

直方图均衡化的数学模型研究

吴成茂

(西安邮电大学电子工程学院,陕西西安 710121)

摘要: 从图像最优对比度出发,提出直方图均衡化的一类最优化数学模型及其增强方法.针对线性规划求解基于最优对比度的图像增强法效率极低的不足,首先对传统直方图均衡化方法建立灰度级映射的最优化数学模型;其次提出了传统直方图均衡化的一种改进型灰度级映射最优化模型;最后探讨了灰度级映射最优化模型解具有的性质,以及传统直方图均衡化和可调直方图均衡化可视为本文方法的特例.实验结果表明,本文所提出直方图均衡化的一类最优化模型是合理的且能获得满意的增强效果,相比传统直方图均衡化和可调直方图均衡化方法更具普适性.

关键词: 图像增强; 对比度; 直方图均衡化; 加权几何平均法

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2013)03-0598-05

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.03.030

Studies on Mathematical Model of Histogram Equalization

WU Cheng-mao

(School of Electronic Engineering, Xi'an University of Posts and Telecommunications, Xi'an, Shaanxi 710121, China)

Abstract: From the viewpoint of optimal image contrast measure, a kind of optimization mathematical models and its enhanced methods are proposed for image enhancement by histogram equalization. For the shortcoming of low operation efficiency of optimal contrast image enhancement method by linear programming, the gray level mapping optimization mathematical model for classical histogram equalization is established to improve its mathematical theory. The improved gray level mapping optimization models for histogram equalization are constructed by means of weighted geometry averaging in order to avoid the shortcoming of classical histogram equalization. The good properties of its optimal solution for gray level mapping optimization models are discussed, and the classical and adjustable histogram equalization methods are regarded as special cases of the proposed optimization mathematical models for image enhancement. Experimental results show that the optimization model of histogram equalization is reasonable and can obtain satisfactory image enhancement effect. To some extent, it is more universal than classical and adjustable histogram equalization methods.

Key words: image enhancement; contrast measure; histogram equalization; weighted geometry averaging method

1 引言

直方图均衡化因其简单、快速、有效已在图像增强中得到广泛研究和应用.鉴于直方图均衡只是改变原图像中同一灰度层上所有像素的灰度,导致均衡化图像的动态范围扩大,不可避免地存在不同程度的灰度“吞噬”现象,甚至增强后图像可能出现过暗、过亮、伪轮廓等不足,于是学者们提出了带有约束(如亮度、形状、熵等保持不变)的改进直方图均衡化增强方法^[1~5].由于直方图均衡化本身是典型的不适定问题,利用图像本身信息作为先验约束提出了正则化可调直方图均衡化方法^[6~7].另外,现有众多直方图均衡化方法缺乏对像素

空间邻域信息的考虑,于是学者们提出了多维直方图均衡化增强法^[8~10],对于彩色图像和纹理图像能极大地改善增强效果.总之,利用直方图信息进行对比度增强的方法非常众多,其最终归结于灰度级累计概率分布经线性映射实现灰度级的调整,但它并非完全适合复杂场合图像增强的需要,于是文献[11]提出了一种灰度级非线性变换的最优化对比度模型,为直方图均衡化方法奠定坚实的数学理论基础;同时,它将成为高动态范围图像增强、显示并实现色阶调整映射的有效工具.鉴于文献[11]方法需要求解大规模优化问题,不利于嵌入式实时图像增强处理需要,于是本文提出了传统直方图均衡化最优化对比度模型,对其进行改进并获得了一类新的

最优化对比度模型,它不仅具有传统直方图均衡化方法相同的时间复杂度,而且可避免传统直方图均衡化本身所存在的灰度级吞噬现象.本文所做工作为智能交通、遥感影像、生物医学等有关图像增强问题的解决提供了崭新的思路,同时在处理高动态图像增强、色阶映射和显示中也能发挥重要作用.

2 直方图均衡化方法

针对大小为 $m \times n$ 的灰度图像 G ,任意位置 (x, y) ($1 \leq x \leq m, 1 \leq y \leq n$) 所对应像素灰度值大小为 $g(x, y)$ ($0 \leq g(x, y) \leq L-1$) (这里 L 是图像灰度级总数),不同灰度级出现概率 p_i ($0 \leq i < L$) 可表示为

$$p_i = \frac{1}{m \times n} \sum_{x=1}^m \sum_{y=1}^n \delta(g(x, y) - i), 0 \leq i < L$$

$$\text{这里 } \delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}.$$

对灰度图像 G ,采用直方图均衡化增强的方法可描述为

$$\sum_{k=0}^i p_k - \frac{f(i)}{L-1} \geq 0, 0 \leq i < L \quad (1)$$

这里,函数 $f(i)$ ($0 \leq i < L$) 表示增强前图像灰度级 i 与增强后灰度级 $i' = f(i)$ 之间的映射关系.一般而言,直方图均衡化中常用的灰度级映射表达式为

$$i' = f(i) = \left\lfloor (L-1) \cdot \sum_{k=0}^i p_k \right\rfloor, 0 \leq i < L \quad (2)$$

由于灰度级映射式(2)仅为式(1)的一种特殊情形,导致传统直方图均衡化结果并不一定令人满意,甚至可能出现过亮、过暗的增强结果.

3 直方图均衡化模型

直方图均衡化已有很长的发展历史,但还没有有一定的数学理论可解释灰度级变换式(2)是如何得到的.从图像对比度出发,本文提出直方图均衡化灰度级变换的最优化数学模型.

假设直方图均衡化灰度级变换定义为

$$f: \{0, 1, \dots, L-1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, L-1\}$$

其中 $f(i) = \sum_{j=0}^i s_j$ ($0 \leq i < L$);

$$s_i \geq 0 (0 \leq i < L) \text{ 且 } \sum_{i=0}^{L-1} s_i < L.$$

在文献[11]定义图像对比度 $G(s) = \sum_{0 \leq j < L} p_j s_j$ 的启发下,本文利用对数加权平均法构造新的图像对比度并获得灰度级变换式(2)所对应的最优化模型为

$$\max \left\{ \sum_{i=0}^{L-1} p_i \ln(s_i) \right\} \quad (3)$$

$$\text{s.t. } (1) s_i \geq 0 (0 \leq i < L);$$

$$(2) \sum_{i=0}^{L-1} s_i = L^*;$$

$$(3) 0 < L^* < L.$$

该模型的最优解为 $s_i = L^* p_i, 0 \leq i < L$,其相应的灰度级映射表达式为

$$i' = \lfloor f(i) \rfloor = \left\lfloor L^* \sum_{j=0}^i p_j \right\rfloor, 0 \leq i < L \quad (4)$$

若选取参数 $L^* = L-1$,则获得传统直方图均衡化所对应的灰度级变换表达式(2).因此,本文所建议的传统直方图均衡化所对应的最优化模型式(3)是合理的.

由于最优化模型式(3)仅利用图像灰度的统计信息,缺乏对像素邻域空间信息的考虑,或者人的视觉对图像感知主观偏好的约束,导致该方法仍与传统直方图均衡化存在类似不足,于是文献[12,13]提出了信息熵保持不变的可变灰度级映射方法,但灰度级映射是经验型的,缺乏坚实的数学理论作支撑,很难引起学者们的高度重视.

4 直方图均衡化的改进模型

在文献[11]构造最优对比度准则时融合先验信息的启发下,利用传统综合评价中的几何加权平均法,并考虑人的视觉感知主观偏好特性,提出了一种直方图均衡化的改进最优化模型.

$$\max \left\{ \prod_{i=0}^{L-1} s_i^{(p_i + \lambda w_i)} \right\} \quad (5)$$

s.t.

$$(1) s_i > 0 (0 \leq i < L);$$

$$(2) \sum_{i=0}^{L-1} s_i = L^*;$$

$$(3) 0 < L^* < L.$$

该模型表达式 $\prod_{i=0}^{L-1} s_i^{p_i}$ 度量了图像对比度,其值越大则对比度越明显. $\prod_{i=0}^{L-1} s_i^{w_i}$ 反映了图像本身的先验信息,其值越大则利用先验信息越丰富.另外,该最优化对比度模型的目标函数可等价于 $\sum_{i=0}^{L-1} (p_i + \lambda w_i) \ln s_i$,于是采用拉格朗日乘子法获得其最优化模型式(5)的最优解为

$$s_i = \frac{L^* (p_i + \lambda w_i)}{1 + \lambda \sum_{j=0}^{L-1} w_j}, 0 \leq i < L \quad (6)$$

该模型其最优解在 $L^* = L-1$ 条件下所对应的灰度级映射表达式为

$$i' = \lfloor f(i) \rfloor = \left\lfloor \sum_{j=0}^i \frac{(p_j + \lambda w_j)(L-1)}{1 + \lambda \sum_{j=0}^{L-1} w_j} \right\rfloor, 0 \leq i < L \quad (7)$$

特别地,若 $\sum_{j=0}^{L-1} w_j = 1$ 时,则有

$$i' = f(i) = \left| \frac{L-1}{1+\lambda} \sum_{j=0}^i p_j + \frac{(L-1)\lambda}{1+\lambda} \sum_{j=0}^i w_j \right|, 0 \leq i < L \quad (8)$$

该式反映了主观偏好与客观信息相融合的灰度级映射法实现直方图均衡化增强的目的. 更进一步,若 $w_j = L^{-1} (0 \leq j < L)$ 时,则获得文献[6]可调直方图均衡化增强法所对应的灰度级映射表达式;若 $\lambda = 0$ 时,则获得传统直方图均衡化所对应灰度级映射表达式(2);若 $\lambda \rightarrow +\infty$ 时,则获得了仅依赖主观偏好信息的直方图均衡化方法 $i' = f(i) = \left| (L-1) \sum_{j=0}^i w_j \right|$. 因此,本文几何加权最优化模型是传统直方图均衡化,以及文献[6]可调直方图均衡化的一般推广. 另外,灰度级映射式相比传统直方图均衡化,以及文献[6]可调直方图均衡化的最大优势在于能够对灰度级概率 $p_i = L^{-1} (0 \leq i < L)$ 的图像实现增强.

5 实验及结果分析

针对彩色图像增强问题,首先将 RGB 颜色空间的彩色图像转化为 HSV 颜色空间的彩色图像,仅对其亮度进行增强处理,再将增强结果其转化为 RGB 颜色空间的彩色图像显示.

5.1 不同增强方法的时间测试

从理论分析可获得传统直方图均衡化的时间复杂度为 $O(L)$,文献[11]增强法的时间复杂度为 $O(L^3)$,本文所建议的改进最优化对比度模型增强法的时间复杂度为 $O(L)$. 为了比较这些增强法的时间差异性,本文采用 4 幅彩色图像(大小分别为 1024×683 、 756×506 、 800×533 、 600×400)进行测试(环境:酷睿双核 CPU,内存 4GB, MATLAB 编程),其详细结果如图 1 和表 1 所示(其中灰度级映射式(8)中的 $\lambda = 2$, $w_j = L^{-1}$, $0 \leq j < L$). 从表 1 所示的三类增强方法时间消耗来看,本文所建议的最优化对比度模型增强法具有极高的运行效率,能满足实时场合图像增强需要.

表 1 不同增强法时间开销(单位:s)

图片	文献[11]增强法	直方图均衡化	本文式(8)增强法
台灯图片	25155	0.0958	2.4063
日落图片	13262	0.0469	0.8905
图书图片	13543	0.0469	1.0469
广场图片	8618	0.0313	0.3594

5.2 几何加权最优化模型的增强测试

为了进一步证实本文所建议的最优化模型式(5)所对应灰度级映射式(8)(参数 $\lambda = 1 \sim 5$, $w_j = L^{-1}$, $0 \leq j$

$< L$)的有效性,给出了四幅光照效果较差图像的增强测试,其详细情况如图 2 所示,其中子图 c 表示本文所建议式(8)所获得增强结果(图片 1、2 和 4 的 $\lambda = 1$, 图片 3 的 $\lambda = 5$). 从图 2 所示的 4 幅图像增强结果来看,采用传统直方图均衡化增强结果明显不满意;然而采用本文式(8)进行增强所获结果明显较合理,主观感知满意且与原图像颜色相协调.



图 1 多种增强法结果



图 2 几何加权最优化模型增强测试

另外,为了研究灰度级映射表达式(8)中的参数 λ 和主观偏好权系数 w_j 对图像增强效果的影响,下面针对图 1 所示的书房图片选取参数 λ 分别为 1、5 和 10,以及参数 $w_j = L^{-1} 2^k (0 \leq j \leq L \cdot 2^{-k} - 1)$ 且 $w_j = 0 (2^{-k} L \leq j \leq L - 1)$, $k = 0, 1, 3, 5$ 进行分组增强测试,其详细结果如图 3 所示.

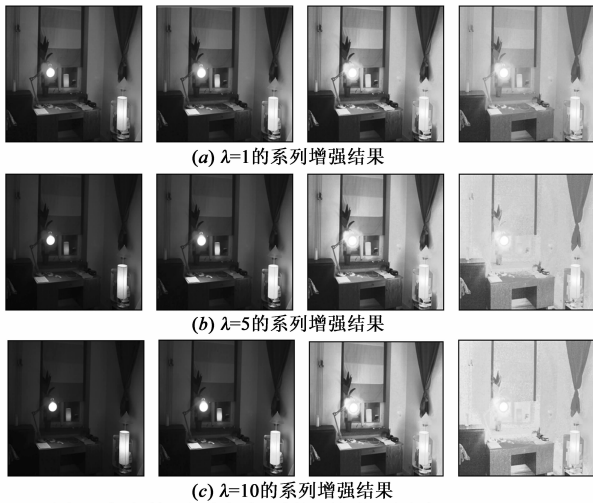


图3 变参数 λ 和偏好权系数 w 的增强测试
(子图从左至右所对应的 k 值分别为0、1、3和5)

从图3所示的系列增强结果来看,参数 λ 和主观偏好权系数 w 的选取对图像增强效果有很大影响.一般而言,参数 λ 可选取范围为1至5,灰度级偏好权系数所对应的方差不宜过大,才能使图像增强效果令人满意.另外,若偏好权系数固定且参数 λ 越大,导致本文所建议的最优化模型增强法所对应的增强效果越差.若参数 λ 固定且偏好权系数所对应的信息熵适中,有利于图像增强效果的改善需要.

5.3 几何加权最优模型参数选取方法

针对带有约束的最优化问题(5),其最优解 $L^* = L - 1, w_j = L^{-1}, 0 \leq j < L$ 的条件下,所对应的灰度级映射式(8)参数 λ 的经验选取方法:(1)若参数 $\lambda = 0$ 时,则该方法退化为传统直方图均衡化方法;(2)若参数 $\lambda \neq 0$ 时,则可考虑选取典型值为1.0、2.0、3.0和4.0;(3)若参数 λ 选取过大且 $w_j = L^{-1} (0 \leq j < L)$ 时,则该灰度级映射近似为自同构不动点映射,失去图像增强意义;(4)文献[14]给出了一种基于灰度直方图概率所对应的信息能量法确定参数 λ 的经验值且能满足大多数图像增强的需要.

另外,针对实际图像而言,若其灰度级概率分布呈均匀分布,采用传统直方图方法是无法达到改善对比度的目的.此时,可采用本文所建议的方法对其进行增强,特别是对某些灰度级图像信息存在一定偏好时,可将其偏好权系数 w_j 选取为非零,其它灰度级的偏好权系数选取为0,以便增强后的图像能满足需要.但是,若无法确定偏好灰度级时,可采用文献[15]中基于混沌的文化粒子群算法生成 $w_j (0 \leq j < L)$ 和 λ 的值,使得图像增强效果评价指标^[16]达到最佳值,从而实现彩色图像直方图均衡化自适应增强.

6 结论

直方图均衡化是图像增强中广泛应用的重要方法

之一,但缺乏严格数学理论基础,不利于其深入研究和广泛应用等需要.为此,本文建立了直方图均衡化灰度级映射最优化数学模型,不仅完善了现有直方图均衡化理论,而且对于局部直方图均衡化理论的研究将会有一定的指导作用.

另外,有关算术加权平均最优化模型,以及广义调和加权最优化模型的讨论可参考本文讨论,限于篇幅有限而省略.

致谢 感谢审稿人给本文提出的参考意见.

参考文献

- [1] Khellaf A, Beghdadi A, Dupoiset H. Entropic contrast enhancement[J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1991, 10(4): 589 - 592.
- [2] Kim Y L. Contrast enhancement using brightness preserving bi-histogram equalization [J]. IEEE Transactions on Consumer Electronics, 1997, 43(1): 1 - 8.
- [3] Caselles V, Lisani J L, Morel J M, Sapiro G. Shape preserving local histogram modification [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1999, 8(2): 220 - 230.
- [4] Wang C, Ye Z. Brightness preserving histogram equalization with maximum entropy: A variational perspective [J]. IEEE Transactions Consumer Electronics, 2005, 51(4): 1326 - 1334.
- [5] Sheet D, Garud H, Suyeer A, et al. Brightness preserving dynamic fuzzy histogram equalization [J]. IEEE Transactions on Consumer Electronics, 2010, 56(4): 2475 - 2480.
- [6] Arici T, Dikbas S, Altunbasak Y. A histogram modification framework and its application for image contrast enhancement [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2009, 18(9): 1921 - 1935.
- [7] Lee C, Lee C, Lee Y Y, et al. Power-constrained contrast enhancement for emissive displays based on histogram equalization [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2012, 21(1): 80 - 93.
- [8] Bassiou N, Kotropoulos C. Color image histogram equalization by absolute discounting back-off [J]. Computer Vision and Image Understanding, 2007, 107(1-2): 108 - 122.
- [9] Han J H, Yang S J, Lee B U. A novel 3-D color histogram equalization method with uniform 1-D gray scale histogram [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2011, 20(2): 506 - 512.
- [10] Celik T, Tjahjadi T. Contextual and variational contrast enhancement [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2011, 20(12): 3431 - 3441.
- [11] Wu X L. A Linear programming approach for optimal contrast-tone mapping [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2011, 20(5): 1262 - 1272.

- [12] Zhu Y L, Huang C. An adaptive histogram equalization algorithm on the image gray level mapping[J]. Physics Procedia, 2012, 25: 601 – 608.
- [13] 陈文飞, 廖斌, 许雪峰, 等. 基于 Piecewise 直方图均衡化的图像增强方法[J]. 通信学报, 2011, 32(9): 153 – 160.
Chen Wenfei, Liao Bin, Xu Xuefeng, et al. Piecewise histogram equalization based image enhancement[J]. Journal of Communications, 2011, 32(9): 153 – 160. (in Chinese)
- [14] 吴成茂. 可调直方图均衡化的正则解释及其改进[J]. 电子学报, 2011, 39(6): 1278 – 1284.
Wu Chengmao. Regularization explanation of adjustable histogram equalization and its improvement[J]. Acta Electronics Sinica, 2011, 39(6): 1278 – 1284. (in Chinese)
- [15] 郭一楠, 程健, 曹媛媛, 等. 基于混沌知识迁移的的多种群粒子群文化算法[J]. 控制理论与应用, 2011, 28(9): 1056 – 1062.

Guo Yanan, Cheng Jian, Cao Yuanyuan, et al. Multi-population particle swarm cultural algorithms adopting chaotic knowledge migration[J]. Control Theory&Applications, 2011, 28(9): 1056 – 1062. (in Chinese)

- [16] Gorai A, Ghosh A. Hue-preserving color image enhancement using swarm optimization[A]. Recent Advances in Intelligent Computational Systems[C]. Piscataway, NJ: IEEE, 2011, 563 – 568.

作者简介



吴成茂 男, 1968 年 10 月出生于四川省仪陇县. 现为西安邮电大学电子工程学院高级工程师、硕士生导师. 在国内外发表学术论文 80 余篇.

E-mail: wuchengmao123@sohu.com