

Wishart 分布矩阵行列式值的统计特性及其在参数估计中的应用

刘 涛, 崔浩贵, 高 俊

(海军工程大学电子工程学院, 湖北武汉 430033)

摘 要: 极化协方差矩阵行列式值表征了 Pol-SAR 图像目标散射极化散布程度, 它在参数估计中表现出突出的优势, 研究行列式值的物理内涵及其统计特性对揭示行列式值的优势的本质上有着重要的理论价值. 在此背景下, 将表征目标散射极化散布程度的标准行列式值与表征目标散射随机性的极化熵、极化散度进行了比较, 给出了它们与平面极化度和方向极化度的数学关系, 指出他们在描述目标散射随机特性方面具有部分一致性, 存在差异的本质在于三个随机性描述参数对极化方向随机度和平面极化度的加权方法的不同. 然后研究了极化协方差矩阵行列式值的统计分布特性, 给出了极化协方差矩阵行列式值的概率密度函数, 指出在视图数和样本数足够的情况下, 其行列式值的测量均值是渐进无偏估计. 针对样本数较少时等效视图数参数估计误差较大的问题提出了最大似然修正算法, 提高了小样本数目时的等效视图数参数估计精度. 最后用仿真数据对理论推导进行了验证, 结果表明了理论结果的正确性. 极化协方差矩阵行列式值的统计特性和目标散射随机性参数的研究为目标极化散射随机特性、参数估计和目标检测等的研究提供了新思路.

关键词: 雷达极化; 协方差矩阵; 梅林变换; 对数累积量; 极化度; 最大似然估计

中图分类号: TN95 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2013) 06-1231-07

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.06.030

Statistics of the Determinant of the Wishart Distributed Matrix and Its Application to Parameter Estimation

LIU Tao, CUI Hao-gui, GAO Jun

(School of Electronic Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan, Hubei 430033, China)

Abstract: The statistics of the covariance matrix with the Wishart distribution is fully developed to be used in the data analysis of multilook polarimetric radar images. The determinant of the covariance matrix describes the distributed degree of target scattering, which gives a good performance in parameter estimation. In this paper a comparison has been performed among the determinant of the normalized covariance matrix, polarization entropy and polarization diversity, which all characterize the distributed degree of the random scattering. The mathematical relations among them are been presented with the two variables; the degree of polarization and the degree of direction. The differences among three characterizing methods only lie on the different combination of the two variables. Then the statistics of the determinant of the Wishart distribution is analyzed via Mellin transform. The log-cumulants are obtained from the distribution of the determinant of a complex Wishart distributed matrix based on its characteristic function of the logarithm of the determinant of a complex covariance matrix. The probability density function of the determinant of the matrix is derived. The maximum likelihood estimation (MLE) is put up to improve the precision of parameter estimation based on the distribution of the determinant of the matrix. Finally the simulated data and experiment data are used to verify the correctness of the above theory, and the results are according to our derivation. The statistics of the determinant and the novel ML estimator of the equivalent number of looks are helpful to target detection, parameter estimation and segmentation.

Key words: radar polarimetry; covariance matrix; Mellin transform; method of log-cumulants; degree of polarization (DOP); MLE

1 引言

由于具有全天时、全天候以及不同目标极化特性的鉴别能力, 极化合成孔径雷达已经成为重要的遥感信息

获取源. 然而对于极化合成孔径成像雷达 (Pol-SAR) 而言, 相干成像所固有的相干斑噪声严重降低了雷达成像的质量, 有效抑制相干斑噪声是极化合成孔径雷达图像准确处理的前提条件. 相干斑抑制算法的基本要求是获取

收稿日期: 2012-04-23; 修回日期: 2013-01-15

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 6091069); 中国博士后科学基金 (No. 201150M1545); 湖北省自然科学基金 (No. 2012FB06902); 中国博士后科学基金特别资助 (No. 2012T50873)

相干斑随机分布的统计模型及相应的模型参数,其抑制效果无疑会受到模型和参数估计准确性的影响.目前已经研究了很多极化合成孔径雷达统计模型,包括高斯分布(幅度瑞利分布)、K-分布、Weibull分布等^[1-4].其中低分辨条件下对应着高斯分布的,极化协方差矩阵服从 Wishart 分布的统计模型在 SAR 图像多视处理中有着重要应用.在参数估计领域,传统的方法是最大似然估计和矩估计,但是它们在某些情形下存在解析表达式不易求取的弊端.最近法国学者 Nicolas 将梅林变换(Mellin Transform)成功应用到合成孔径雷达图像模型的参数估计问题的求解,取得了极佳的估计性能^[5-7].这个理论框架的核心技术是对数累积量的数学处理方法(MoLC)^[6,7].基于梅林变换的这种图像分析和处理方法已经在数据模型,相干斑滤波,目标分类,目标分割,变换检测,干涉参数估计和图像压缩等领域取得重要应用^[8-11].挪威学者 S N Anfinssen 意识到 Mellin 变换在参数估计领域的巨大潜能,将单极化的合成孔径雷达梅林变换处理方法扩展到全极化合成孔径雷达,建立了矩阵的梅林变换理论,提出了矩阵对数矩和矩阵对数累积量的概念^[9-11],为极化合成孔径雷达参数估计和随机分布模型拟合度的分析奠定了理论基础.经过研究发现,S N Anfinssen 所提出的矩阵对数矩和矩阵对数累积量本质上是极化协方差矩阵的行列式值的对数矩和对数累积量.在物理本质上,极化协方差矩阵行列式值表征目标散射极化散布程度,是目标极化散射相对随机性的表现,它与描述目标散射随机性的极化熵和极化散度有何差异是值得研究的一个问题.同时在参数估计中矩阵行列式值的估计的准确性也大大影响着后续等效视图数等关键参数的估计问题.目前在矩阵对数理论中行列式值的估计采用的是其观测值^[9],存在较大的偏差,因此研究矩阵行列式值的统计特性并给出基于其统计特性的最大似然估计无疑将会提高等效视图数等参数估计的估计精度,同时可以为 SAR 图像目标检测、识别等后续处理效果的提高奠定基础.因此本文将表征目标散射极化散布程度的标准行列式值与表征目标随机特性的极化熵、极化散度等进行了比较,给出了它们与特征值比值以及相互之间的数学关系,指出他们在描述目标散射随机特性方面具有部分一致性,本质区别在于三个随机性描述参数对极化方向随机度和平面极化度的加权方法的差异.同时研究了极化协方差矩正行列式值的统计分布特性,给出了极化协方差矩阵行列式值的概率密度函数及其最大似然估计方法,提高了小样本时等效视图数等关键参数估计的准确性.最后用仿真数据对理论推导进行了验证,结果验证了我们理论推导的正确性.极化协方差矩阵行列式值的统计特性的研究为目标极化

散射随机特性与参数估计的研究提供了新的思路.

2 多视极化 SAR 图像的协方差矩阵与特征值

多维极化 SAR 遥感系统能够获得 d 幅 SAR 复数值图像 S_i , 其中 $i = 1, 2, \dots, d$ ^[12,13]

$$\mathbf{k} = [S_1, S_2, \dots, S_d]^T \quad (1)$$

这里 T 表示转置.下标索引表示某一极化通道的 SAR 复图像数值. \mathbf{k} 是后向散射约定(BSA)下的目标全极化散射矢量.那么极化协方差矩阵定义为 $d \times d$ 维的半正定厄米特矩阵 \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = \begin{Bmatrix} E\{S_1 S_1^H\} & E\{S_1 S_2^H\} & \cdots & E\{S_1 S_d^H\} \\ E\{S_2 S_1^H\} & E\{S_2 S_2^H\} & \cdots & E\{S_2 S_d^H\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\{S_d S_1^H\} & E\{S_d S_2^H\} & \cdots & E\{S_d S_d^H\} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

其中 $E\{\cdot\}$ 表示数学期望.

协方差矩阵 \mathbf{C} 和 \mathbf{Z}_{Ld} 的特征值和特征矢量分解为^[12]

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{Q}^H \mathbf{C} \mathbf{Q}, \mathbf{\Xi} = \mathbf{U}^H \mathbf{Z}_{Ld} \mathbf{U} \quad (3)$$

$$\text{其中 } \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_d \end{bmatrix}, \mathbf{\Xi} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_d \end{bmatrix}, l_i$$

($i = 1, 2, \dots, d$) 表示真实协方差矩阵 \mathbf{C} 的特征值,且 $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_d$, 称作真实特征值; λ_i ($i = 1, 2, \dots, d$) 表示测量协方差矩阵 \mathbf{Z}_{Ld} 的特征值,且 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d$, 称作测量特征值.协方差矩阵 \mathbf{C} 和 \mathbf{Z}_{Ld} 的行列式的值为

$$\gamma |\mathbf{C}| = \prod_{i=1}^d l_i, \gamma = |\mathbf{Z}_{Ld}| = \prod_{i=1}^d \lambda_i \quad (4)$$

3 行列式值的物理意义分析

极化熵是香农信息理论中描述信息随机程度的物理量^[14,15];极化度一般是用来描述二维电磁波极化随机程度的物理量,现在描述三维电磁波的近场极化随机程度,并已经推广到目标散射随机性的描述上,发展成为描述近场电磁波或者目标随机散射特性的新参数极化散度^[14,15].极化协方差矩阵行列式的值在物理意义上也一定程度地描述了三维电磁波或者目标散射的随机性.因此这三种极化随机性描述的参数的区别与联系、是否可以相互替代是非常值得研究的.在特征值和特征矢量的极化分解方法中,其各向异性参数 P 定义为 $P = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, 它本质上是二维电磁波的极化度的概念,其真值记作 $P_0 = \frac{l_1 - l_2}{l_1 + l_2}$ ^[16].矩阵行列式值在描述随

机性时一般需要将其标准化以方便比较,因此建立标准化协方差矩阵,即 $N = d^d \mathbf{Z}_{ld} / \text{Trace}(\mathbf{Z}_{ld})$, 这里 $\text{Trace}(\mathbf{Z}_{ld})$ 表示测量协方差矩阵 \mathbf{Z}_{ld} 的迹,其行列式值为 $D = \frac{d^d \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_d}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_d)^d}$. 当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_d$ 时, 标准化行列式值 $D = 1$, 表明其随机度最大值已归一化.

在 $d = 1$ 时, 不存在随机性的概率, 因为电磁波或者目标参数是固定极化的. 在 $d = 2$ 时, 常规极化度 $P = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, 极化散度定义为 $R = 1 - P^2 = \frac{4\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}$; 极化熵定义为 $H = - \sum_{i=1}^2 p_i \ln p_i$, $p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2}$; 标准协方差矩阵的行列式值为 $D = \frac{4\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}$. 容易得到不同随机性描述参数与极化度的关系如下式所示:

$$\begin{cases} R = 1 - P^2 \\ H = - \left\{ \frac{1}{2}(1+P) \ln \left[\frac{1}{2}(1+P) \right] + \frac{1}{2}(1-P) \ln \left[\frac{1}{2}(1-P) \right] \right\} \\ D = 1 - P^2 \end{cases} \quad (5)$$

其关系示意图 1 如下图所示.

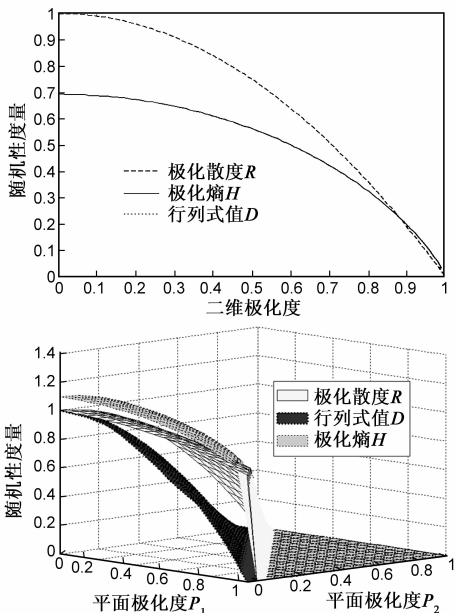


图 1 二维和三维情况下不同极化散射随机性度量的比较

在 $d = 3$ 时, 平面极化度定义为 $P_1 = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$, 方向极化度 $P_2 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$, 总体极化度为 $P^2 = \frac{1}{4}(3P_1^2 + P_2^2)$ (平面极化度表征传统意义上的平面波极化, 方向极化度表征近场条件下电磁波传播方向的稳定度)^[14,15], 极化散度定义为 $R = 1 - P^2 = 1 -$

$\frac{1}{4}(3P_1^2 + P_2^2)$ ^[14,15], 其中 $0 \leq P_1 \leq P_2 \leq 1$; 极化熵定义为 $H = - \sum_{i=1}^3 p_i \ln p_i$, $p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$; 标准协方差矩阵的行列式值为 $D = \frac{27\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3}$. 经过推导可以得到不同随机性描述参数与极化度的关系如下式所示:

$$\begin{aligned} R &= 1 - \frac{1}{4}(3P_1^2 + P_2^2) \\ H &= - \left\{ \frac{\left(1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{3}{2}P_1\right)}{3} \ln \left[\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{3}{2}P_1\right) \right] + \frac{\left(1 + \frac{1}{2}P_2 - \frac{3}{2}P_1\right)}{3} \ln \left[\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2}P_2 - \frac{3}{2}P_1\right) \right] + \frac{(1-P_2)}{3} \ln \left[\frac{1}{3}(1-P_2) \right] \right\} \\ D &= \left(1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{3}{2}P_1\right) \left(1 + \frac{1}{2}P_2 - \frac{3}{2}P_1\right) (1-P_2) \quad (6) \end{aligned}$$

由图 1 可见, 在三维散射情况下, 极化熵和极化散度非常接近, 而标准行列式值与它们差别较大. 根本原因在于它们对平面极化度和方向极化度的加权重不同. 在极化散度和极化熵中, 平面极化度对整体随机性贡献大于方向极化度的贡献, 而在标准协方差矩阵行列值中只要方向极化度为 1 (即方向确定), 那么整个散射随机性为 0, 与平面极化度无关, 这显然是不合理的. 在文献[14]中, 指出标准矩阵行列式值可以用来替代极化熵, 并给出了它们之间的数学关系, 并没有指出在什么情况下可以替代. 通过分析可以看出, 在方向极化度较小的情况下, 也就是第三特征值与前两个特征值之和可比时替代关系才能成立; 当方向极化度较大时, 极化散度和标准行列式值将会存在较大的差异. 图 1 也验证了文献[14]中用极化散度替代极化熵的可行性, 有利于加深对不同散射随机性描述参数的物理解释.

4 极化协方差矩阵行列式值的统计特性

在文献[9~11]中, S N Anfinson 已将极化协方差矩阵对数矩和矩阵对数累积量成功应用于极化合成孔径雷达多视图图像处理, 特别是矩阵对数累积量在参数估计和模型辨识方面的突出表现引起了学者们的兴趣. 其中等效视图数可以有效降低实测数据之间的相关性而使统计模型更加有效, 文献[9]对其做了专门的参数估计研究. 在数学方法上, 文献[9~11]所提出的矩阵对数累积量本质上是矩阵的行列式值的对数累积量, S N Anfinson 通过矩阵梅林变换的方法得到了其矩阵行列式值的对数累积量

$$c_{\ln \gamma} \{ \ln \gamma \} = \begin{cases} \psi_d^{(0)}(L) + \ln \Upsilon - d \ln L, & v = 1 \\ \psi_d^{(v-1)}(L), & v > 1 \end{cases} \quad (7)$$

其中 v 阶乘积伽马函数定义为

$$\psi_d^{(v)}(L) = \sum_{i=0}^{d-1} \psi_d^{(v)}(L-i) \quad (8)$$

且 $\psi^{(v)}(L)$ 定义为

$$\psi^{(v)}(L) = \frac{d^{v+1} \ln \Gamma(L)}{dL^{v+1}} \quad (9)$$

极化协方差矩阵行列式值的对数累积量在等效视图数等参数估计等领域已经获得广泛应用,适当应用式(7)可以对相干斑为 Wishart 分布的数据模型进行等效视图数等准确的参数估计,这也是文献[9]所采用的方法.从式(7)可以看出,如果对等效视图数进行估计,其估计效果受到协方差矩阵真值估计精度和协方差矩阵行列式值对数累积量的影响.其中协方差矩阵的真实值可以由多个样本的均值估计,但此估计在小样本时存在较大偏差,随着样本数的增加估计值渐进无偏.提高协方差矩阵行列式值的估计精度无疑将会提高等效视图数的估计精度.因此通过利用解析的方法求取矩阵行列式值 γ 的概率密度函数,然后利用最大似然估计的方法对行列式值的估计 $\hat{\gamma}$ 进行校正,将会提高行列式值以及等效视图数的估计精度,也能为极化 SAR 图像统计模型的准确建立提供理论依据.下面求取协方差矩阵行列式值的概率密度函数.

已知随机变量 $\eta = (2L)^d \gamma / \Upsilon$ 可以由 d 个独立的服从 χ^2 分布的随机变量的乘积组成, d 个 χ^2 分布随机变量的自由度分别为 $2L, 2(L-1), \dots, 2(L-d+1)$.易知矩阵单位行列式值 γ 的概率密度函数为(附录)

$$f_\gamma(\gamma) = \frac{L^d G_{0d}^d \left(\frac{L\gamma}{\Upsilon} \mid (L-1), \dots, (L-d) \right)}{\Upsilon \Gamma(L) \cdots \Gamma(L-d+1)} \quad (10)$$

如果 $d=1$,那么信号强度的概率密度函数可以简化为

$$f_\gamma(\gamma) = \frac{LG_{01}^1 \left(\frac{L\gamma}{\Upsilon} \mid (L-1) \right)}{\Upsilon \Gamma(L)} = \frac{L}{\Gamma(L) \Upsilon} \exp\left(-\frac{L\gamma}{\Upsilon}\right) \left(\frac{L\gamma}{\Upsilon}\right)^{L-1} \quad (11)$$

可见其服从广义指数分布.如果 $d=2$,极化协方差矩阵的行列式值的概率密度函数可以简化为

$$f_\gamma(\gamma) = \frac{2L^{2L-1}}{\Gamma(L)\Gamma(L-1)\Upsilon} \left(\frac{\gamma}{\Upsilon}\right)^{L-\frac{3}{2}} K_1\left(2L\sqrt{\frac{\gamma}{\Upsilon}}\right) \quad (12)$$

其中 $K_1(\cdot)$ 是第二类变型贝塞尔函数.

5 小样本等效视图数估计的最大似然修正算法

等效视图数的估计可以利用 $d=1, d=2$ 和 $d=3$ 时的不同阶子矩阵求解.一般而言高阶子矩阵的估计精度要比低阶子矩阵的估计精度高,这是由于高阶子矩阵充分利用了相关性的原因.但是低阶矩阵具有计算简单和计算量相对较低的优点,因此基于低阶子矩

阵的估计方法也有一定的应用前景.对于不同阶子矩阵,因其概率密度函数的不同,其行列式值的最大似然估计方法也是不同的. $d=1$ 时其最大似然估计条件为 $\frac{\partial \ln f_\gamma(\gamma)}{\partial \Upsilon} = 0$, 得到 $\hat{\Upsilon} = \gamma$. 可见在 1 维矩阵限制下,行列式真值的最大似然估计值就是其观测值. $d=2$ 时可以对式(12)取对数求其最大似然估计,即 $\frac{\partial \ln f_\gamma(\gamma)}{\partial \Upsilon} = 0$, 得到

$$K_0\left(2L\sqrt{\frac{\gamma}{\Upsilon}}\right) \times 2L\sqrt{\frac{\gamma}{\Upsilon}} = 2(L-1)K_1\left(2L\sqrt{\frac{\gamma}{\Upsilon}}\right) \quad (13)$$

从式(13)可以看出,在一定视图数下,最大似然估计值与观测值是成正比例的,即 $\frac{\hat{\gamma}}{\Upsilon} = r$, 可以通过数值方法求解.对于多样本多视图图像而言,其行列式值估计的总视图数可以看作 $N \times L$, 经数值求解可以得到其观测值与最大似然估计值的比值和视图数的关系.

可知在视图数较小和较小样本的情况下,需要利用最大似然估计比值对观测值进行校正,使行列式值的估计为最大似然估计.在视图数较大和样本数较大的情况下,其观测均值基本上等价于其最大似然估计.在利用对数累积量估计参数的时候,为简化计算,我们可以采用其名义视图数作为初值求其最大似然估计,然后求其等效视图数;情况允许的情况下,可以再将已有方法或者上述方法估计出的等效视图数作为初值带入行列式最大似然估计值的求解,继续求解最优的等效视图数,直到递推误差满足我们的设定条件.

通过仿真的方法对真实视图数为 10 的极化 SAR 图像进行等效视图数的参数估计,可有效验证最大似然估计修正算法的有效性.仿真方法采用 S N Anfinson 所采纳的 bootstrap 方法(详见文献[9]),极化协方差矩阵为 3×3 方阵,样本个数分别为 [2 4 8 16 32 64], 仿真次数为 10000 次.图 2 和图 3 中 D2 是二阶子矩阵的等效视图数估计方法;D2M 是二阶子矩阵等效视图数估计方法的最大似然修正算法;D3 是三阶全矩阵的等效视图数估计方法;D3M 是三阶全矩阵等效视图数估计方法的最大似然修正算法.可以看出,其估计性能的优劣顺序基本满足 $D3M \geq D2M \geq D3 \geq D2$, 这也说明适当的最大似然修正算法大大提高了等效视图数参数的估计精度.同时,在相同样本数情形下,较小视图数的估计偏差与估计方差要比较大视图数的估计偏差和估计方差小很多,其原因应该在于视图数较小时视图数对样本统计分布的影响较大,而样本统计分布变化随着视图数的增加逐渐变得不再对视图数敏感.从图 3 可以看出,随着名义视图数(仿真过程中可以看作真实视图

数)的增加(分别为[4 8 16 32 64]),等效视图数的估计偏差和方差都逐渐增加;在大样本情形下,修正算法与

原方法估计效果完全相同,但是估计偏差和方差也是随着名义视图数的增加而增加.

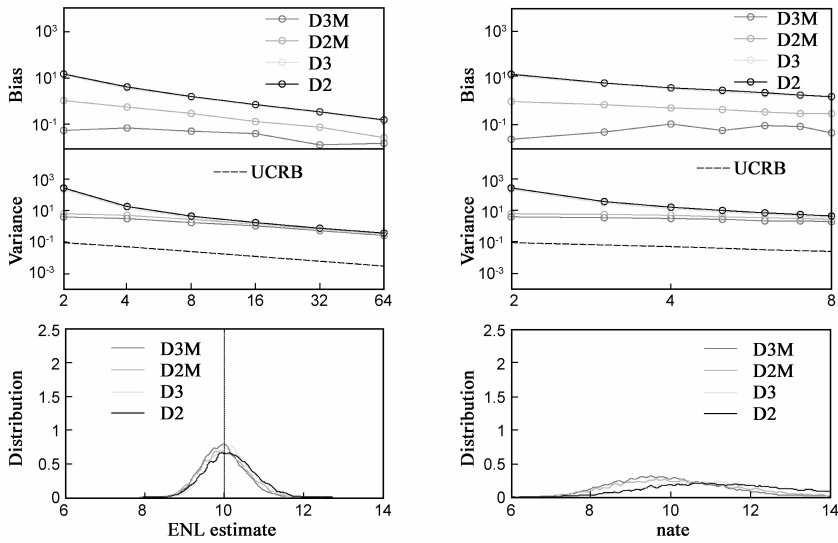


图2 理论视图数为10时不同等效视图数估计方法的性能对比图

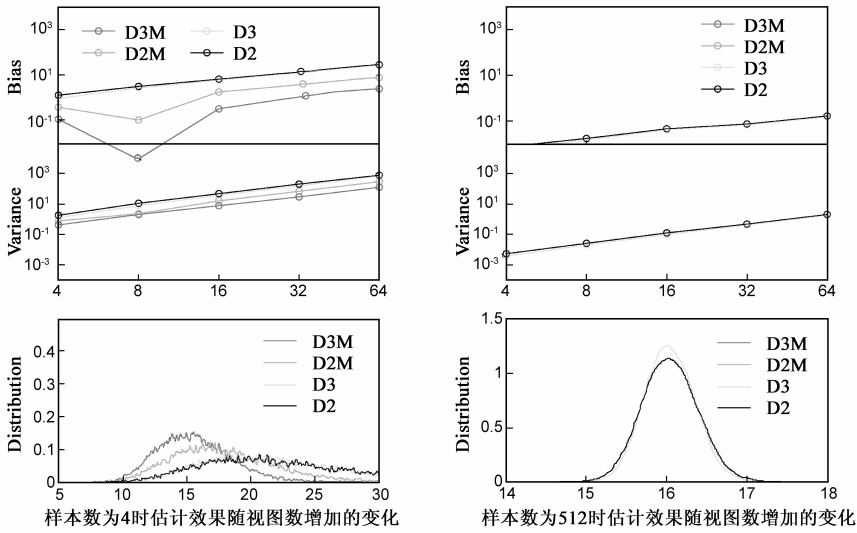


图3 不同方法的等效视图数估计方法随视图数增加估计偏差方差图

6 结束语

本文研究了协方差矩阵行列式的物理内涵,将表征目标散射极化散布程度的标准行列式值与表征目标随机特性的极化熵、极化散度进行了比较,给出了它们与平面极化度和方向极化度的数学关系,指出他们在描述目标散射随机特性方面具有部分一致性,存在差异的本质在于三个随机性描述参数对极化方向随机度和平面极化度的加权方法的不同.然后研究了极化协方差矩阵行列式值的统计分布特性,给出了极化协方差矩阵行列式值的概率密度函数.针对样本数较少时等效视图数参数估计误差较大的问题提出了最大似然

修正算法,提高了小样本数目时的等效视图数参数估计精度.最后用仿真数据进行了验证,结果表明了理论结果的正确性.极化协方差矩阵行列式值的统计特性和目标散射随机性参数的研究为目标极化散射随机特性、参数估计和目标检测等的研究提供了新方法.

附录 极化协方差矩阵行列式值的概率密度函数

从文献[17]知道包含协方差矩阵行列式观测值、真值和视图数三个参数的随机变量 $\eta = (2L)^d \gamma / \Upsilon$ 可以由 d 个独立的自由度分别为 $2L, 2(L-1), \dots, 2(L-d+1)$ 的 χ^2 随机变量的乘积构成.对于乘积模型随机变量的概率密度函数的求解可以通过梅林变换的方法.

乘积模型随机变量的表达式可以表示为:

$$X = U \cdot V \quad (A1)$$

这里要求随机变量满足 U, V , and $X \in \mathbf{R}^+$. 注意到梅林变换满足

$$\phi_X(s) = \varphi_U(s) \cdot \varphi_V(s) \quad (A2)$$

以及 $\chi^2(2n)$ 随机变量的梅林变换为

$$\begin{aligned} \varphi_{\chi^2(2n)}(s) &= \int_0^{\infty} x^{s-1} \frac{1}{2^n \Gamma(n)} x^{n-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) dx \\ &= \frac{2^{s-1} \Gamma(s+n-1)}{\Gamma(n)} \end{aligned} \quad (A3)$$

因此随机变量 $\eta = (2L)^d \gamma / \mathcal{T}$ 的梅林变换为

$$f_{\eta}(\eta) = \int \frac{\frac{1}{2\pi j} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(L+s-1) \cdots \Gamma((L-d+1)+s-1) \left(\frac{\eta}{2^d}\right)^{-s} ds}{2^d \Gamma(L) \cdots \Gamma(L-d+1)} \quad (A6)$$

利用 MeijerG 函数的定义^[18]

$$G_{pq}^{mn} \left(z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(b_i + s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i - s)}{\prod_{i=n+1}^p \Gamma(a_i + s) \prod_{i=m+1}^q \Gamma(1 - b_i - s)} z^{-s} ds \quad (A7)$$

记作 $G_{pq}^{mn} \left(z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \text{MeijerG}$

$\left[\left\{ \{a_1, \dots, a_n\}, \{a_{n+1}, \dots, a_p\} \right\}, \left\{ \{b_1, \dots, b_m\}, \{b_{m+1}, \dots, b_q\} \right\}, z \right]$, 等

式(A6)简化为

$$f_{\eta}(\eta) = \frac{G_{0d}^{d0} \left(\frac{\eta}{2^d} \left| \begin{matrix} (L-1), \dots, (L-d) \end{matrix} \right. \right)}{2^d \Gamma(L) \cdots \Gamma(L-d+1)} \quad (A8)$$

因此得到极化协方差矩阵行列式值的概率密度函数如下式(A9)所示.

$$f_{\gamma}(\gamma) = \frac{L^d G_{0d}^{d0} \left(\frac{L^d \gamma}{\mathcal{T}} \left| \begin{matrix} (L-1), \dots, (L-d) \end{matrix} \right. \right)}{\mathcal{T} \Gamma(L) \cdots \Gamma(L-d+1)} \quad (A9)$$

参考文献

- [1] Liu Tao, Huang Gao-ming, Wang Xue-song, Xiao Shun-ping. Statistics of the polarimetric Weibull-distributed electromagnetic wave[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2009, 57(10): 3232 - 3248.
- [2] 刘涛, 黄高明, 王雪松, 肖顺平. 基于 H/A 目标分解理论的统计分析[J]. 中国科学(F辑), 2010, 40(1): 102 - 114.
Liu Tao, Huang Gao-ming, Wang Xue-song, Xiao Shun-ping. Statistical assessment of H/A target decomposition theorems in radar polarimetry[J]. Science in China Series F: Information Sciences, 2010, 53(2): 355 - 366. (in Chinese)
- [3] 刘涛, 王雪松, 肖顺平. 标准 Stokes 参数的统计特性分析[J]. 中国科学(E辑), 2008, 38(12): 2241 - 2251.
Liu Tao, Wang Xuesong, Xiao Shunping. Statistical characteristics of the normalized Stokes parameters[J]. Science in China

$$\varphi_{\eta}(s) = \frac{2^{d(s-1)} \Gamma(L+s-1) \cdots \Gamma((L-d+1)+s-1)}{\Gamma(L) \cdots \Gamma(L-d+1)} \quad (A4)$$

利用逆梅林变换公式, 可以得到随机变量 $\eta = (2L)^d \gamma / \mathcal{T}$ 的概率密度函数为

$$\begin{aligned} f_{\eta}(\eta) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \eta^{-s} \varphi_{\eta}(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{2^{d(s-1)} \Gamma(L+s-1) \cdots \Gamma((L-d+1)+s-1)}{\Gamma(L) \cdots \Gamma(L-d+1)} \eta^{-s} ds \end{aligned} \quad (A5)$$

等式(A5)可以改写为

Series F: Information Sciences, 2008, 51(10): 1594 - 1606.

- [4] Liu Tao, Wang Xuesong, Xiao Shunping. Instantaneous coherent polarization and coherent polarimetric spectra[J]. Chinese Physics B, 2008, 17(3): 960 - 966.
- [5] B Epstein. Some applications of the Mellin transform in statistics[J]. Ann Math Statist, 1948, 19(3): 370 - 379.
- [6] J-M Nicolas. Introduction aux statistique de deuxieme espece: Application des logs-moments et des logs-cumulants \al' analyse des lois d'images radar[J]. Traitement du Signal, 2002, 19(3): 139 - 167.
- [7] J M Nicolas. Application de la transform'ee de Mellin: 'Etude Deslois Statistiques de l' imagerie Coh' erente [R]. Paris, France: Ecole Nationale Sup'erieure des T'el'ecomunications, 2006. Tech. Rep. 2006D010.
- [8] 时公涛, 赵凌君, 桂林, 等. 基于 Mellin 变换的 K 分布参数估计新方法[J]. 电子学报, 2010, 38(9): 2083 - 2089.
SHI Gongtao, ZHAO Lingjun, GUI Lin, et al. A novel parameter estimation method for the K distribution based on the mellin Transform[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(9): 2083 - 2089. (in Chinese)
- [9] S N Anfinen, A P Doulgeris, Torbjorn Eltoft. Estimation of the equivalent number of looks in polarimetric synthetic aperture radar imagery[J]. IEEE Trans Geosci Remote Sens, 2009, 47(11): 3795 - 3809.
- [10] S N Anfinen, Torbjorn Eltoft. Application of the matrix-variate Mellin transform to analysis of polarimetric Rrdar images [J]. IEEE Trans Geosci Remote Sens, 2011, 49(6): 2281 - 2295.
- [11] S N Anfinen, A P. Doulgeris and Torbjorn Eltoft. Goodness-

of-fit tests for multilook polarimetric radar data based on the mellin transform[J]. IEEE Trans Geosci Remote Sens, 2011, 49(7):2764 – 2781.

- [12] C L-Martinez, Eric Pottier, S R Cloude. Statistical assessment of eigenvector-based target decomposition theorems in radar polarimetry[J]. IEEE Trans Geosci Remote Sens, 2005, 43(9):2058 – 2074.
- [13] Liu Tao, H G Ming, W X Song, X S Ping. Statistical assessment of H/A target decomposition theorems in radar polarimetry[J]. Science China: Information Science, 2010, 53(2):355 – 366.
- [14] Jaan Praks, Elise Colin Koeniguer, Martti T. Hallikainen. Alternatives to target entropy and alpha angle in SAR polarimetry[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2009, 47(7):2262 – 2274.
- [15] J J Gil. Polarimetric characterization of light and media. Physical quantities involved in polarimetric phenomena[J]. Eur Phys J Appl Phys, 2007, 40(1):1 – 47.
- [16] Liu Tao. Comment on ‘Statistics of the degree of polarization’ [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2008, 56(9):3085 – 3086.
- [17] N R Goodman. The distribution of the determinant of a complex Wishart distributed matrix[J]. Ann Math Statist, 1963, 34(1):178 – 180.
- [18] Alexander Apelblat. Table of Definite and Infinite Integrals [M]. Amsterdam-Oxford-New York; Elsevier Science Publishing Company, 1983.

作者简介



E-mail: liutao1018@sina.com

刘 涛 男, 博士, 1978 年出生, 山东新泰人, 海军工程大学电子工程学院副教授, 目前研究方向为雷达极化信息处理, 新体制雷达研制及电子战建模与仿真等. 目前以第一作者在 IEEE Transactions、Science in China、Chinese Physics B、《中国科学》、《自然科学进展》、《物理学报》、《电子学报》、《电子与信息学报》、《电波科学学报》等期刊发表论文十余篇.



高 俊 男, 1957 年出生, 江苏泰兴人, 1989 年获北京理工大学电子工程专业博士学位, 现为海军工程大学电子工程学院教授, 博士生导师, 主要研究方向为信道编码和数字通信.

E-mail: gaojunj@163.com



崔浩贵 男, 1987 年出生, 浙江仙居人, 2011 年获得海军工程大学通信与信息系统专业硕士学位, 现为海军工程大学电子工程学院博士生, 主要研究方向为雷达极化信息处理、电子战建模与仿真.

E-mail: seachg@163.com