

计量逻辑中真度的均值表示形式及应用

吴洪博, 周建仁

(陕西师范大学数学与信息科学学院, 陕西西安 710062)

摘 要: 命题真度是计量逻辑学中的基础概念. 本文对真度的性质和计算方法进行了再研究. 首先给出了计量逻辑中真度定义的均值表示形式; 其次利用真度定义的均值表示形式推广了连接有限值逻辑系统和连续值逻辑系统中真度理论的极限定理, 并得到了真度的对称性定理; 最后在 n -值命题逻辑系统和连续值命题逻辑系统中给出了析取规范型命题和合取规范型命题的真度的计算公式.

关键词: 计量逻辑; 真度; 均值表示; 极限定理; 对称性定理; 规范型; 计算公式

中图分类号: O141.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2012)09-1822-07

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.09.019

The Form of Mean Representation of Truth Degree with Applications in Quantitative Logic

WU Hong-bo, ZHOU Jian-ren

(College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an, Shaanxi 710062, China)

Abstract: The truth degree of formula is the basic concept in quantitative logic from which other concepts are derived. In the present paper the properties and the computation method of truth degree are investigated more in-depth. Firstly, a form of mean representation of definition of truth degree of formula is given in quantitative logic; secondly, with the help of the form of mean representation, the limit theorem is generalized that is a connection of the theories of truth degrees in n -valued logic system and continuity-valued logic system, and the symmetrical characteristic of truth degree is obtained; thirdly, the computational formulas of truth degrees of the propositions with normal forms is given.

Key words: quantitative logic; truth degree; mean representation; limit theorem; symmetry theorem; normal form; calculation formula

1 引言

用“指派真值”来表示逻辑公式的真实度的思想是逻辑学家 Pavelka 于 20 世纪 70 年代在系列文章中提出的^[1]. 随后, E. W. Adams 教授、D. Dubois 教授、H. Prade 教授、D. Mundici 教授、王国俊教授等建立的概率逻辑理论、平均真值理论、广义重言式理论、三 I 算法理论、计量逻辑理论均是这种思想的不同表现形式. 这些理论受到了学者们的广泛关注和研究^[2~23]. 计量逻辑理论是王国俊教授在对真度理论经过多年研究的基础上建立的^[14~20]. 本世纪初王国俊教授首先在赋值格为 $[0, 1]$ 的模糊命题逻辑中提出了公式的积分真度理论^[19, 22], 以及在经典二值命题逻辑和 n 值命题逻辑中引进了公式真度理论^[14~18], 并于 Łukasiewicz 命题逻辑系统中得到了联系 n 值命题逻辑公式的加权真度和赋值格为 $[0, 1]$

的命题逻辑公式的积分真度的极限定理^[14]; 其次, 在 multi-valued 逻辑系统公式真度概念的基础上, 提出了公式间的相似度与伪距离的概念, 以及逻辑理论的发散度与相容度概念, 研究了逻辑度量空间的基本性质, 建立了形式推理与数值计算相融合的计量逻辑学^[20, 22]. 为模糊命题逻辑系统中近似推理的研究提供了有力工具.

本文对计量逻辑理论中的真度性质及计算方法进行了再研究.

(1) 给出了真度定义的均值表示形式, 说明了通过公式诱导的函数所定义的公式的真度亦是该函数在其定义域上的算术平均值;

(2) 利用真度定义的均值表示形式推广了连接有限值逻辑系统和连续值逻辑系统中真度理论的极限定理, 并简化了其证明过程, 而将文献[14]中关于 Łukasiewicz 命题逻辑中极限定理作为它的特例;

(3) 得到了真度的对称性定理: 在 n 值命题逻辑系统中, 若 $\forall k \in Z^+, \overline{\neg p_k} = 1 - \overline{p_k}$. 则 $\forall A(p_1, p_2, \dots, p_m) \in F(S)$, $\tau_n(A(p_1, p_2, \dots, p_m)) = \tau_n(A(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \dots, \overline{p_m}))$, 其中 $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, 或 $P_i = p_i$ 或 $P_i = \neg p_i$, 即, 把公式 A 中所含原子公式 $p_1, p_2, \dots, p_m$ 的部分原子公式分别换成它的否定, 公式 A 的真度不变.

(4) 在 n 值命题逻辑系统和连续值逻辑系统中, 分别给出了析取规范型命题 $\bigvee_{i=1}^m (\bigwedge_{j=1}^{s_i} P_{ij})$ 和合取规范型命题 $\bigwedge_{i=1}^m (\bigvee_{j=1}^{s_i} P_{ij})$ 的绝对真度^[22]的计算公式(其中 $P_{ij}(i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, s_i\})$ 是两两不同的原子命题 p_{ij} 或其否定 $\neg p_{ij}$), 部分的系统解决了命题公式真度的计量问题.

2 预备知识

首先记 $I_n = \{0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$ ($n \geq 2$), 并设 $(I, (\neg, \vee, \wedge, \rightarrow))$ 是 $(1, 2, 2, 2)$ 型代数, 其中 $I = I_n$, 或 $I = [0, 1]$, $\vee, \wedge$ 分别是取最大值, 取最小值运算.

定义 1^[22] 设 $S = \{p_1, p_2, \dots\}$ 是可数无限集合. $\neg$ 是一元运算, $\vee, \wedge, \rightarrow$ 是二元运算, $F(S)$ 是由 S 生成的 $(\neg, \vee, \wedge, \rightarrow)$ 型自由代数, 则称 $F(S)$ 中的元为命题或公式, 称 S 中的元为原子命题或原子公式.

在命题逻辑系统中, 连接词 $\wedge$ 是通过其他连接词表示的^[22~24], 本文中为叙述方便, 我们亦将 $\wedge$ 视作为“独立”连接词.

定义 2^[23] 设 $A = A(p_1, p_2, \dots, p_m) \in F(S)$, 则 A 对应一个 m 元函数 $\bar{A}$. 在 n 值命题逻辑系统中, $\bar{A}: I_n^m \rightarrow I_n$; 在连续值命题逻辑系统中, $\bar{A}: [0, 1]^m \rightarrow [0, 1]$. 这里 $\bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 是由运算符 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ 把 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 连接而成, 其方式恰如 $A = A(p_1, p_2, \dots, p_m)$ 由连接词 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ 将原子公式 $p_1, p_2, \dots, p_m$ 连接而成. 称 $\bar{A}$ 是公式 A 所诱导的函数.

定义 3^[23] (真度定义的加权表示形式) 设 $A = A(p_1, p_2, \dots, p_m) \in F(S)$ 是含有 m 个原子公式 $p_1, p_2, \dots, p_m$ 的命题, $\bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 是 A 诱导的函数. 在 n 值命题逻辑系统中, 令

$$\tau_n(A) = \frac{1}{n^m} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n-1} \left| \bar{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right) \right| \quad (\text{其中 } |E| \text{ 表示集合 } E \text{ 中元素的个数}).$$

称 $\tau_n(A)$ 为命题 A 在 n 值命题逻辑系统中的真度.

定义 4^[23] (真度定义的积分表示形式) 设 $A = A(p_1, p_2, \dots, p_m) \in F(S)$ 是含有 m 个原子公式 $p_1, p_2, \dots, p_m$ 的命题, $\bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 是公式 A 所诱导的函数. 在连续值命题逻辑系统中, 令

$$\tau_\infty(A) = \int_{[0,1]^m} \bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 \cdots dx_m.$$

称 $\tau_\infty(A)$ 为命题公式 A 在连续值命题逻辑系统中的真度.

引理 1^[25] 设 $k \in Z^+$, 则 $\sum_{i=1}^n i^k = \frac{(n+1)^{k+1} - q_k(n)}{k+1}$. 其中 $q_k(n)$ 为 n 的 k 次多项式.

引理 2 命题公式 $P = p_1 \vee \dots \vee p_k, Q = p_1 \wedge \dots \wedge p_k$, 其中 $p_1, \dots, p_k$ 为两两不同的原子公式. 那么在 n 值命题逻辑系统中, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, 有

$$(1) |\bar{P}^{-1}(\frac{i}{n-1})| = (i+1)^k - i^k;$$

$$(2) |\bar{Q}^{-1}(\frac{i}{n-1})| = (n-i)^k - (n-i-1)^k.$$

证明(1): 当 $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ 时, $\bar{P}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{i}{n-1}$ 当且仅当 $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \{0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{i}{n-1}\}^k$ 且 $x_1, x_2, \dots, x_k$ 中至少有一个等于 $\frac{i}{n-1}$. $|\bar{P}^{-1}(\frac{i}{n-1})|$ 的值就是 $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \{0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{i}{n-1}\}^k$ 的取法种数减去 $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \{0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{i-1}{n-1}\}^k$ 的取法种数. 所以 $|\bar{P}^{-1}(\frac{i}{n-1})| = (i+1)^k - i^k$.

当 $i = 0$ 时, $\bar{P}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{i}{n-1} = 0$ 当且仅当 $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \{0\}^k$, 因此只有一种取法. 又此时 $(i+1)^k - i^k = (0+1)^k - 0^k = 1$, 因此当 $i = 0$ 时, 有 $|\bar{P}^{-1}(\frac{i}{n-1})| = (i+1)^k - i^k$.

综上所述, $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, $|\bar{P}^{-1}(\frac{i}{n-1})| = (i+1)^k - i^k$.

证明(2): 当 $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-2\}$, $\bar{Q}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{i}{n-1}$ 当且仅当 $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \{\frac{i}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}^k$, 且 $x_1, x_2, \dots, x_k$ 中至少有一个等于 $\frac{i}{n-1}$. $|\bar{Q}^{-1}(\frac{i}{n-1})|$ 的值就是 $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \{\frac{i}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}^k$ 的取法种数减去 $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \{\frac{i+1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}^k$ 的取法种数. 所以 $|\bar{Q}^{-1}(\frac{i}{n-1})| = (n-i)^k - (n-i-1)^k$.

当 $i = n-1$ 时, $\bar{Q}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{i}{n-1} = 1$ 当且仅当 $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \{1\}^k$, 因此只有一种取法. 又此时 $(n-i)^k - (n-i-1)^k = 1^k - 0^k = 1$, 因此当 $i = n-1$ 时, 有 $|\bar{Q}^{-1}(\frac{i}{n-1})| = (n-i)^k - (n-i-1)^k$.

综上所述, $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, $|\bar{Q}^{-1}(\frac{i}{n-1})| = (n-i)^k - (n-i-1)^k$.

$$= (n-i)^k - (n-i-1)^k.$$

3 真度定义的均值表示形式

定理 1(真度定义的均值表示形式) 在 n 值命题逻辑系统中, 设 $A = A(p_1, p_2, \dots, p_m) \in F(S)$ 是含有 m 个原子公式 $p_1, p_2, \dots, p_m$ 的命题公式, $\bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 是命题公式 A 所诱导的函数, 则有

$$\tau_n(A) = \frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in I_n^m} \bar{A}(x_1, \dots, x_m).$$

证明: 结合定义 3, 只需证明

$$\sum_{(x_1, \dots, x_m) \in I_n^m} \bar{A}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n-1} \left| \bar{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right) \right|.$$

$\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, 设 $E_i = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in I_n^m \mid \bar{A}(x_1, \dots, x_m) = \frac{i}{n-1}\}$ 那么当 $i \neq j$ 时 $E_i \cap E_j = \emptyset$, 且 $\bigcup_{i=0}^{n-1} E_i = I_n^m$.

由于 $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, $|E_i| = \left| \bar{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right) \right|$,

所以 $\sum_{(x_1, \dots, x_m) \in E_i} \bar{A}(x_1, \dots, x_m) = \frac{i}{n-1} | \bar{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right) |$,

从而 $\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in E_i} \bar{A}(x_1, \dots, x_m)$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n-1} \left| \bar{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right) \right|,$$

$$\text{即 } \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in \bigcup_{i=0}^{n-1} E_i} \bar{A}(x_1, \dots, x_m)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n-1} \left| \bar{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right) \right|,$$

所以 $\sum_{(x_1, \dots, x_m) \in I_n^m} \bar{A}(x_1, \dots, x_m)$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n-1} \left| \bar{A}^{-1}\left(\frac{i}{n-1}\right) \right|.$$

结合定义 3 得: $\tau_n(A) = \frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in I_n^m} \bar{A}(x_1, \dots, x_m)$.

定理 2(真度的对称性定理) 在 n 值命题逻辑系统中, 若 $\forall k \in Z^+$, $\overline{\neg p_k} = 1 - p_k$, 则 $\forall A(p_1, p_2, \dots, p_m) \in F(S)$, $\tau_n(A(p_1, p_2, \dots, p_m)) = \tau_n(A(P_1, P_2, \dots, P_m))$, 其中 $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, 或 $P_i = p_i$ 或 $P_i = \neg p_i$.

即把公式 A 中所含原子公式 $p_1, p_2, \dots, p_m$ 的部分原子公式分别换成它的否定, 公式 A 的真度不变.

证明: 设 $A = A(p_1, p_2, \dots, p_m) \in F(S)$ 是含有 m 个原子公式 $p_1, p_2, \dots, p_m$ 的命题公式.

把 A 中的原子命题 p_i 换成 $\neg p_i$, 公式 A 变成公式 B , 即

$$A(p_1, \dots, p_{i-1}, \neg p_i, p_{i+1}, \dots, p_m) = B(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \dots, p_m).$$

因此, $\forall (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) \in I_n^m$,

$$\bar{A}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1 - x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) = \bar{B}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m).$$

定义映射 $\phi: I_n^m \rightarrow I_n^m$, $\forall (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) \in I_n^m$,

$$\phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 1 - x_i, x_{i+1}, \dots, x_m)$$

由于 I_n 中的元素关于 $\frac{1}{2}$ 对称, 因此 $\phi: I_n^m \rightarrow I_n^m$ 为一一对应的映射.

$$\begin{aligned} & \text{所以 } \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in I_n^m} \bar{A}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in I_n^m} \bar{A}(\phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m)) \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in I_n^m} \bar{A}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1 - x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in I_n^m} \bar{B}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in I_n^m} \bar{A}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) \\ &= \frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in I_n^m} \bar{B}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) \end{aligned}$$

根据定理 1 得:

$$\tau_n(A(p_1, p_2, \dots, p_m)) = \tau_n(B(p_1, p_2, \dots, p_m)),$$

$$\text{即, } \tau_n(A(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \dots, p_m)) = \tau_n(A(p_1, \dots, p_{i-1}, \neg p_i, p_{i+1}, \dots, p_m)).$$

重复上面的方法可得:

$$\tau_n(A(p_1, p_2, \dots, p_m)) = \tau_n(A(P_1, P_2, \dots, P_m)).$$

其中 $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, 或 $P_i = p_i$ 或 $P_i = \neg p_i$.

定理 3(极限定理) 在连续值逻辑系统中, 设公式 $A(p_1, p_2, \dots, p_m) \in F(S)$ 诱导的函数 $\bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 黎曼可积, 则在连续值逻辑系统和相对应的 n 值逻辑系统中,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n(A) = \tau_{\infty}(A)$$

证明: n 等分区间 $[0, 1]$ 得到 n 个小区间: $[0, \frac{1}{n})$, $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n})$, $\dots$, $[\frac{n-1}{n}, 1]$, 则立方体 $[0, 1]^m$ 被分成 n^m 个体积为 $\frac{1}{n^m}$ 的小立方体. 由于 $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$, $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \cap I_n = \left\{ \frac{i}{n-1} \right\}$, 所以每个点 $(x_1, \dots, x_m) \in I_n^m$ 属于且仅属于一个小立方体. 由于函数 $\bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 在 $[0, 1]^m$ 上黎曼可积, 应用黎曼定积分的定义得:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^m} \sum_{(x_1, \dots, x_m) \in I_n^m} \bar{A}(x_1, \dots, x_m) \\ &= \int_{[0, 1]^m} \bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_m) dx_1 \cdots dx_m = \tau_{\infty}(A) \end{aligned}$$

因为在连续值 Łukasiewicz 命题逻辑系统中, 由 $A(p_1, p_2, \dots, p_m) \in F(S)$ 诱导的函数 $\bar{A}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 是连续函数, 因此是黎曼可积的, 从而可得到下面的推论 1.

推论 1 (Łukasiewicz 命题系统中的极限定理^[14]) 若 $A(p_1, p_2, \dots, p_m) \in F(S)$ 是含有 m 个原子公式 $p_1, p_2, \dots, p_m$ 的命题公式, 则在 n 值 Łukasiewicz 命题逻辑系统和连续值 Łukasiewicz 命题逻辑系统中,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n(A) = \tau_\infty(A).$$

4 $\bigvee_{i=1}^m (\bigwedge_{j=1}^s P_{ij})$ 型命题真度的计算公式

引理 3 在 n 值命题逻辑系统中, 设 $p_{11}, \dots, p_{1s_1}, p_{21}, \dots, p_{2s_2}, \dots, p_{m1}, \dots, p_{ms_m}$ 分别是两两不同的原子命题, $s = \sum_{j=1}^m s_j$, 则 $\tau_n(\bigvee_{i=1}^m (\bigwedge_{j=1}^{s_i} P_{ij})) = 1 - \frac{1}{(n-1)n^s} \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^m (n^{s_j} - i^{s_j})$.

证明: 首先记 $A = \bigvee_{i=1}^m (\bigwedge_{j=1}^{s_i} P_{ij})$, 并设 $A_j = p_{j1} \wedge \dots \wedge p_{js_j}, j = 1, \dots, m$.

$\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, \bar{A} = \frac{i}{n-1}$ 当且仅当 $(\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_m) \in \{0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{i}{n-1}\}^m$ 且 $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_m$ 中至少有一个等于 $\frac{i}{n-1}$.

根据引理 2, $\bar{A}_j \in \{0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{i}{n-1}\}$ 有取法种数

$$\sum_{k=0}^i ((n-k)^{s_j} - (n-k-1)^{s_j}) = n^{s_j} - (n-i-1)^{s_j}.$$

$\bar{A}_j \in \{0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{i-1}{n-1}\}$ 有取法种数

$$\sum_{k=0}^{i-1} ((n-k)^{s_j} - (n-k-1)^{s_j}) = n^{s_j} - (n-i)^{s_j}.$$

所以 $\bar{A} = \frac{i}{n-1}$ 有取法种数

$$\prod_{j=1}^m (n^{s_j} - (n-i-1)^{s_j}) - \prod_{j=1}^m (n^{s_j} - (n-i)^{s_j})$$

因此 $\tau_n(A) = \frac{1}{n^s} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n-1} (\prod_{j=1}^m (n^{s_j} - (n-i-1)^{s_j})$

$$- \prod_{j=1}^m (n^{s_j} - (n-i)^{s_j}))$$

$$= \frac{1}{(n-1)n^s} \sum_{i=1}^{n-1} i (\prod_{j=1}^m (n^{s_j} - (n-i-1)^{s_j}) -$$

$$\prod_{j=1}^m (n^{s_j} - (n-i)^{s_j}))$$

$$= \frac{1}{(n-1)n^s} \times (1 \times (\prod_{j=1}^m (n^{s_j} - (n-2)^{s_j})$$

$$- \prod_{j=1}^m (n^{s_j} - (n-1)^{s_j})) + 2 \times (\prod_{j=1}^m (n^{s_j} - (n-3)^{s_j}) -$$

$$\prod_{j=1}^m (n^{s_j} - (n-2)^{s_j})) + \dots$$

$$+ ((n-2) \times (\prod_{j=1}^m (n^{s_j} - 1^{s_j}) - \prod_{j=1}^m (n^{s_j} - 2^{s_j})) +$$

$$((n-1) \times (\prod_{j=1}^m (n^{s_j} - 0^{s_j}) - \prod_{j=1}^m (n^{s_j} - 1^{s_j})))$$

$$= \frac{1}{(n-1)n^s} ((n-1) \times \prod_{j=1}^m n^{s_j} - \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^m (n^{s_j} - i^{s_j}))$$

$$= \frac{1}{(n-1)n^s} ((n-1)n^s - \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^m (n^{s_j} - i^{s_j}))$$

$$= 1 - \frac{1}{(n-1)n^s} \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^m (n^{s_j} - i^{s_j}).$$

定理 4 在 n 值命题逻辑系统中, 若 $\forall k \in Z^+, \neg p_k = 1 - \overline{p_k}, P_{11}, \dots, P_{1s_1}, P_{21}, \dots, P_{2s_2}, \dots, P_{m1}, \dots, P_{ms_m}$ 分别是两两不同的原子命题 $p_{11}, \dots, p_{1s_1}, p_{21}, \dots, p_{2s_2}, \dots,$

$p_{m1}, \dots, p_{ms_m}$ 或其否定, $s = \sum_{j=1}^m s_j$, 则

$$\tau_n(\bigvee_{i=1}^m (\bigwedge_{j=1}^{s_i} P_{ij})) = 1 - \frac{1}{(n-1)n^s} \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^m (n^{s_j} - i^{s_j}).$$

证明: 根据定理 2, 引理 3 直接可得.

引理 4 在连续值命题逻辑系统中, 设 $p_{11}, \dots, p_{1s_1}, p_{21}, \dots, p_{2s_2}, \dots, p_{m1}, \dots, p_{ms_m}$ 分别是两两不同的原子命题, 则

$$\tau_\infty(\bigvee_{i=1}^m (\bigwedge_{j=1}^{s_i} P_{ij})) = \sum_{u=1}^m \frac{1}{s_u + 1} - \sum_{1 \leq u < v \leq m} \frac{1}{s_u + s_v + 1}$$

$$+ \sum_{1 \leq u < v < w \leq m} \frac{1}{s_u + s_v + s_w + 1} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{1}{s_1 + s_2 + \dots + s_m + 1}$$

证明: 根据引理 3, 有

$$\tau_n(\bigvee_{i=1}^m (\bigwedge_{j=1}^{s_i} P_{ij})) = 1 - \frac{1}{(n-1)n^s} \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^m (n^{s_j} - i^{s_j}) = 1$$

$$- \frac{1}{(n-1)n^s} \sum_{i=1}^{n-1} (n^s - \sum_{u=1}^m n^{s-u} i^{s_u} + \sum_{1 \leq u < v \leq m} n^{s-s_u-s_v} i^{s_u+s_v} -$$

$$- \sum_{1 \leq u < v < w \leq m} n^{s-s_u-s_v-s_w} i^{s_u+s_v+s_w} + \dots + (-1)^m i^{s_1+s_2+\dots+s_m})$$

$$= \frac{1}{(n-1)n^s} \sum_{i=1}^{n-1} (\sum_{u=1}^m n^{s-s_u} i^{s_u} - \sum_{1 \leq u < v \leq m} n^{s-s_u-s_v} i^{s_u+s_v} +$$

$$+ \sum_{1 \leq u < v < w \leq m} n^{s-s_u-s_v-s_w} i^{s_u+s_v+s_w} + \dots + (-1)^m i^{s_1+s_2+\dots+s_m})$$

$$= \frac{1}{(n-1)n^s} (\sum_{u=1}^m n^{s-s_u} \sum_{i=1}^{n-1} i^{s_u} - \sum_{1 \leq u < v \leq m} n^{s-s_u-s_v} \sum_{i=1}^{n-1} i^{s_u+s_v} +$$

$$\sum_{1 \leq u < v < w \leq m} n^{s-s_u-s_v-s_w} \sum_{i=1}^{n-1} i^{s_u+s_v+s_w} - \dots +$$

$$(-1)^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} i^{s_1+s_2+\dots+s_m})$$

再由定理 3 及引理 1, 就有

$$\tau_\infty(\bigvee_{i=1}^m (\bigwedge_{j=1}^{s_i} P_{ij})) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n(\bigvee_{i=1}^m (\bigwedge_{j=1}^{s_i} P_{ij}))$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n-1)n^s} (\sum_{u=1}^m n^{s-s_u} \sum_{i=1}^{n-1} i^{s_u}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{1 \leq u < v \leq m} n^{s-s_u-s_v} \sum_{i=1}^{n-1} i^{s_u+s_v} \\
& + \sum_{1 \leq u < v < \omega \leq m} n^{s-s_u-s_v-s_\omega} \sum_{i=1}^{n-1} i^{s_u+s_v+s_\omega} - \cdots + \\
& (-1)^{m-1} \sum_{i=1}^{n-1} i^{s_1+s_2+\cdots+s_m} \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n-1)n^s} \left(\sum_{u=1}^m n^{s-s_u} \frac{n^{s_u+1} - q_{s_u}(n)}{s_u+1} \right. \\
& - \sum_{1 \leq u < v \leq m} n^{s-s_u-s_v} \frac{n^{s_u+s_v+1} - q_{s_u+s_v}(n)}{s_u+s_v+1} + \\
& \sum_{1 \leq u < v < \omega \leq m} n^{s-s_u-s_v-s_\omega} \frac{n^{s_u+s_v+s_\omega+1} - q_{s_u+s_v+s_\omega}(n)}{s_u+s_v+s_\omega+1} - \cdots + \\
& \left. (-1)^{m-1} \frac{n^{s_1+s_2+\cdots+s_m+1} - q_{s_1+s_2+\cdots+s_m}(n)}{s_1+s_2+\cdots+s_m+1} \right) \\
& = \sum_{u=1}^m \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{s_u+1} - q_{s_u}(n)}{(n-1)n^{s_u}(s_u+1)} - \\
& \sum_{1 \leq u < v \leq m} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{s_u+s_v+1} - q_{s_u+s_v}(n)}{(n-1)n^{s_u+s_v}(s_u+s_v+1)} + \\
& \sum_{1 \leq u < v < \omega \leq m} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{s_u+s_v+s_\omega+1} - q_{s_u+s_v+s_\omega}(n)}{(n-1)n^{s_u+s_v+s_\omega}(s_u+s_v+s_\omega+1)} - \cdots + \\
& (-1)^{m-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{s_1+s_2+\cdots+s_m+1} - q_{s_1+s_2+\cdots+s_m}(n)}{(n-1)n^s(s_1+s_2+\cdots+s_m+1)} \\
& = \sum_{u=1}^m \frac{1}{s_u+1} - \sum_{1 \leq u < v \leq m} \frac{1}{s_u+s_v+1} + \\
& \sum_{1 \leq u < v < \omega \leq m} \frac{1}{s_u+s_v+s_\omega+1} - \cdots + \\
& (-1)^{m-1} \frac{1}{s_1+s_2+\cdots+s_m+1}.
\end{aligned}$$

定理 5 在连续值命题逻辑系统中, 若 $\forall k \in Z^+$, $\overline{\neg p_k} = 1 - \overline{p_k}$, $P_{11}, \dots, P_{1s_1}, P_{21}, \dots, P_{2s_2}, \dots, P_{m1}, \dots, P_{ms_m}$ 分别是两两不同的原子命题 $p_{11}, \dots, p_{1s_1}, p_{21}, \dots, p_{2s_2}, \dots, p_{m1}, \dots, p_{ms_m}$ 或其否定, 则

$$\begin{aligned}
\tau_\infty \left(\bigvee_{i=1}^m \left(\bigwedge_{j=1}^{s_i} p_{ij} \right) \right) &= \sum_{u=1}^m \frac{1}{s_u+1} - \sum_{1 \leq u < v \leq m} \frac{1}{s_u+s_v+1} \\
&+ \sum_{1 \leq u < v < \omega \leq m} \frac{1}{s_u+s_v+s_\omega+1} \\
&- \cdots + (-1)^{m-1} \frac{1}{s_1+s_2+\cdots+s_m+1}
\end{aligned}$$

证明: 根据定理 4 和定理 3, 再结合引理 4 即得.

5 $\bigwedge_{i=1}^m \left(\bigvee_{j=1}^{s_i} P_{ij} \right)$ 型命题真度的计算公式

引理 5 在 n 值命题逻辑系统中, 设 $p_{11}, \dots, p_{1s_1}, p_{21}, \dots, p_{2s_2}, \dots, p_{m1}, \dots, p_{ms_m}$ 分别是两两不同的原子命题, $s = \sum_{j=1}^m s_j$, 则 $\tau_n \left(\bigwedge_{i=1}^m \left(\bigvee_{j=1}^{s_i} P_{ij} \right) \right) = \frac{1}{(n-1)n^s} \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^m (n^{s_j} - i^{s_j})$.

证明: 记 $B = \bigwedge_{i=1}^m \left(\bigvee_{j=1}^{s_i} P_{ij} \right)$, 并设 $B_j = p_{j1} \vee \cdots \vee p_{js_j}, j = 1, \dots, m$.

$\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, n-2\}, \bar{B} = \frac{i}{n-1}$ 当且仅当

$(\bar{B}_1, \dots, \bar{B}_m) \in \left\{ \frac{i}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1 \right\}^m$ 且 $\bar{B}_1, \dots, \bar{B}_m$ 中至少有一个等于 $\frac{i}{n-1}$.

根据引理 2, $\bar{B}_j \in \left\{ \frac{i}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1 \right\}$ 有取法种数

$$\sum_{k=i}^{n-1} ((k+1)^{s_j} - k^{s_j}) = n^{s_j} - i^{s_j}.$$

$\bar{B}_j \in \left\{ \frac{i+1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1 \right\}$ 有取法种数

$$\sum_{k=i+1}^{n-1} ((k+1)^{s_j} - k^{s_j}) = n^{s_j} - (i+1)^{s_j}.$$

所以 $\bar{B} = \frac{i}{n-1}$ 有取法种数

$$\prod_{j=1}^m (n^{s_j} - i^{s_j}) - \prod_{j=1}^m (n^{s_j} - (i+1)^{s_j}).$$

当 $i = n-1, \bar{B} = \frac{i}{n-1}$ 当且仅当 $(\bar{B}_1, \dots, \bar{B}_m) \in \{1\}^m$;

又据引理 2, $\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}, \bar{B}_j = 1$ 共有 $n^{s_j} - (n-1)^{s_j}$

种取法, 因此 $\bar{B} = \frac{i}{n-1}$ 共有 $\prod_{j=1}^m (n^{s_j} - (n-1)^{s_j})$ 种取法. 又此时 $\prod_{j=1}^m (n^{s_j} - (n-1)^{s_j}) = \prod_{j=1}^m (n^{s_j} - i^{s_j}) - \prod_{j=1}^m (n^{s_j} - (i+1)^{s_j})$.

因此, 当 $i = n-1$ 时, $\bar{B} = \frac{i}{n-1}$ 有取法种数

$$\prod_{j=1}^m (n^{s_j} - i^{s_j}) - \prod_{j=1}^m (n^{s_j} - (i+1)^{s_j}).$$

综上所述, $\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \bar{B} = \frac{i}{n-1}$ 有取法

种数 $\prod_{j=1}^m (n^{s_j} - i^{s_j}) - \prod_{j=1}^m (n^{s_j} - (i+1)^{s_j})$.

因此

$$\begin{aligned}
\tau_n(B) &= \frac{1}{n^s} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n-1} \left(\prod_{j=1}^m (n^{s_j} - i^{s_j}) - \prod_{j=1}^m (n^{s_j} - (i+1)^{s_j}) \right) \\
&= \frac{1}{(n-1)n^s} \sum_{i=1}^{n-1} i \left(\prod_{j=1}^m (n^{s_j} - i^{s_j}) - \prod_{j=1}^m (n^{s_j} - (i+1)^{s_j}) \right) \\
&= \frac{1}{(n-1)n^s} \times (1 \times \left(\prod_{j=1}^m (n^{s_j} - 1^{s_j}) - \prod_{j=1}^m (n^{s_j} - 2^{s_j}) \right) \\
&+ 2 \times \left(\prod_{j=1}^m (n^{s_j} - 2^{s_j}) - \prod_{j=1}^m (n^{s_j} - 3^{s_j}) \right) + \cdots \\
&+ ((n-2) \times \left(\prod_{j=1}^m (n^{s_j} - (n-2)^{s_j}) - \prod_{j=1}^m (n^{s_j} - (n-1)^{s_j}) \right) \\
&+ ((n-1) \times \left(\prod_{j=1}^m (n^{s_j} - (n-1)^{s_j}) - \prod_{j=1}^m (n^{s_j} - n^{s_j}) \right))
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(n-1)n^s} \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^m (n^s - i^s).$$

定理 6 在 n 值命题逻辑系统中, 若 $\forall k \in Z^+, \neg p_k = 1 - \overline{p_k}, P_{11}, \dots, P_{1s_1}, P_{21}, \dots, P_{2s_2}, \dots, P_{m1}, \dots, P_{ms_m}$ 分别是两两不同的原子命题 $p_{11}, \dots, p_{1s_1}, p_{21}, \dots, p_{2s_2}, \dots,$

$p_{m1}, \dots, p_{ms_m}$ 或其否定, $s = \sum_{j=1}^m s_j$. 则

$$\tau_n(\bigwedge_{i=1}^m (\bigvee_{j=1}^{s_i} P_{ij})) = \frac{1}{(n-1)n^s} \sum_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^m (n^s - i^s).$$

证明: 根据定理 2, 引理 5 直接可得.

引理 6 在连续值命题逻辑系统中, 设 $p_{11}, \dots, p_{1s_1}, p_{21}, \dots, p_{2s_2}, \dots, p_{m1}, \dots, p_{ms_m}$ 分别是两两不同的原子命题, 则

$$\begin{aligned} \tau_\infty(\bigwedge_{i=1}^m (\bigvee_{j=1}^{s_i} P_{ij})) &= 1 - \sum_{u=1}^m \frac{1}{s_u + 1} + \sum_{1 \leq u < v \leq m} \frac{1}{s_u + s_v + 1} \\ &- \sum_{1 \leq u < v < w \leq m} \frac{1}{s_u + s_v + s_w + 1} + \dots + \\ &(-1)^{m-1} \frac{1}{s_1 + s_2 + \dots + s_m + 1}. \end{aligned}$$

证明: 根据引理 5 和定理 3, 与引理 4 的证明类似.

定理 7 在连续值命题逻辑系统中, 若 $\forall k \in Z^+, \neg p_k = 1 - \overline{p_k}, P_{11}, \dots, P_{1s_1}, P_{21}, \dots, P_{2s_2}, \dots, P_{m1}, \dots, P_{ms_m}$ 分别是两两不同的原子命题 $p_{11}, \dots, p_{1s_1}, p_{21}, \dots, p_{2s_2}, \dots, p_{m1}, \dots, p_{ms_m}$ 或其否定, 则

$$\begin{aligned} \tau_\infty(\bigwedge_{i=1}^m (\bigvee_{j=1}^{s_i} P_{ij})) &= 1 - \sum_{u=1}^m \frac{1}{s_u + 1} + \\ &\sum_{1 \leq u < v \leq m} \frac{1}{s_u + s_v + 1} - \sum_{1 \leq u < v < w \leq m} \frac{1}{s_u + s_v + s_w + 1} + \dots + \\ &(-1)^{m-1} \frac{1}{s_1 + s_2 + \dots + s_m + 1}. \end{aligned}$$

证明: 根据引理 5 和定理 3, 结合引理 7 即可.

推论 2^[19] 在连续值命题系统中,

$$(1) \tau_\infty(p_1 \wedge \dots \wedge p_k) = \frac{1}{k+1};$$

$$(2) \tau_\infty(p_1 \vee \dots \vee p_k) = \frac{k}{k+1}.$$

证明(1): 应用引理 4, 令 $m=1, s_1=k$ 即得:

$$\tau_\infty(p_1 \wedge \dots \wedge p_k) = \frac{1}{k+1}.$$

证明(2): 应用引理 6, 令 $m=1, s_1=k$ 即得:

$$\tau_\infty(p_1 \vee \dots \vee p_k) = 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}.$$

例 1 在 n 值命题逻辑系统中, 设 p, q, r 是两两互不相同的原子命题. 应用引理 5, 令 $m=2, s_1=2, s_2=1$ 即得:

$$\begin{aligned} \tau_n((p \vee q) \wedge r) &= \frac{1}{(n-1)n^3} \sum_{i=1}^{n-1} (n^2 - i^2)(n-i) \\ &= \frac{1}{(n-1)n^3} \left(\sum_{i=1}^{n-1} n^3 - \sum_{i=1}^{n-1} n^2 i - \sum_{i=1}^{n-1} n i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i^3 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(n-1)n^3} \left(n^3(n-1) - n^2 \frac{n(n-1)}{2} \right. \\ &\quad \left. - n \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n^2(n-1)^2}{4} \right) \\ &= \frac{5n-1}{12n}. \end{aligned}$$

进而, 如果在 n 值命题逻辑系统中, 例如在 n 值 Łukasiewicz 命题逻辑系统^[22~24]中, 或者在 n 值 R_0 -型命题逻辑系统 L_n^* ^[22,23]中, $\forall i \in Z^+, \neg p_i = 1 - \overline{p_i}$, 则根据定理 2 知将 $(p \vee q) \wedge r$ 中的原子命题 p , 或 q , 或 r 用其否定替换后得到的另外 7 个公式的真度与 $(p \vee q) \wedge r$ 的真度相等, 即有:

$$\begin{aligned} \tau_n((p \vee q) \wedge r) &= \dots = \tau_n((\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r) \\ &= \tau_n((p \vee q) \wedge r) = \frac{5n-1}{12n} \end{aligned}$$

参考文献

- [1] J Pavelka. On fuzzy logic: I, II, III[J]. Z Math Logik Grundlagen Math, 1979, 25: 45-52; 119-134; 447-464.
- [2] E W Adams. A Prime of Probability Logic[M]. Stanford: CSLI Publication, 1998.
- [3] G Gerla. Inference in probability in probability Logic[J]. Artificial Intelligence, 1994, 70(1-2): 33-52.
- [4] D Dubois, H Prade. Possibility theory, probability theory and multiple-valued logics: A clarification[J]. Ann Math Artif Intell, 2001, 32(1-4): 35-66.
- [5] 王国俊. 模糊推理系统的全蕴涵三 I 算法[J]. 中国科学: E 辑, 1999, 29(1): 43-52.
WANG Guo-jun. Fully implication triple I methods for fuzzy reasoning system[J]. Science in China Series E, 1999, 29(1): 43-52. (in Chinese)
- [6] D MUNDICI. Averaging the truth-value in Łukasiewicz logic [J]. Studia Logica, 1995, 55: 113-127.
- [7] H W Liu, G J Wang. Teiple I method based on pointwise sustaining degrees[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2008, 55(11): 2680-2688.
- [8] H W Liu, G J Wang. Unified forms of fully implication restriction methods for fuzzy reasoning [J]. Information Sciences, 2007, 177(3): 956-966.
- [9] G J Wang, L Fu. Unified forms of triple I method[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2005, 49(5-6): 923-932.
- [10] H B Wu. Theory of generalized tautology in revised Kleene system[J]. Science in China(E), 2001, 44(3): 233-238.
- [11] 吴洪博, 周建仁, 张琼. $(3n+1)$ 值逻辑系统 R_0L 中公式的真度性质[J]. 电子学报, 2011, 39(10): 2230-2234, 2229.
WU Hong-bo, ZHOU Jian-ren, ZHANG Qiong. The properties of truth degrees of formulas in $(3n+1)$ -valued logic sys-

- tem R_0L [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(10): 2230 – 2234, 2229. (in Chinese)
- [12] 汪德刚, 谷云东, 李洪兴. 模糊模态命题逻辑及其广义重言式[J]. 电子学报, 2007, 35(2): 261 – 264.
WANG De-gang, GU Yun-dong, LI Hong-xing. Generalized tautology in fuzzy modal propositional logic [J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(2): 261 – 264. (in Chinese)
- [13] 胡明娣, 王国俊. 模糊模态逻辑中的永真式与准永真式[J]. 电子学报, 2009, 37(11): 2484 – 2488.
HU Ming-di, WANG Guo-jun. Tautologies and quasi-tautologies in fuzzy modal logic [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(11): 2484 – 2488. (in Chinese)
- [14] 王国俊, 李壁镜. Łukasiewicz n -值命题逻辑中公式的真度理论和极限定理[J]. 中国科学(E辑), 2005, 35(5): 561 – 569.
WANG Guo-jun, LI Bi-jing. Theory of truth degrees and limit theorems in Łukasiewicz n -valued propositional logic [J]. Science in China(E), 2005, 35(5): 561 – 569. (in Chinese)
- [15] 胡明娣, 王国俊. 对称逻辑公式在经典逻辑度量空间中的分布[J]. 电子学报, 2011, 39(2): 419 – 423.
HU Ming-di, WANG Guo-jun. Distribution of the symmetrical logic formulas in the classical logic metric space [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(2): 419 – 423. (in Chinese)
- [16] 张东晓, 李立峰. 二值命题逻辑公式的语构程度化方法[J]. 电子学报, 2008, 36(2): 325 – 320.
ZHANG Dong-xiao, LI Li-feng. Syntactic graded method of two-valued propositional logic formulas [J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(2): 325 – 320. (in Chinese)
- [17] 李俊, 王国俊. 逻辑系统 L_n^* 中命题的真度理论[J]. 中国科学(E辑), 2006, 36(6): 631 – 643.
LI Jun, WANG Guo-jun. Theory of truth degrees of proposition in logic sysem L_n^* [J]. Science in China(E), 2006, 36(6): 631 – 643. (in Chinese)
- [18] 王国俊, 宋建社. 命题逻辑中的程度化方法[J]. 电子学报, 2006, 34(2): 252 – 257.
WANG Guo-jun, SONG Jian-she. Graded method in propositional logic [J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(2): 252 – 257. (in Chinese)
- [19] 李壁镜, 王国俊. 正则蕴涵算子所对应的逻辑伪度量空间[J]. 电子学报, 2010, 38(3): 497 – 502.
LI Bi-jing, WANG Guo-jun. Logic pseudo-metric spaces of regular implication operators [J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(3): 497 – 502. (in Chinese)
- [20] G J Wang, H J Zhou. Quantitative logic [J]. Information Sciences, 2009, 179: 226 – 247.
- [21] H B Wu. The generalized truth degrees of quantitative logic in logic system L_n^* [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2010, 59: 2587 – 2596.
- [22] 王国俊. 非数理逻辑与近似推理 [M]. 北京: 科学出版社, 2000.
Wang Guo-jun. Nonclassical Mathematical Logic and Approximate Reasoning [M]. Beijing: Science Press, 2000. (in Chinese)
- [23] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理 [M]. 北京: 科学出版社, 2006.
Wang Guo-jun. Introduction to Mathematical Logic and Resolution Principle [M]. Beijing: Science Press, 2006. (in Chinese)
- [24] X Yang, D Yuan, K Y Qin. Lattice-Valued Logic [M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2003.
- [25] 郑毓信. 数学方法论 [M]. 广西: 广西教育出版社, 1996.
Zheng Yu-xin. Mathematical Methodology [M]. Guangxi: Guangxi Education Press, 1996. (in Chinese)

作者简介



吴洪博 男, 1959 出生, 陕西咸阳人, 博士, 陕西师范大学数学与信息科学学院教授. 研究方向为格上拓扑学与非经典数理逻辑.

E-mail: wuhb@snnu.edu.cn



周建仁 男, 1964 出生, 甘肃张掖人, 硕士, 河西学院副教授, 陕西师范大学访问学者. 研究方向为非经典数理逻辑.