\omega t) = V_m \sin(2\pi ft)$ . 这里,  $V_m$  为振幅, 角频率  $\omega$  和频率  $f$  之间存在关系式  $\omega = 2\pi f$ . 根据磁通  $\varphi(t)$  与电压  $v(t)$  的时域关系可得

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(0) + \int_0^t V_m \sin(\omega\tau) d\tau \\ &= \varphi(0) + \frac{V_m}{\omega} [1 - \cos(\omega t)] \end{aligned} \quad (4)$$

其中, 有源磁控忆阻器内部状态变量  $\varphi(t)$  的初始值  $\varphi(0) = \int_{-\infty}^0 v(\tau) d\tau$ .

式(4)说明正弦电压激励在有源磁控忆阻器上产生的磁通具有一个直流分量, 它是由忆阻器磁通的初始值和忆阻器上积累磁通所产生的直流分量共同确定的.

将式(4)代入式(3), 可得

$$i(t) = V_m \left\{ -a + b \left[ \varphi(0) + \frac{V_m}{\omega} [1 - \cos(\omega t)] \right] \right\} \sin(\omega t) \quad (5)$$

令  $\varphi(0) = 0$  Wb, 则有

$$i(t) = \left( -a + \frac{bV_m}{\omega} \right) V_m \sin(\omega t) - \frac{bV_m^2}{2\omega} \sin(2\omega t) \quad (6)$$

因此, 流过有源磁控忆阻器的电流由激励频率的基波分量和二次谐波分量组成.

设有源磁控忆阻器的参数为  $a = 0.6667 \text{ mS}$  和  $b = 1.4828 \text{ S/Wb}$ <sup>[16]</sup>, 内部初始状态为  $\varphi(0) = 0$  Wb. 外加一个正弦电压激励  $2\sin(2\pi ft)$  (V), 当激励频率分别为  $f = 500 \text{ Hz}$ 、 $1 \text{ kHz}$  和  $20 \text{ kHz}$  时, 可得到式(1)描述的忆阻器在  $vi$  平面上的伏安关系曲线如图 1(a) 所示. 当  $f = 1 \text{ kHz}$  时, 电压和电流的时域波形如图 1(b) 所示. 从图 1(a) 中可以观察到该忆阻器具有斜体“8”字型的紧磁滞回线特性. 与无源磁控忆阻器所不同的是, 当激励频率较低时, 有源磁控忆阻器的伏安关系曲线位于  $vi$  平面的四个象限中; 而当激励频率较高(约  $1.3 \text{ kHz}$  以上)时, 其伏安关系曲线仅局限于  $vi$  平面的 II、IV 象限中. 另外, 当激励频率进一步增大时, 该忆阻器的特性接近于一个电导为  $-a \text{ S}$  的线性负电阻特性, 即激励频率很高时, 有源磁控忆阻器将退化为一个负电阻.

当忆阻器内部初始状态不同, 即  $\varphi(0)$  不为零时, 从式(5)中可知忆阻器所具有的伏安关系有着很大的不同. 这种特性表明了忆阻器对过去历史具有良好的记忆性, 与其它三种基本元件有着本质上的区别. 尤其是, 当  $\varphi(0) > a/b = 0.4496 \text{ mWb}$  时,  $W(\varphi) > 0$  总是成立, 故有源磁控忆阻器在一定的初始状态下有着无源性.

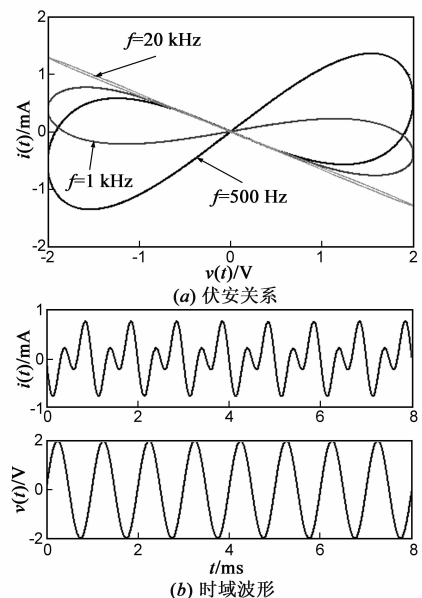


图1 有源磁控忆阻器的伏安关系及其变量的时域波形

### 3 有源 WC 电路频率特性

从上述分析可知,外加正弦电压激励后,有源磁控忆阻器的电流响应将含有以外加激励频率为基波频率的高次谐波分量.常用谐波平衡法求解各次谐波分量的频率响应<sup>[17]</sup>,但求解过程是极其繁杂的.一般来说,与基波分量相比,响应的高次谐波分量的幅值很小,对响应的有效值影响几乎可以忽略.因此,在许多情况下,仅考察系统基波幅值及相位与频率的关系,即基波频率特性.

以式(1)描述的有源磁控忆阻器  $W$  与电容  $C$  的串联电路构成的有源 WC 电路为例,如图 2(a)所示.电路的外加激励为  $v_s(t) = V_m \cos(\omega t)$ ,以磁通  $\varphi(t)$  为变量,可列出电路的微分方程为

$$C \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} - [a - b|\varphi(t)|] \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{dv_s(t)}{dt} \quad (7)$$

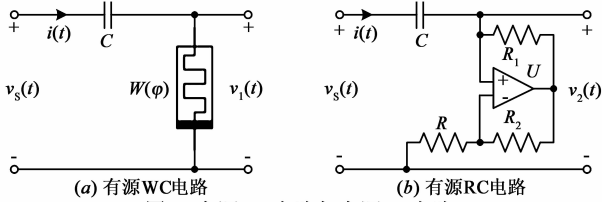


图2 有源WC电路与有源RC电路

设有源磁控忆阻器输出电压响应的基波分量为  $v_{p1}(t) = V_1(\omega) \cos[\omega t + \theta_1(\omega)]$ ,并令其初始状态为零,则有

$$\begin{aligned} \varphi_{p1}(t) &= \int_{-\infty}^t v_{p1}(\tau) d\tau \\ &= \frac{V_1(\omega)}{\omega} \{ \sin\theta_1(\omega) - \sin[\omega t + \theta_1(\omega)] \} \end{aligned}$$

代入式(7)得到

$$\begin{aligned} &\omega CV_1(\omega) \sin[\omega t + \theta_1(\omega)] - \\ &\left\{ \left[ a - \frac{bV_1(\omega)}{\omega} \right] |\sin[\omega t + \theta_1(\omega)] - \sin\theta_1(\omega)| \right\} V_1(\omega) \cdot \\ &\cos[\omega t + \theta_1(\omega)] \Big\} = -\omega CV_m \sin(\omega t) \quad (8) \end{aligned}$$

从下面数值仿真结果可知,随着激励频率增加,输出电压响应的相位角  $\theta_1(\omega)$  由  $90^\circ$  单调下降并趋于  $0^\circ$ , 即  $\sin\theta_1(\omega)$  由 1 单调下降至 0. 为了简化分析,假设式(8)绝对值项中  $\sin\theta_1(\omega)$  项分别为 1 和 0, 在这两种特殊情况下推导有源 WC 电路的基波频率响应关系式.

第一种情况:假设  $\sin\theta_1(\omega)$  项为 1. 式(8)绝对值项可简化为  $1 - \sin[\omega t + \theta_1(\omega)]$ . 仅取式(8)中的基波项,并将其表示为向量形式有

$$\begin{aligned} &-j\omega CV_1(\omega) e^{j\theta_1(\omega)} - \left[ a - \frac{bV_1(\omega)}{\omega} \right] V_1(\omega) e^{j\theta_1(\omega)} \\ &= j\omega CV_m e^{j0} \quad (9) \end{aligned}$$

由此得基波幅频响应特性和基波相频响应特性分别为

$$\begin{aligned} V_1(\omega) &= \frac{\omega CV_m}{\sqrt{\left[ a - \frac{bV_1(\omega)}{\omega} \right]^2 + (\omega C)^2}}, \\ \theta_1(\omega) &= -\arctan \left[ \frac{a\omega - bV_1(\omega)}{\omega^2 C} \right] \quad (10) \end{aligned}$$

第二种情况:假设  $\sin\theta_1(\omega)$  项为 0. 考虑到下面关系式成立

$$\begin{aligned} |\sin(\omega t + \theta_1)| &= \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos[2n(\omega t + \theta_1)] \right\} \\ &\cos(2\omega t + 2\theta_1) \cos(\omega t + \theta_1) \\ &= \frac{1}{2} [\cos(3\omega t + 3\theta_1) + \cos(\omega t + \theta_1)] \end{aligned}$$

式(8)中基波项的向量形式为

$$\begin{aligned} &-j\omega CV_1(\omega) e^{j\theta_1(\omega)} - \left[ a - \frac{4bV_1(\omega)}{3\pi\omega} \right] V_1(\omega) e^{j\theta_1(\omega)} \\ &= j\omega CV_m e^{j0} \quad (11) \end{aligned}$$

可得基波幅频响应特性和基波相频响应特性分别为

$$\begin{aligned} V_1(\omega) &= \frac{\omega CV_m}{\sqrt{\left[ a - \frac{4bV_1(\omega)}{3\pi\omega} \right]^2 + (\omega C)^2}}, \\ \theta_1(\omega) &= -\arctan \left[ \frac{3\pi a\omega - 4bV_1(\omega)}{3\pi\omega^2 C} \right] \quad (12) \end{aligned}$$

应该注意的是,在式(10)与式(12)中,右端表达式除了与激励频率有关外,还与  $V_1(\omega)$  有关,因而也与外加激励的幅值有关.

采用上述有源磁控忆阻器的参数,并确定电容值为  $C = 10\mu\text{F}$ . 设输入电压的幅值为 1V、初相为  $0^\circ$ , 基于式(10)和(12),可绘出有源 WC 电路的忆阻器输出端的基波响应特性曲线如图 3 所示. 图 3 中点线表示第一种

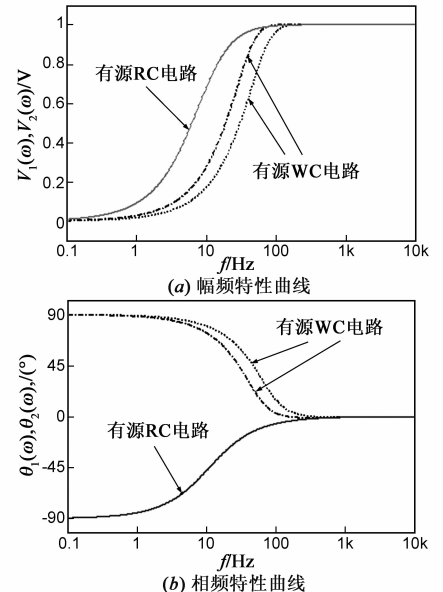


图3 有源WC电路与有源RC电路的频率特性

情况下的基波频响特性曲线,而点划线表示第二种情况下的基波频响特性曲线.从图 3(b)中可以看到,基波相位角  $\theta_1(\omega)$  在  $90^\circ \sim 0^\circ$  之间变化.因此,在一般情况下,有源 WC 电路的基波频响特性曲线应该位于点线和点划线之间的一条曲线,上述假设的两种特殊情况为实际电路频响特性曲线的两个边界.

从图 2(a)所示电路及图 3 所示曲线可见,有源 WC 电路呈现高通特性.当  $f=0\text{Hz}$ (直流)时,电容元件相当于开路,  $V_1(0)=0\text{V}$ ,  $\theta_1(0)=90^\circ$ ;而当  $f \rightarrow \infty$  时,电容元件相当于短路,  $V_1(\infty)=1\text{V}$ ,  $\theta_1(\infty) \rightarrow 0^\circ$ .这表示,随着输入正弦信号频率的增加,  $V_1(\omega)$  由  $0\text{V}$  单调上升并趋于  $1\text{V}$ ,即高频的正弦信号比低频的正弦信号更容易通过这个电路,相位角  $\theta_1(\omega)$  由  $90^\circ$  单调下降并趋于  $0^\circ$ .

为了进行比较分析,将图 2(a)中的有源磁控忆阻器替换成一个负电阻  $R$ ,其阻值选择与有源磁控忆阻器在高频激励时退化成的负电阻值一致,即有  $R = -1/a$ .有源 RC 电路的等效电路如图 2(b)所示.这里,电容  $C$  之外的运算放大器电路与电阻  $R$  在  $R_1 = R_2$  时实现了负电阻.设负电阻端输出电压为  $v_2(t)$ ,输入电压的幅值和初相分别为  $1\text{V}$  和  $0^\circ$ ,容易得到负电阻端电压的幅频特性和相频特性分别为

$$V_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{(\omega C)^2}}}, \theta_2(\omega) = -\arctan\left(\frac{a}{\omega C}\right) \quad (13)$$

选择有源 RC 电路的电路参数为  $R = -1/a = -1.5\text{k}\Omega$  和  $C = 10\mu\text{F}$ ,有源 RC 电路中负电阻输出端的幅频特性曲线和相频特性曲线分别如图 3(a)和 3(b)中的实线所示.

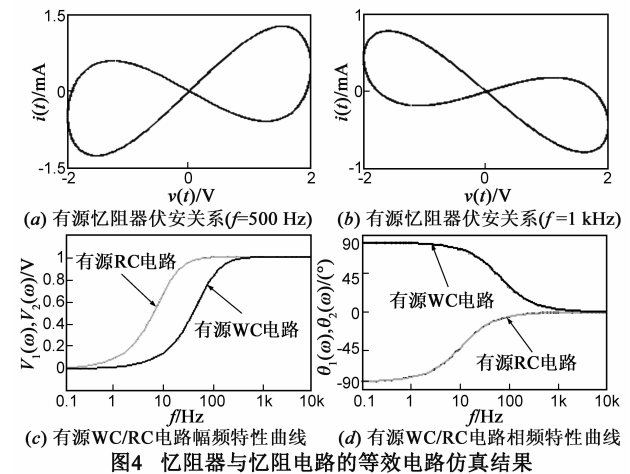
因此,有源 WC 电路与有源 RC 电路均为高通电路,但前者的截止频率要明显高于后者的截止频率.此外,有源 WC 电路为超前网络,其输出电压总是超前输入电压;而有源 RC 电路为滞后网络,其输出电压总是滞后输入电压.

## 4 等效电路仿真验证

采用现有的电阻器、电容器、运算放大器等分立元器件,可以构建一个电路来等效实现忆阻器的特性.文献[16]给出了有源磁控忆阻器等效电路实现的原理图,其等效参数为  $a = 0.6667\text{mS}$  和  $b = 1.4828\text{S/Wb}$ .当有源磁控忆阻器上外加一个幅度为  $2\text{V}$ 、频率分别为  $500\text{Hz}$  和  $1\text{kHz}$  的正弦电压激励时,利用 Multisim 电路仿真软件进行仿真,其  $v(t)-i(t)$  曲线分别如图 4(a)和 4(b)所示.其结果与图 1 数值仿真结果作比较,在同一个正弦电压激励下,相应的伏安关系曲线是完全吻合的.

在有源磁控忆阻器的等效电路上串联上  $10\mu\text{F}$  电容,即可构成如图 2(a)所示的有源 WC 电路.外加正弦

电压信号源,利用 Multisim 电路仿真软件进行交流分析,其频率响应特性曲线分别如图 4(c)和 4(d)中的黑线所示.与图 3 数值仿真结果作比较,可以看出两者结果是基本一致的,由此说明了有源 WC 电路的频率特性理论推导是可行的.相应地,有源 RC 电路的频率响应特性曲线如图 4(c)和 4(d)中的灰线所示,其电路仿真结果与图 3 数值仿真结果也是一致的.



## 5 结论

本文深入研究了有源磁控忆阻器和有源 WC 电路,进行了有源磁控忆阻器伏安关系的基本分析、数值仿真、基于等效电路的电路仿真等研究,进一步开展了有源 WC 电路的基波频率响应特性的理论分析、基于等效电路的电路仿真等研究,并与有源 RC 电路进行了比较分析.结果说明:(1)有源忆阻器的伏安关系具有斜体“8”字型的紧磁滞回线特性,且依赖于其内部初始状态,甚至呈现出无源性;(2)有源 WC 电路呈现出的高通特性与有源 RC 电路的变化趋势一致,但其截止频率明显高于有源 RC 电路的截止频率;(3)有源 WC 电路为超前网络,而有源 RC 电路为滞后网络.基于有源磁控忆阻器的等效电路进行了相应的电路仿真,其结果很好地验证了理论分析结果.

## 参考文献

- [1] CHUA L O. Memristor—the missing circuit element[J]. IEEE Trans Circuit Theory, 1971, CT-18(5): 507–519.
- [2] CHUA L O, KANG S M. Memristive devices and systems[J]. Proc the IEEE, 1976, 64(2): 209–223.
- [3] STRUKOV D B, SNIDER G S, STEWART D R, et al. The missing memristor found[J]. Nature, 2008, 453: 80–83.
- [4] BORGHETTI J, SNIDER G S, KUEKES P J, et al. Memristive switches enable ‘stateful’ logic operations via material implication [J]. Nature, 2010, 464: 873–876.
- [5] PERSHIN Y V, FONTAINE S L, DI VENTRA M. Memristive

- model of amoeba learning[J]. Phys Rev E, 2009, 80:021926.
- [6] PERSHIN Y V, DI VENTRA M. Experimental demonstration of associative memory with memristive neural networks[J]. Neural Networks, 2010, 23(7):881 – 886.
- [7] SHIN S, KIM K, KANG S M. Memristor applications for programmable analog ICs[J]. IEEE Trans Nanotechnology, 2011, 10(2):266 – 274.
- [8] MUTHUSWAMY B. Implementing memristor based chaotic circuits[J]. Int J Bifurcation and Chaos, 2010, 20(5):1335 – 1350.
- [9] BAO B C, LIU Z, XU J P. Steady periodic memristor oscillator with transient chaotic behaviors [J]. Electron Lett, 2010, 46(3):228 – 230.
- [10] BENDERLI S, WEY T A. On SPICE macromodelling of TiO<sub>2</sub> memristors[J]. Electron Lett, 2009, 45(7):377 – 379.
- [11] JOGLEKAR Y N, WOLF S J. The elusive memristor: properties of basic electrical circuits[J]. Euro J Phys, 2009, 30(4):661 – 675.
- [12] RIAZA R. Nondegeneracy conditions for active memristive circuits[J]. IEEE Trans Circuits and Systems II, 2010, 57(3):223 – 227.
- [13] BAO B C, XU J P, LIU Z. Initial state dependent dynamical behaviors in memristor based chaotic circuit [J]. Chin Phys Lett, 2010, 27(7):070504.
- [14] BAO B C, MA Z H, XU J P, et al. A simple memristor chaotic circuit with complex dynamics [J]. Int J Bifurcation and Chaos, 2011, 21(9):2629 – 2645.
- [15] BAO B C, SHI G D, XU J P, et al. Dynamics analysis of chaotic circuit with two memristors[J]. Sci China Ser E-Tech Sci, 2011, 54(8):2180 – 2187.
- [16] BAO B C, XU J P, ZHOU G H, et al. Chaotic memristive circuit: equivalent circuit realization and dynamical analysis [J]. Chin Phys B, 2011, 20(12):120502.

- [17] 郭裕顺. 电路分析的时-频混合方法[J]. 电子学报, 2000, 28(1):92 – 95, 77.
- GUO Y S. Mixed time-frequency methods for circuit analysis [J]. Acta Electronica Sinica, 2000, 28(1):92 – 95, 77. (in Chinese)

### 作者简介



**包伯成** 男, 1965年7月出生于江苏省常州市. 现为常州大学信息科学与工程学院研究员级高级工程师、硕士生导师, 从事记忆元件与记忆系统、开关功率变换器、非线性电路与系统等方面的研究工作. 在国内外发表学术论文近100篇.

E-mail: mervinbao@126.com



**邹相** 男, 1990年2月出生于江苏省连云港市. 现为常州大学信息科学与工程学院研究生, 从事忆阻器与忆阻电路方面的研究工作.

E-mail: zzxx\_zzqq@yahoo.com.cn

**胡文** 男, 1979年12月出生于江西省南昌市, 现为南京航空航天大学电子信息工程学院副教授, 主要研究方向为混沌信息动力学和雷达信号处理.

E-mail: huwen@nuaa.edu.cn

**武花干** 女, 1987年8月出生于江苏省泰州市. 现为南京理工大学电子工程系博士生, 主要研究方向为混沌信息动力学、记忆元件与记忆系统.

E-mail: jingzhan9000@yeah.net