

多分辨 SVD 包理论及其在信号处理中的应用

赵学智, 叶邦彦

(华南理工大学机械与汽车工程学院, 广东广州 510640)

摘 要: 在奇异值分解(singular value decomposition, SVD)中提出了一种矩阵递推构造和分解算法, 利用 SVD 实现了一种类似于小波包的信号分解方式, 称之为多分辨 SVD 包. 推导了多分辨 SVD 包的分解和重构算法, 并提出一种用二维数组来存储这种包的三维数据的方法, 避免了对内存的浪费. 实例结果表明, 这种包对信号的微弱变化具有优良的检测能力, 其检测结果无幅值和相位失真, 并能精确定位微弱变化的位置, 这种包也能有效提取复杂信号中的弱故障特征, 在这两方面均明显优于小波包的处理结果.

关键词: 奇异值分解; 多分辨 SVD 包; 小波包; 分解与重构; 信号处理

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2012) 10-2039-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.10.023

Multi-resolution SVD Packet Theory and Its Application to Signal Processing

ZHAO Xue-zhi, YE Bang-yan

(School of Mechanical and Automotive Engineering, South China University of Technology, Guangzhou, Guangdong 510640, China)

Abstract: The recursion creation and decomposition of matrix is introduced into singular value decomposition (SVD), and a signal decomposition way, which is similar to wavelet packet and is called multi-resolution SVD packet, is realized with SVD. The decomposition and reconstruction algorithms of multi-resolution SVD packet are given. Besides, a method in which two-dimensional array is used to store the three-dimensional data of this packet is proposed so that the waste of computer memory can be avoided. The results of examples show that this packet has good ability to detect the faint change of signal, and the accurate position of faint change can be reliably detected, and furthermore, there is no distortion of amplitude and phase in detection result. In addition, this packet can effectively extract the weak fault feature from the complicated signal. In these two cases the processing results of multi-resolution SVD packet is much better than those of wavelet packet.

Key words: singular value decomposition; multi-resolution SVD packet; wavelet packet; decomposition and reconstruction; signal processing

1 引言

奇异值分解(Singular value decomposition, SVD)近年来在数据压缩^[1]、数据挖掘^[2]、信号处理^[3,4]、语音编码及特征提取^[5,6]、机器人运动控制^[7]、滤波算法设计^[8,9]等很多领域都得到了广泛的应用. 如在多维空气动力学数据进行压缩时, SVD 可以获得极大的压缩比, 而且当数据维数增大时, 压缩比成指数增加^[1]. 在数据挖掘中 SVD 可以对隐私数据提供更好的保护^[2]. 而 Aljazzar 等将 SVD 应用于 L 型天线阵列信号互相关矩阵的处理, 实现了 L 型天线阵列方位和高度的自动匹配^[3]. SVD 还能提高语音编码的量化效率^[5], 并改善语音特征提取效

果^[6]. 其他在提高机器人运动控制精度^[7]、增强滤波效果方面^[8,9] SVD 均有不俗的表现. 诸如此类的研究还有很多, 此处不再枚举. 所有这些研究反映了 SVD 在各个领域的广泛和重要应用, 但是从本质上来说, 这些研究都是利用 SVD 本身的特性来解决某特定领域的问题, 对 SVD 方法本身并没有做多少改进和提高. 本文通过对 SVD 方法的思考, 提出一种多分辨 SVD 包理论, 即利用 SVD 来实现一种类似于小波包的信号分解方式, 这与以往的 SVD 应用完全不同. SVD 和小波包分属两个完全不同的领域, 利用 SVD 来获得小波包的那种信号分解方式似乎不可实现, 本文解决了这个看起来不可能的问题. 通过构造合理的矩阵, 同时采用恰当的信号形

成方式,并与递推分解相结合,利用 SVD 实现了小波包的那种信号分解方式.实例分析证实了多分辨 SVD 包确实取得了与小波包极为相似的信号处理效果,并在信号微弱变化检测和故障特征提取这两方面优于小波包.

2 多分辨 SVD 包的提出及分解算法

SVD 是指:对于任一矩阵 $H \in R^{m \times n}$,总是存在正交矩阵 $U = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in R^{m \times m}$ 和正交矩阵 $V = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in R^{n \times n}$,使得:

$$H = USV^T \quad (1)$$

成立,式中 $S = (\text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q), O)$ 或者其转置,这取决于 $m \leq n$ 还是 $m > n$, $S \in R^{m \times n}$, O 代表零矩阵, $q = \min(m, n)$,且有 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_q > 0, \sigma_i (i = 1, 2, \dots, q)$ 称为矩阵 H 的奇异值^[10].

将 SVD 应用于信号处理时,首先必须利用信号构造出矩阵 H , H 的构造方式不同,则 SVD 的信号处理效果也有很大区别^[11].为了利用 SVD 实现小波包的那种信号分解效果,我们提出如下一种矩阵递推构造和分解算法:对于任何信号 $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$,首先构造行数为 2 的如下矩阵:

$$H = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{N-1} \\ x_2 & x_3 & \dots & x_N \end{pmatrix}$$

这样的矩阵经过 SVD 处理后,可以得到而且只能得到两个奇异值,其中第一个奇异值较大,而第二个奇异值较小,从这两个奇异值可以分别得到两个分量信号.我们的思想是:对得到的每个分量信号分别再取行数为 2 构造同样的矩阵,并进行 SVD 处理,这样,每个分量信号又可被分解为两个子分量信号,……,如此逐次进行,每分解一层,上一层的每个分量就会被进一步细分,从而将原始信号分解为一系列分量信号,其中,第一层得到 2 个信号,第二层得到 4 个信号,第三层得到 8 个信号,……,第 J 层得到 2^J 个信号.这样的分解过程与小波包的分解过程极为相似,故此称之为多分辨 SVD 包分解.

设对原始信号已进行了 $j-1$ 层 SVD 包分解,在第 $j-1$ 层得到 2^{j-1} 个信号,将它们记为 $A_{j-1}^i = (a_{j-1,1}^i, a_{j-1,2}^i, \dots, a_{j-1,N}^i)$,其中 N 为信号长度, i 为分量信号的序号, $i = 0, 1, 2, \dots, 2^{j-1} - 1$,利用 A_{j-1}^i 构造第 j 层中待分解的矩阵:

$$H_j^i = \begin{pmatrix} a_{j-1,1}^i & a_{j-1,2}^i & \dots & a_{j-1,N-1}^i \\ a_{j-1,2}^i & a_{j-1,3}^i & \dots & a_{j-1,N}^i \end{pmatrix}$$

对此矩阵进行 SVD 处理,得到:

$$H_j^i = U_j^i S_j^i (V_j^i)^T \quad (2)$$

式中, $U_j^i = (u_{j1}^i, u_{j2}^i)$, $U_j^i \in R^{2 \times 2}$;

$$V_j^i = (v_{j1}^i, v_{j2}^i, \dots, v_{j(N-1)}^i), V_j^i \in R^{(N-1) \times (N-1)},$$

它们分别为在第 j 层对分量信号 A_{j-1}^i 进行奇异值分解时获得的左、右正交矩阵,而对角阵 $S_j^i = (\text{diag}(\sigma_{j1}^i, \sigma_{j2}^i), O)$, $S_j^i \in R^{2 \times (N-1)}$.

为了得到 A_{j-1}^i 在第 j 层的分解结果,现将式(2)改写成用列向量 u_{jk}^i 和 v_{jk}^i 表示的形式:

$$H_j^i = \sigma_{j1}^i u_{j1}^i (v_{j1}^i)^T + \sigma_{j2}^i u_{j2}^i (v_{j2}^i)^T \quad (3)$$

式中, $u_{jk}^i \in R^{2 \times 1}$, $v_{jk}^i \in R^{(N-1) \times 1}$, $k = 1, 2$. 令 $H_{j1}^i = \sigma_{j1}^i u_{j1}^i (v_{j1}^i)^T$, 则 $H_{j1}^i \in R^{2 \times (N-1)}$, 它对应的是大奇异值,反映的是信号 A_{j-1}^i 的主体概貌成分;令 $H_{j2}^i = \sigma_{j2}^i u_{j2}^i (v_{j2}^i)^T$, 则 $H_{j2}^i \in R^{2 \times (N-1)}$, 它对应的是小奇异值,反映的是信号 A_{j-1}^i 的细节成分. A_{j-1}^i 在第 j 层的分解结果就是根据这两个矩阵获得的,所得到的两个分量信号在第 j 层中的序号分别为 2^i 和 2^{i+1} ,用 $A_j^{2^i}$ 和 $A_j^{2^{i+1}}$ 来表示. 现以 $A_j^{2^i}$ 为例,来说明它的形成过程. 矩阵 H_{j1}^i 有两个行向量,分别为 $\sigma_{j1}^i u_{j1,1}^i (v_{j1}^i)^T$ 和 $\sigma_{j1}^i u_{j1,2}^i (v_{j1}^i)^T$, 其中 $u_{j1,1}^i, u_{j1,2}^i$ 为 u_{j1}^i 的两个坐标. 设 L_{a1} 和 L_{a2} 是这两个行向量的子向量,如图 1(a), 显然 L_{a1} 和 L_{a2} 都代表着信号 $A_j^{2^i}$ 的数据 $a_{j,2}^{2^i}, a_{j,3}^{2^i}, \dots, a_{j,N-1}^{2^i}$, 但是 L_{a1} 和 L_{a2} 却并不会相等. 例如 $a_{j,2}^{2^i}$ 在 L_{a1} 中的值为 $\sigma_{j1}^i u_{j1,1}^i v_{j1,2}^i$, 而在 L_{a2} 中的值却为 $\sigma_{j1}^i u_{j1,2}^i v_{j1,1}^i$, 此二数值显然是不相等的. 为了获得信息完整的信号,我们先将 H_{j1}^i 中代表 $A_j^{2^i}$ 同一个数据的所有元素求平均,再利用这种均值作为 $A_j^{2^i}$ 的数据. 根据这种思想,参照图 1(a), 可将 $A_j^{2^i}$ 写为如下的向量形式:

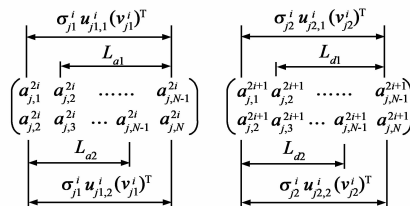


图 1 分量信号 $A_j^{2^i}$ 和 $A_j^{2^{i+1}}$ 的形成原理

$$A_j^{2^i} = (a_{j,1}^{2^i}, (L_{a1} + L_{a2})/2, a_{j,N}^{2^i}) \quad (4)$$

式中, $a_{j,1}^{2^i}, a_{j,N}^{2^i}$ 和子向量 L_{a1}, L_{a2} 的具体数值是通过向向量 $\sigma_{j1}^i u_{j1,1}^i (v_{j1}^i)^T$ 和 $\sigma_{j1}^i u_{j1,2}^i (v_{j1}^i)^T$ 的计算而得到的,它们在这两个向量中的位置如图 1(a) 所示.

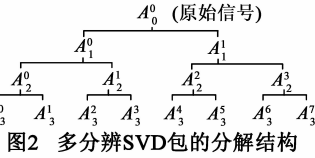
同理,对于矩阵 H_{j2}^i , 设其中与 L_{a1}, L_{a2} 对应的两个子向量分别为 L_{d1} 和 L_{d2} , 如图 1(b), 则 $A_j^{2^{i+1}}$ 也可表示为向量形式:

$$A_j^{2^{i+1}} = (a_{j,1}^{2^{i+1}}, (L_{d1} + L_{d2})/2, a_{j,N}^{2^{i+1}}) \quad (5)$$

式中, $a_{j,1}^{2^{i+1}}, a_{j,N}^{2^{i+1}}$ 和子向量 L_{d1}, L_{d2} 的具体数值是通过向向量 $\sigma_{j2}^i u_{j2,1}^i (v_{j2}^i)^T$ 和 $\sigma_{j2}^i u_{j2,2}^i (v_{j2}^i)^T$ 的计算而得到的,它们在这两个向量中的位置如图 1(b) 所示.

通过这种信号形成方式,就得到 A_{j-1}^i 在第 j 层的两个分量信号 $A_j^{2^i}$ 和 $A_j^{2^{i+1}}$, $i=0,1,2,\dots,2^{j-1}-1$. 如果将原始信号视为 A_0^0 ,按照这样的分解方式持续做下去,在第一层可以获得 2 个分量信号,在第二层可获得 4 个分量信号,在第三层可获得 8 个分量信号, ..., 在第 j 层可获得 2^j 个分量信号,整个多分辨 SVD 包的分解结构如图 2 所示. 设最大的分解层数为 J ,称 $\{A_j^i\}_{i=0}^{2^j-1}$ 为原始信号的多分辨 SVD 包分解结果.

来分析一下这样的分解结构. 对于第一层的两个分量, A_1^0 对应的是大奇异值,反映的是原始信号的主体概貌,而 A_1^1 对应的是小奇异值,反映的是原始信号的细节. 在第二层,概貌 A_1^0 又被分解为下一层次的概貌信号 A_2^0 和细节 A_2^1 ,而细节 A_1^1 则又被进一步细分为下一层次的两个细节 A_2^2 和 A_2^3 . 这样依次下去,对于第 j 层的分解结果,显然, A_j^0 反映的是原始信号第 j 层次的概貌,而其余 2^{j-1} 个信号则是对原始信号细节成分的充分剖析和展现. 不难想象,这样的一种分解方式对信号中的微弱变化应该具有优良的检测能力.



3 多分辨 SVD 包的重构算法

在解决了分解算法之后,还有一个重要问题是如何利用分解结果实现信号的重构. 如图 1, 矩阵 H_{j1}^i 和 H_{j2}^i 的两个子行向量分别为 L_{ak} 、 L_{dk} , $k=1,2$, 设在 A_{j-1}^i 构造的矩阵 H_j^i 中, 与之对应的两个子行向量分别为 L_k , $k=1,2$, 则根据式(3)可得:

$$L_k = L_{ak} + L_{dk} \quad k=1,2$$

则有:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 L_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 L_{ak} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 L_{dk}$$

但是对于矩阵 H_j^i 而言,它是利用 A_{j-1}^i 的数据构造而成的,因此其中代表信号同一数据的元素是相等的,即 $L_1 = L_2$,故可得:

$$L_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 L_{ak} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 L_{dk}$$

而对于各矩阵第一行的首元素和第二行的末元素,同样由式(3)可得到:

$$\begin{cases} a_{j-1,1}^i = a_{j,1}^{2^i} + a_{j,1}^{2^{i+1}} \\ a_{j-1,N}^i = a_{j,N}^{2^i} + a_{j,N}^{2^{i+1}} \end{cases}$$

从 A_{j-1}^i 构造的矩阵 H_j^i 可知, A_{j-1}^i 可写成如下向量形式:

$$A_{j-1}^i = (a_{j-1,1}^i, L_1, a_{j-1,N}^i)$$

再考虑到式(4)、式(5),则可以得到:

$$A_{j-1}^i = A_j^{2^i} + A_j^{2^{i+1}} \quad (6)$$

这表明只要利用 $A_j^{2^i}$ 和 $A_j^{2^{i+1}}$ 简单相加,就可重构出上一层的信号 A_{j-1}^i . 根据这种关系,容易得到原始信号 A_0^0 的重构公式为:

$$A_0^0 = \sum_{i=0}^{2^j-1} A_1^i = \sum_{i=0}^{2^j-1} A_2^i = \dots = \sum_{i=0}^{2^j-1} A_j^i \quad (7)$$

式中 J 是总的分解层数.

从式(6)还可以得到多分辨 SVD 包的细分结构,对于第 j 层的一个分量 A_j^i ,如果再对其向下分解 k 层 ($k \geq 1$),则可将其进一步细分为 2^k 个分量信号,从式(6)可得到 A_j^i 和这 2^k 个分量信号之间的关系为:

$$A_j^i = A_{j+k}^{2^k} + A_{j+k}^{2^k+1} + \dots + A_{j+k}^{2^k(i+1)-1} \quad (8)$$

这清楚地表明了多分辨 SVD 包的细分结构.

4 多分辨 SVD 包的数据存储结构

设原始信号长度为 N ,经多分辨 SVD 包分解 J 层,第 1 层有 2 个分量,第 2 层 4 个分量, ..., 第 J 层 2^J 个分量,每个分量的长度均为 N . 对于这样的数据结构,在编程计算时,一般都会采用一个三维数组 $S[J][2^J][N]$ 对分解结果进行储存,其中第 1 维为分解层数,第 2 维为每层的分量数,第 3 维为分量的具体数据. 例如对长度为 1024 点的原始信号分解 4 层,每层得到的分量数随层数的增加而加倍,在第 4 层的分量个数为 16,而每层每个分量长度均为 1024 点,按照常规方法,应采用一个三维数组 $S[4][16][1024]$ 来存储各层的分解结果,但是这种简单的存储法会造成计算机内存的极大浪费. 可以来分析一下这种浪费情况,第 1 层只有 2 个分量,只利用了 $S[0][0][1024]$ 、 $S[0][1][1024]$ 这两个分配的内存空间,其余 $S[0][2][1024] \sim S[0][15][1024]$ 共 14 个内存空间未曾利用,即容量为 $14k$ 的内存全部浪费;第 2 层只有 4 个分量,只利用了 $S[1][0][1024] \sim S[1][3][1024]$ 这 4 个内存空间,其余的 $S[1][4][1024] \sim S[1][15][1024]$ 共 12 个内存空间未曾利用,即容量为 $12k$ 的内存全部浪费;第三层只有 8 个分量,只利用了 $S[2][0][1024] \sim S[2][7][1024]$ 这 8 个内存空间,其余的 $S[2][8][1024] \sim S[2][15][1024]$ 共 $8k$ 的内存全部浪费;只有第 4 层利用了全部 $S[3][0][1024] \sim S[3][15][1024]$ 这 16 个内存空间. 更一般的,对于三维数组 $S[J][2^J][N]$ 而言,计算机共分配了 $J \cdot 2^J$ 个长度为 N 的内存空间,可以推知其中共有 $[2^J(J-2)+2]$ 个内存空间被浪费,请注意,如果用 8 个字节表示一个实数的 double 数据类型来编程,则浪费的内存空间还将增大 8 倍. 定义浪费率为:

$$\eta = \frac{2^J(J-2)+2}{2^J J} = 1 - \frac{2}{J} + \frac{1}{2^{J-1} J} \quad (9)$$

当 $J=4$ 时,内存浪费率为 53.125%, $J=5$ 时,浪费率为 61.25%,浪费的内存超过分配的内存容量一半还多,分解层数越多,内存浪费率越大,显然这是一种极不经济的储存方法。

为了避免内存的这种无谓浪费,我们提出一种用二维数组来存储多分辨 SVD 包的三维数据的方法.不失一般性,设对长度为 N 的原始信号分解 J 层,则 $1 \sim J$ 层的分量总数为 $2+4+8+\dots+2J=2^{J+1}-2$,因此可定义一个大小为 $S[2^{J+1}-2][N]$ 的二维数组,各层的数据依次存放在此数组中,其存储结构如图 3 所示.在编程计算时,为了从这个二维数组中正确读取各层分量的数据,必须设置一个位置指针来对各层在二维数组中的起始位置进行定位,第一层的位置指针 $p=0$,第二层 $p=2$,第三层 $p=2+4$,第四层 $p=2+4+8, \dots$,第 J 层 $p=2+4+8+\dots+2^{J-1}=2^J-2$.对多分辨 SVD 包的第 i 层分解结果来说,共有 2^i 个分量,利用位置指针,可确定它们在此二维数组中的范围为 $S[p][N] \sim S[p+2^i-1][N]$,其中 $i=1,2,\dots,J, p=2^i-2$.采用这样的存储方式,只需多计算一个位置指针,但不会造成内存的任何浪费,显然比简单地采用三维数组合理得多。

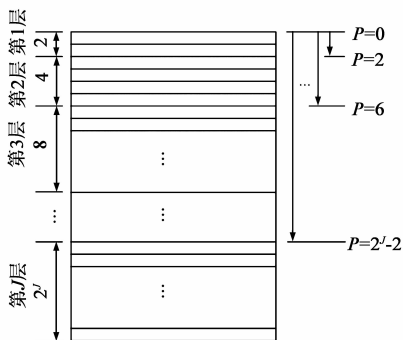


图3 多分辨SVD包的数据存储结构

5 对信号微弱变化的检测

在分析多分辨 SVD 包的分解结构时指出,这样的分解方式对信号中的微弱变化具有良好的检测能力.设有一个信号如下:

$$f(t) = \begin{cases} 6 & 1 \leq t \leq 50 \\ 6.005 & 50 < t \leq 100 \\ 6.002 & 100 < t \leq 150 \end{cases} \quad (10)$$

此信号在 $t=50\text{s}$ 处存在一个向上的微弱变化量 0.005,而在 $t=100\text{s}$ 处存在一个向下的微弱变化量 0.003,以采样周期 $T_s=1\text{s}$ 对此信号离散化采样得到的结果如图 4 所示,信号中的两处变化是如此微小,在图 4 中几乎看不出来,现利用多分辨 SVD 包对此信号分解 2 层,在第 2 层得到 4 个分量信号 $A_2^0 \sim A_2^3$,如图 5 所示,可见 A_2^0 与原始信号几乎相同,反映的是原始信号的概貌,这验

证了前面对 A_2^0 特性的分析,而信号的细微变化则在 $A_2^1 \sim A_2^3$ 中被充分展示出来了,此三个分量在原始信号发生微弱变化的地方都产生了极其明显的脉冲,而其余地方均为零。

令人鼓舞的不止于此,进一步的研究发现,这种脉冲的零交叉点非常精确地反映了原信号中微弱变化的发生位置.首先让我们来分析一下对 $f(t)$ 离散后信号微变的准确位置,对于原 $f(t)$ 来说,以 $T_s=1\text{s}$ 对其离散化采样后,在第 50s 到第 51s 这两点之间,信号发生微变,从 6 向上变为 6.005;而在第 100s 到第 101s 这两点之间,信号从 6.005 向下微变为 6.002.因此对于离散后的数字信号而言,如果要准确地描述其发生微变的位置,以 $t=50.5\text{s}$ 和 $t=100.5\text{s}$ 为准应该更为恰当。

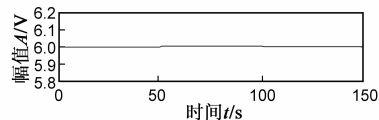


图4 一个存在微弱变化的信号 $f(t)$

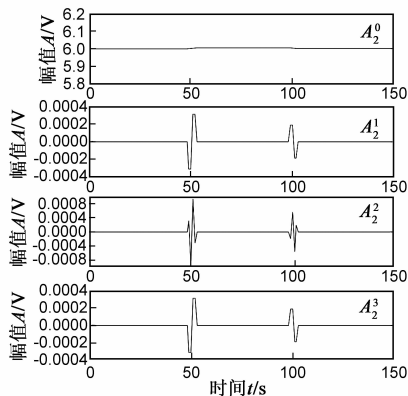


图5 多分辨SVD包对 $f(t)$ 中微弱变化的检测结果

更一般的,如果采样周期 T_s 为任意值时,则 $f(t)$ 离散后在 $t = [50/T_s] \cdot T_s \text{ s}$ 和 $t = ([50/T_s] + 1) \cdot T_s \text{ s}$ 这两点之间从 6 向上微变为 6.005,而在 $t = [100/T_s] \cdot T_s \text{ s}$ 和 $t = ([100/T_s] + 1) \cdot T_s \text{ s}$ 这两点之间从 6.005 向下微变为 6.002,这里符号 ‘ $[]$ ’ 表示取整,而两点的中点更适合于用来描述微变发生的准确时刻,即准确的微变点分别为 $([50/T_s] + 0.5) \cdot T_s \text{ s}$ 和 $([100/T_s] + 0.5) \cdot T_s \text{ s}$ 。

为了清楚地显示多分辨 SVD 包检测到的信号微变的具体位置,将 $A_2^1 \sim A_2^3$ 位于区间 $[46, 55]\text{s}$ 的局部波形绘在一起,如图 6 所示,可以发现此例中 A_2^1 和 A_2^3 完全相同,它们重合在一起,而 A_2^1, A_2^2 和 A_2^3 存在一个共同的零交叉点,这个零交叉点不偏不倚刚好发生在 $t=50.5\text{s}$ 处, $A_2^1 \sim A_2^3$ 中的三个检测脉冲以此零交叉点为中心呈准确的中心对称分布,且此三个检测脉冲的宽度

完全相同.

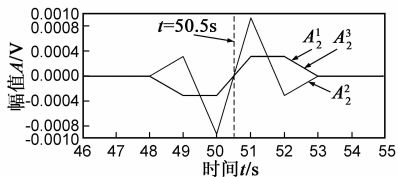


图6 多分辨SVD包对 $t=50.5s$ 处微变信号的精确检测

这种检测结果不是偶然的,对大量不同微弱变化信号的多分辨 SVD 包分解结果进行分析和总结,我们发现了以下规律:(1)多分辨 SVD 包的分解结果在信号的微变处将产生呈中心对称的脉冲,脉冲的中心零交叉点(即对称中心)精确地对应着微变的发生位置.(2)同一层上各个分量中指示微变位置的脉冲宽度完全相同.(3)随着分解层数的增加,检测脉宽的变化成规律性增加,如果采样周期为 T_s ,则第一层的检测脉宽为 $3T_s$,以后每增加一层,检测脉宽将沿中心零交叉点对称地增加 $2T_s$,即第二层的检测脉宽为 $5T_s$,第三层的检测脉宽为 $7T_s$.进一步的观察发现,这种 $2T_s$ 的增加量是由矩阵的行数 2 决定的,但难以解释其内在联系.(4)尽管各层的检测脉宽不同,但是对信号微变的定位不随层数的变化而产生任何偏移,各层检测脉冲的中心零交叉点始终精确地对应着原始信号中的微变位置.

小波包也具有对信号微弱变化的检测能力,不妨对比一下小波包的检测效果.小波包分解公式为:

$$\begin{cases} x_p^{2n,j+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in Z} h(k) \cdot x_p^{n,j}_{-2^j k} \\ x_p^{2n+1,j+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in Z} g(k) \cdot x_p^{n,j}_{-2^j k} \end{cases} \quad (11)$$

式中 $h(k)$ 、 $g(k)$ 为小波镜像滤波器系数.这是一种基于卷积小波包变换的分解算法,它的突出特点是不存在传统小波包的隔二抽一采样,因而每一层的分解结果保持了与原始信号相同的长度,而传统的小波包必须经过重构运算才能达到这种卷积小波包直接分解所获得的效果^[12].

采用 Daubechies 2 号小波系数,利用式(11)对图 4 的微变信号分解 2 层,在第二层也得到 4 个频道的信号,如图 7 所示,用 X_j^i 来表示小波包得到的分量信号,其中 j 代表分解层数,而 i 代表分量信号的频道号.可见这些信号与多分辨 SVD 包的分解结果非常相似,第 1 个信号同样反映了原始信号的基本概貌,而后 3 个信号则反映了信号的细节变化,在信号的微变处这 3 个信号也都产生了脉冲,这种检测效果看起来似乎也很不错.但是仔细观察一下,就可以发现小波包的检测结果存在以下三个问题:(1)指示信号微变位置的脉冲没有对称性.(2)指示信号微变位置的脉冲宽度较大,同一层

上的脉宽又互不相同,不同层数上的脉宽变化也没有规律.(3)更重要的是,这种脉冲不能准确地定位原始信号中微变的发生位置.将后 3 个频道信号位于区间 $[40,60]s$ 的波形绘在一起,如图 8 所示,它们反映了小波包对原信号在 $t = 50.5s$ 处微变的检测结果,可见这种检测脉冲极不规则,其零交叉点比较混乱,没有公共的零交叉点,只能大致判断出微变信号发生在区间 $[46,56]s$ 这一范围内,但无法确定原信号中准确的微变位置.

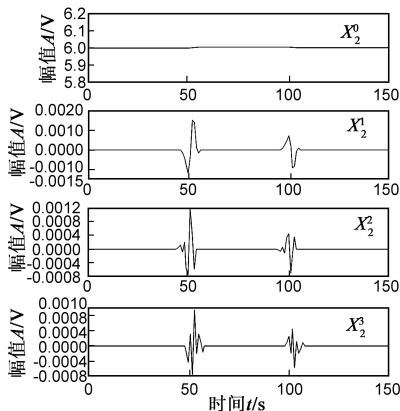


图7 小波包对 $f(t)$ 中微弱变化的检测结果

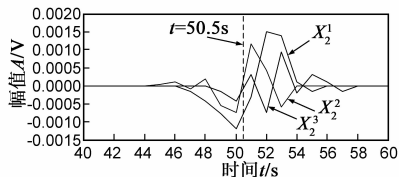


图8 小波包对 $t=50.5s$ 处微变信号的检测结果

6 对轴承振动信号中冲击特征的提取

当滚动轴承的滚道损伤时,滚动体高速旋转经过这些损伤处就会受到周期性的冲击,但当损伤比较轻微时,滚动体受到的冲击并不明显,往往被淹没于轴承的其它振动成分和噪声之中很难被识别和确认.对一个型号为 6208 的轴承进行振动检测,测量时外圈不动,径向加载 40N,内圈的旋转速度为 1000rpm,采样频率为

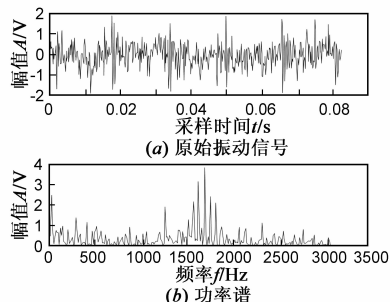


图9 轴承原始振动信号及其功率谱

6200Hz,共采集 512 点数据,得到振动速度信号如图 9(a)所示,其功率谱如图 9(b).由图 9 可见,在时域振动信号中可看到一些尖峰,但不是很明显,从功率谱看,此信号的频率成分十分复杂,整个频带上都存在频率成分,这是信号中含有较多随机噪声干扰的典型表现,因此难以确认时域信号中的尖峰到底是随机脉冲干扰还是由于滚道损伤所导致的冲击.

现在利用多分辨 SVD 包对此信号分解三层,在第 3 层得到 8 个分量信号 $A_3^0 \sim A_3^7$,如图 10(a)所示,其中 A_3^0 反映的是原始信号的概貌,而 $A_3^1 \sim A_3^7$ 反映的是原始信号的细节特征.可以看到,除 A_3^4 反映的更像是随机脉冲干扰外,在 $A_3^1 \sim A_3^3, A_3^5 \sim A_3^7$ 这 6 个分量信号中,都提取到了十分明显的周期性的冲击,其时间间隔十分均匀,随机脉冲干扰不可能如此均匀地出现,因而毫无疑问是滚道损伤所产生的冲击.

作为对比,也给出小波包的特征提取结果,采用 Daubechies 5 号小波系数,利用式(11)对图 9(a)的时域振动信号分解 3 层,在第 3 层也得到 8 个频道的信号,如图 10(b)所示.容易看出,在这 8 个分量中,只有 X_3^3 和 X_3^4 这两个分量获得的冲击特征比较有规律,冲击发生的时间间隔与多分辨 SVD 包 6 个分量所反映的是一样的;而 $X_3^5 \sim X_3^7$ 虽然也存在一些冲击现象,但是这种冲击比较杂乱无序,冲击的位置在不同分量中互不对应;而 $X_3^1 \sim X_3^2$ 这两个分量中则看不出冲击的存在,这样的效果显然不如多分辨 SVD 包的特征提取结果理想.

多分辨 SVD 包分解结果的另一个优点是它们真实地反映了原始信号中冲击成分的大小.根据式(7)所反映的叠加原理,图 10(a)中多分辨 SVD 包的这 8 个分量信号的简单相加就构成了原始信号,因此反过来可以说,这每一个分量信号的获得就相当于通过减法运算从原始信号中被简单减去的.这种减法运算保证了各分量中提取到的冲击成分既不会被放大也不会被缩小,而是真实地反映了原始信号中的冲击大小.另外对于相位来说,这种简单的减法运算也将保证分离出的分量信号保持它们在原信号中的相位不变,因而不存在相位滞后和失真,这种无幅值和相位失真的优点同样也表现在对信号微弱变化的检测中.

但是小波包则不同于此,它的分解结果是通过卷

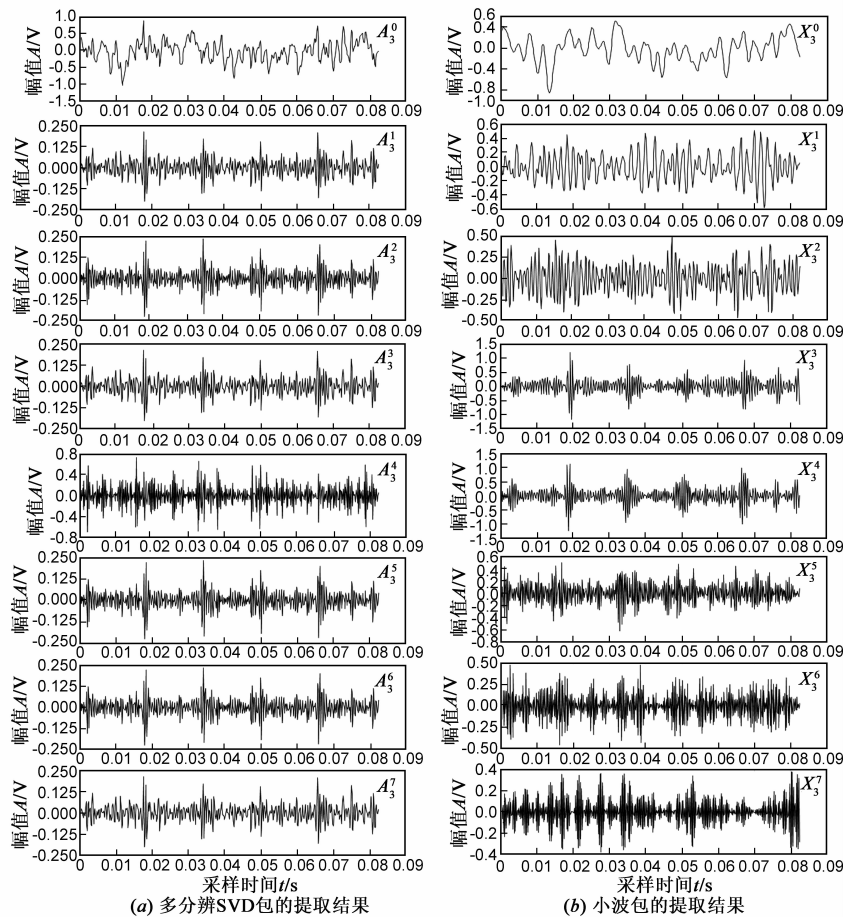


图10 多分辨SVD包和小波包对冲击特征的提取效果对比

积运算而得到的,其实质是带通滤波,而一般小波滤波器在通带内的幅频特性大于 1,因而对所提取的冲击特征的幅值有一定放大,而且小波滤波器在通带内也不可能具有均匀的幅频特性,因而对于不同频率的信号,其放大的程度还不一样,从而会导致一定的幅值失真.另外多数小波(包括 Daubechies 小波)都不具有线性相位,因此除了相位滞后外,小波包的分解结果还有一定的相位失真.

根据多分辨 SVD 包提取到的冲击特征还可以进一步对轴承的损伤情况做出准确诊断.在多分辨 SVD 包的分解结果中,选择冲击特征提取效果较好的 A_3^3 来做

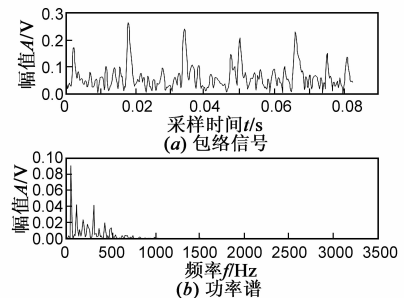


图11 A_3^3 的包络信号及其功率谱

进一步分析. 利用 Hilbert 变换提取 A_3^2 的包络, 如图 11(a) 所示, 它准确地反映了冲击发生的大小和时刻, 其功率谱如图 11(b) 所示, 其主要频率成分见表 1. 可见此包络信号的基频为 60.5469Hz, 除此之外还存在一个准确的二倍频 121.0938Hz, 而其它两个高次谐波基本上是 3 倍和 5 倍基频.

表 1 包络信号的主要频率及其幅值

| 频率 f/Hz | 幅值 A/V |
|------------------|----------|
| 60.5469 | 0.0906 |
| 121.0938 | 0.0423 |
| 193.7500 | 0.0238 |
| 314.8438 | 0.0417 |

根据轴承振动理论, 当内圈滚道存在损伤时, 冲击发生的基频由下式计算:

$$f_i = 0.5z(1 + d\cos\alpha/D) \cdot f_r \quad (12)$$

而外圈滚道存在损伤时, 冲击发生的基频为:

$$f_o = 0.5z(1 - d\cos\alpha/D) \cdot f_r \quad (13)$$

在上两式中, z 为滚动体个数, d 是滚动体直径, D 是轴承节径, α 是接触角, f_r 为轴承转速. 对于 6208 型轴承, $z = 9$, $d = 12\text{mm}$, $D = 60\text{mm}$, $\alpha = 15^\circ$, 而检测时轴承转速为 1000rpm, 根据这些数据可算得当内圈滚道损伤时, 冲击基频为 89.4889Hz, 而外圈滚道损伤时, 冲击基频为 60.5111Hz. 则由此可见, 在误差允许的范围内, 表 1 中的基频 60.5469Hz 就是外圈冲击的基频, 因此可以非常肯定地判定: 此轴承属外圈损伤, 另外根据二倍频 121.0938Hz 还可推断此轴承存在一定的内外圈不对中, 因为这会导致二倍频成分的出现; 根据另外的两个高次谐波还可以推知此轴承内外圈还存在一定松动, 因此此因素会导致高次谐波出现.

7 结论

(1) 提出了多分辨 SVD 包的概念, 利用 SVD 实现了对信号的一种类似于小波包的分解.

(2) 推导了多分辨 SVD 包的分解和重构算法. 对信号采用多分辨 SVD 包分解 j 层, 在第 j 层可得到 2^j 个分量信号, 其中第一个分量信号反映了原始信号的概貌, 其余的信号则反映了原始信号的细节变化, 而只要将这 2^j 个分量信号简单相加又可恢复出原始信号.

(3) 针对多分辨 SVD 包分解结果的数据结构特点, 提出一种利用二维数组来储存多分辨 SVD 包的三维数据的方法, 避免了内存的大量浪费.

(4) 多分辨 SVD 包对信号的微弱变化具有优良的检测效果, 在信号发生微变的地方, 会产生具有中心对称的脉冲, 同一层上的脉宽相等, 每增加一层, 脉冲将增加 2 个采样周期的宽度, 而脉冲的中心零交叉点始终精确地反映了信号微变的发生位置, 优于小波包的检

测结果.

(5) 多分辨 SVD 包可提取隐藏于复杂背景信号中的故障特征. 在对轴承振动信号的处理中, 它有效地提取到了信号中隐藏的周期性冲击特征, 其所得结果真实地反映了原信号中的冲击大小, 且无相位失真, 优于小波包的处理结果.

参考文献

- [1] Lorente L S, Vega J M, Velazquez A. Compression of aerodynamic databases using high-order singular value decomposition [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2010, 14(3): 168 – 177.
- [2] 李光, 王亚东. 一种改进的基于奇异值分解的隐私保持分类挖掘方法[J]. *电子学报*, 2012, 40(4): 739 – 743.
Li Guang, Wang Ya-dong. An improved privacy-preserving classification mining method based on singular value decomposition[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2012, 40(4): 739 – 743. (in Chinese)
- [3] Aljazzar S O, McIernon D C, Smadi M A. SVD-based joint azimuth/elevation estimation with automatic pairing [J]. *Signal Processing*, 2010, 90(5): 1669 – 1675.
- [4] Salmi J, Richter A, Koivunen V. Sequential unfolding SVD for tensors with applications in array signal processing [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(12): 4719 – 4733.
- [5] 王贵平, 鲍长春, 张鹏. 基于奇异值分解的低速率波形内插语音编码算法[J]. *电子学报*, 2006, 34(1): 135 – 140.
Wang Gui-ping, Bao Chang-chun, Zhang Peng. Low bit rates waveform interpolation speech coding based on singular value decomposition [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2006, 34(1): 135 – 140. (in Chinese)
- [6] Chakroborty S, Saha G. Feature selection using singular value decomposition and QR factorization with column pivoting for text-independent speaker identification [J]. *Speech Communication*, 2010, 52(9): 693 – 709.
- [7] Sheu J B, Huang J J, Lee J J. Kinematic synthesis of tendon-driven robotic manipulators using singular value decomposition [J]. *Robotica*, 2010, 28(1): 1 – 10.
- [8] Williams T, Ahmadi M, Miller W C. Design of 2D FIR and IIR digital filters with canonical signed digit coefficients using singular value decomposition and genetic algorithms [J]. *Circuits Systems and Signal Processing*, 2007, 26(1): 69 – 89.
- [9] 胡谋法, 董文娟, 王书宏等. 奇异值分解带通滤波背景抑制和去噪[J]. *电子学报*, 2008, 36(1): 111 – 116.
Hu Mou-fa, Dong Wen-juan, Wang Shu-hong, Chen Zeng-ping. Singular value decomposition band-pass-filter for image background suppression and denoising [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2008, 36(1): 111 – 116. (in Chinese)
- [10] 赵学智, 叶邦彦. SVD 和小波变换的信号处理效果相似

性及其机理分析[J]. 电子学报, 2008, 36(8): 1582 - 1589.
Zhao Xue-zhi, Ye Bang-yan. The similarity of signal processing effect between SVD and wavelet transform and its mechanism analysis[J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(8): 1582 - 1589. (in Chinese)

- [11] 赵学智, 叶邦彦, 陈统坚. 矩阵构造方式对奇异值分解信号处理效果的影响[J]. 华南理工大学学报: 自然科学版, 2008, 36(9): 86 - 93.

Zhao Xue-zhi, Ye Bang-yan, Chen Tong-jian. Influence of matrix creation way on signal processing effect of singular value decomposition[J]. Journal of South China University of Technology: Natural Science Edition, 2008, 36(9): 86 - 93. (in Chinese)

- [12] Zhao X Z, Ye B Y. Convolution wavelet packet transform and its application to signal processing[J]. Digital Signal Processing, 2010, 20(5): 1352 - 1364.

作者简介



赵学智 男, 1970 年生于湖南邵东, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事信号处理、奇异值分解理论与算法、模式识别和故障诊断等方面的研究.

E-mail: mezhaoxz@scut.edu.cn



叶邦彦 男, 1949 年生于广东广州, 教授, 博士生导师, 中国图像图形学会高级会员、中国机械工程学会高级会员、全国高等学校制造自动化研究会常务理事兼中南分会理事长. 主要从事制造自动化、图像处理、机器视觉、计算机检测与控制等方面的研究工作.