

# 多视点中固定焦距值的全局优化求解

陈 京,袁保宗,苗振江,唐晓芳

(北京交通大学信息科学研究所,北京 100044)

**摘 要:** 相机标定是从二维图像获取三维信息的必要步骤,本文讨论了多视点图像中固定焦距的自标定问题.在绝对对偶二次曲面的成像方程基础上,把固定焦距作为独立未知量纳入到目标函数中,构造了带约束的多项式极值问题,其中约束条件既反映了绝对对偶二次曲面自身具有的代数性质,又包含了可成像的 Cheirality 约束.求解上述优化问题时,传统的建立在梯度计算基础上的优化方法容易陷入局部最优值,本文则通过使用基于 LMI 松弛的优化方法获得了焦距的全局最优解.合成数据和真实图像实验均表明本文方法是可行的,具有计算时间快和鲁棒性好的优点.

**关键词:** 自定标;固定焦距;全局优化

**中图分类号:** TP302.7      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2012)09-1893-07

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.09.031

## Global Optimal Estimate of Constant Focal Length for Self-Calibration from Multiple Views

CHEN Jing, YUAN Bao-zong, MIAO Zhen-jiang, TANG Xiao-fang

(Institute of Information Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

**Abstract:** Camera calibration is an indispensable step to get three-dimensional information from images. In this paper constant focal length self-calibration from multiple views is under investigation. Our approach is based on explicit constraints which relate absolute dual quadric to its images. Two constrained polynomial minimization problems with respect to two types of parametrization on absolute dual quadric, whose properties are incorporated into the constraints, are proposed and solved by linear matrix inequality relaxation optimization method, which could avoid the local minimum. The difference with the other self-calibration approaches is that constant focal length is also an optimization variable besides the absolute dual quadric in the objective function. Experiments with simulated data and real images show that our approach works well.

**Key words:** self-calibration; constant focal length; global optimization

## 1 引言

自定标是实现未定标图像三维度量重建的关键技术之一,它在基于图像的建模、绘制<sup>[1]</sup>以及影视特效制作<sup>[2]</sup>等领域得到广泛的应用.对理想的透视投影成像模型,自定标需要标定焦距、主点、倾斜度和纵横比等5个量,这些未知量与相机的外部参数交织在一起相互影响,使得自定标算法存在较大的不稳定性 and 模糊性<sup>[3]</sup>.为了提高自定标的实用性,往往只标定相机的焦距而把其它参数设为已知的经验值,这些经验值往往与实际值吻合较好,从而在不影响自定标结果精确性的情况下,降低了问题求解的复杂度,例如 Boujou<sup>TM</sup>, ACTS<sup>[4]</sup>等相机跟踪软件,从无序图像中计算相机的运动和场景结构

的软件 Bundler<sup>[5]</sup>等都只把焦距作为未知量.当拍摄过程中相机的内部参数保持不变时,需要标定的参数简化为一个固定焦距量,本文研究如何应用当前的全局优化方法从多视点中求解此焦距值.

根据两视点图像间的匹配点坐标可以得到焦距的闭合形式解. Sturm 等<sup>[6]</sup>以 Kruppa 方程为基础推导出了关于焦距的两个线性和一个二次方程,他建议求解二次方程并根据线性方程选择合理的解. Zhou 等<sup>[7]</sup>使用文献<sup>[6]</sup>中的方法得到焦距初始值,通过优化一个非线性目标函数来减小焦距估值的误差. Kanatani 等<sup>[8]</sup>根据本征矩阵的性质给出了关于焦距的多项式方程组,经过变量替换后仍然转化为求解一个二次方程,最后使用原方程组排除不可能的焦距值. Ueshiba 等<sup>[9]</sup>通过对基本矩

阵的旋转使对极点位于世界坐标系的水平轴上,从变换后的基本矩阵中可获得一个关于焦距的不含一次项的二次方程,舍去负根后即得所求焦距值.文献[6,9,10]同时对相机的退化运动进行了分析.

文献[11]提出了从两视点中标定焦距所需最少匹配点的问题,根据本征矩阵的性质得出计算焦距至少需要6对非平面匹配点的结论,并推导出包含焦距等3个变量的10个多项式方程组,最后借助Gröbner基进行求解.文献[12,13]分别从数值计算稳定性上对文献[11]进行了改进.求解多项式方程组往往得到多个焦距值,Li<sup>[14]</sup>采用投票方式从多组6对匹配点估计的众多焦距值中选出最可能者.

当存在多个视点,也就是图像数量大于两幅时,Bocquillon等<sup>[15]</sup>根据绝对对偶二次曲面的投影成像等式<sup>[16]</sup>得到关于焦距和无穷远平面的约束方程,由于方程的个数多于未知量的个数,所以他们通过最小二乘拟合求解焦距的最优值.由于最小二乘中目标函数是非线性的,为了避免陷入局部最优解,文献[15]使用了区间分析全局优化方法.区间法是一类确定性的全局优化方法,它基于分支定界技术,把未知量的取值区间细分成若干子区间,构造扩张函数来判断子区间内是否包含全局最小值,如果不包含则舍弃,否则对子区间进一步细分直至小于预定的区间长度阈值.从以上优化过程可知区间分析法采用的是穷举策略,需要给定一个初始区间和细分子区间长度的阈值,这给实际应用带来不便.

本文受文献[15,17]的启发,进一步讨论了多视点中固定焦距的全局最优求解问题,通过绝对对偶二次曲面的两种参数化方式构造了对应的两个关于焦距的约束极值问题,使用LMI(Linear Matrix Inequality)松弛优化方法获得了焦距的全局最优解.

## 2 背景知识

### 2.1 相机成像模型

这里采用中心透视投影模型表示理想情况下相机的成像,其数学表示如下

$$\tilde{x} \cong P\tilde{X} \quad (1)$$

式中 $\cong$ 表示左右两端相差一个不等于0的比例因子, $\tilde{X} = (X, 1)^T$ 表示欧式空间中3D点 $X = (X, Y, Z)^T$ 的齐次坐标, $\tilde{x} = (x, y, 1)^T$ 表示 $X$ 在像平面上投影点的齐次坐标, $P$ 称为投影矩阵,它可分解为如下形式

$$P = K[R|t] \quad (2)$$

其中

$$K = \begin{bmatrix} f & k & x_0 \\ 0 & sf & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中的 $R$ 是 $3 \times 3$ 旋转矩阵, $t$ 是 $3 \times 1$ 平移向量, $R$ 和 $t$ 称为相机的外部参数或运动参数. $K$ 是相机的内部参数矩阵,其中 $f$ 表示以像素为单位的等效焦距(以下简称焦距); $s$ 表示纵横比; $k$ 表示像平面上两坐标轴之间的倾斜因子; $x_0$ 和 $y_0$ 表示光轴与像平面的交点坐标,即主点位置.

### 2.2 三维重建与自定标

三维重建指的是依据投影成像关系式(1),从图像间匹配的二维点、线中计算对应的三维目标点、线.根据目标重建后的形状与其真实形状之间的相似程度,可分为射影重建、仿射重建以及度量重建等.

对未定标图像而言,在成像关系式(1)中,只知道等式左端的匹配点,对右端的 $P$ 和 $X$ 一无所知,使得对任意可逆射影变换矩阵 $T$ ,总有 $\tilde{x} \cong PT^{-1}\tilde{TX}$ .这意味着从未定标图像的匹配点得到的三维重建结果中存在射影变换不确定性,称此时的三维重建为射影重建,我们用右上标 $P$ 指示, $\tilde{x} \cong P^P\tilde{X}^P$ .

对标定的图像来说,在成像关系式(1)中,不仅知道等式左端的匹配点坐标,还要求右端投影矩阵 $P$ 中蕴含的相机内部参数矩阵的取值与标定值一致.因为对任意的相似变换矩阵 $H$ ,总有 $\tilde{x} \cong K[R|t]H^{-1}H\tilde{X} \cong K[R'|t']H\tilde{X}$ .这意味着从标定图像的匹配点得到的三维重建结果中存在相似变换不确定性,称此时的三维重建为度量重建,用右上标 $M$ 指示, $\tilde{x} \cong P^M\tilde{X}^M$ .度量重建点与实际的目标点之间相差一个相似变换,在没有参考信息的情况下,度量重建是最接近欧式空间中真实目标形状的重建形式.

自定标就是寻找可逆射影变换矩阵 $T$ ,将射影重建转换为度量重建

$$\begin{aligned} P^M &= P^PT^{-1} \\ \tilde{X}^M &= \tilde{X}^P \end{aligned} \quad (4)$$

从而减少重建结果中的不确定性,还原重建目标的形状.

### 2.3 基于绝对对偶二次曲面的自定标

自定标中的一个重要几何概念是绝对二次曲线,它是位于无穷远平面上的虚二次曲线,其对偶形式是三维空间中退化的二次曲面,称为绝对二次曲面<sup>[16]</sup>或绝对对偶二次曲面<sup>[18]</sup>.因为绝对对偶二次曲面较绝对二次曲线有更紧凑的代数表达式,所以得到广泛的应用.

射影重建中的绝对对偶二次曲面 $Q_\infty^*$ 具有如下成像方程式<sup>[16]</sup>

$$\omega^* \cong (P^P)Q_\infty^*(P^P)^T \quad (5)$$

其中 $\omega^* = KK^T$ ,为 $Q_\infty^*$ 的像,它仅与相机的内部参数 $K$ 有关;而 $Q_\infty^* \cong T^{-1}\text{diag}(1,1,1,0)T^{-T}$ ,右端的 $T$ 即是式

(4)中的射影变换矩阵,右上标 T 表示矩阵转置.以上式(5)是自定标的基础,当拥有关于  $\mathbf{K}$  的一些先验知识后,可以求得  $\mathbf{Q}_\infty^*$ ,进而分解出  $\mathbf{T}$ .

射影重建中的  $\mathbf{Q}_\infty^*$  具有如下性质<sup>[16,18]</sup>:(1)它是  $4 \times 4$  秩为 3 的对称半正定(或负定)矩阵.(2)射影重建中的无穷远平面  $\pi_\infty$  位于  $\mathbf{Q}_\infty^*$  的零空间  $\text{NULL}(\mathbf{Q}_\infty^*) = \{ \mathbf{X} \in \mathbf{R}^4: \mathbf{Q}_\infty^* \mathbf{X} = \mathbf{0} \}$  中,  $\pi_\infty$  的齐次坐标可从  $\mathbf{Q}_\infty^*$  中直接得到

$$\pi_\infty = [ \pi_\infty^1, \pi_\infty^2, \pi_\infty^3, \pi_\infty^4 ]^T \quad (6)$$

其中  $\pi_\infty^i = (-1)^i \det(\overline{\mathbf{Q}_\infty^{*(i)}})$ ,  $\det$  表示矩阵的行列式,  $\overline{\mathbf{Q}_\infty^{*(i)}}$  表示  $\mathbf{Q}_\infty^*$  去掉第 4 行和第  $i$  列后的  $3 \times 3$  子阵.在下文求解固定焦距时将用到上述性质.

## 2.4 Cheirality 约束

本节介绍 Cheirality 约束,其目的是为了在相机内部参数的标定过程中嵌入可成像条件,获得有意义的计算结果.所谓的 Cheirality 约束指的是在度量重建中 3D 点必须位于像平面的前方,这是可成像的基本物理条件,对应的代数表达式是 3D 点的投影深度大于 0.射影重建与度量重建相差一个射影变换(见式(4)),因此在射影重建中 Cheirality 约束仍然成立,但通过  $\mathbf{T}$  的传递其代数表达式将发生改变.

在射影重建中,当选择一个参考投影矩阵后,通过改变 3D 点齐次坐标  $\{ \tilde{\mathbf{X}}_j^P \}$  的符号可得到准仿射重建点集合  $\{ \tilde{\mathbf{X}}_j^{qa} \}$ <sup>[18]</sup>,即  $\tilde{\mathbf{X}}_j^{qa} = \tilde{\mathbf{X}}_j^P$  或  $-\tilde{\mathbf{X}}_j^P$ .准仿射重建点的几何含义是无穷远平面  $\pi_\infty$  不穿过包围这些点的凸包.在准仿射重建点的基础上,通过改变投影矩阵  $\{ \mathbf{P}_i^P \}$  的符号可得到针对相机中心  $\{ \tilde{\mathbf{C}}_i \}$  的准仿射重建<sup>[19]</sup>,意味着  $\pi_\infty$  不穿过包围相机中心点的凸包.上述  $\tilde{\mathbf{C}}_i$  按下式从变号后的投影矩阵  $\mathbf{P}_i^{qa}$  中计算得到

$$\tilde{\mathbf{C}}_i = [ \tilde{\mathbf{C}}_i^1, \tilde{\mathbf{C}}_i^2, \tilde{\mathbf{C}}_i^3, \tilde{\mathbf{C}}_i^4 ]^T \quad (7)$$

式中  $\tilde{\mathbf{C}}_i^j = (-1)^j \det(\overline{\mathbf{P}_i^{qa(j)}})$ ,  $\overline{\mathbf{P}_i^{qa(j)}}$  表示去掉  $\mathbf{P}_i^{qa}$  的第  $j$  列后的  $3 \times 3$  子阵.显然从射影重建到准仿射重建无需任何的先验知识,因此仿射重建中的特性(例如平行线仍保持平行)无法得到恢复,但包围 3D 点和相机光心的凸包将不会被无穷远平面割裂,所以称之为准仿射重建.

射影重建中的 Cheirality 约束表述为  $\{ \tilde{\mathbf{X}}_j^{qa} \}$  和  $\{ \tilde{\mathbf{C}}_i \}$  必须位于  $\pi_\infty$  的同侧或分别位于  $\pi_\infty$  的两侧<sup>[18]</sup>.在实际应用中,往往可能出现个别错误重建点,造成 Cheirality 约束不能完全满足,因此只要求  $\{ \tilde{\mathbf{C}}_i \}$  位于  $\pi_\infty$  的同侧会使定标算法更鲁棒<sup>[19]</sup>,即

$$\pi_\infty^T \tilde{\mathbf{C}}_i > 0 \text{ 或 } \pi_\infty^T \tilde{\mathbf{C}}_i < 0, \text{ 对所有的 } i \quad (8)$$

## 3 基于 LMI 松弛的多项式优化

多项式优化问题具有如下形式

$$\min f(\mathbf{x}) \quad (9)$$

$$\text{s.t. } g_i(\mathbf{x}) \geq 0, i = 1, \dots, m$$

其中  $f(\mathbf{x})$  和  $g_i(\mathbf{x})$  是关于优化变量  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  的多项式.求解上述优化问题是 NP 难的,因此需要采用逼近算法.Lasserre<sup>[20]</sup>提出了 LMI 松弛技术,他通过提升约束条件和优化变量,把原优化问题松弛为半定规划(Semidefinite Programming),进而计算全局最优解.

令  $\mathbf{v}_\delta(\mathbf{x})$  表示多项式的基,它是由  $\mathbf{x}$  中的元素  $x_i$  相乘得到的次数不高于  $\delta$  的所有单项式和常量 1 构成的集合,例如,若  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]$ ,当  $\delta = 2$ ,对应  $\mathbf{v}_2(\mathbf{x}) = [1, x_1, x_2, x_1^2, x_1 x_2, x_2^2]^T$ .对式(9)问题进行  $\delta$  阶 LMI 松弛按如下 3 步完成:

**步骤 1** 线性化目标函数:使用提升变量  $y_{k_1 k_2 \dots k_n}$  替换目标函数  $f(\mathbf{x})$  中的单项式  $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$  得到线性目标函数  $\mathbf{g}^T \mathbf{y}$ ,这里  $\mathbf{y}$  表示由提升变量  $y_{k_1 k_2 \dots k_n}$  组成的向量,  $\mathbf{g}$  表示提升变量的系数.

**步骤 2** 线性化约束项:首先,把  $g_i(\mathbf{x}) \geq 0$  约束提升为 LMI 约束  $g_i(\mathbf{x}) \mathbf{v}_{\delta-1}(\mathbf{x}) \mathbf{v}_{\delta-1}(\mathbf{x})^T \geq 0$ ;然后,与步骤 1 步相同,用提升变量替换 LMI 约束中的单项式,得到关于  $\mathbf{y}$  的约束  $\mathbf{M}_{\delta-1}(g_i(\mathbf{y})) \geq 0$ .

**步骤 3** 增加矩量矩阵约束:首先,增加平凡约束  $\mathbf{v}_\delta(\mathbf{x}) \mathbf{v}_\delta(\mathbf{x})^T \geq 0$ ;然后,使用提升变量替换其中的单项式,得到矩量矩阵约束  $\mathbf{M}_\delta(\mathbf{y}) \geq 0$ .

经过上述  $\delta$  阶 LMI 松弛,原优化式(9)问题变为半定规划

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{g}^T \mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{M}_{\delta-1}(g_i(\mathbf{y})) \geq 0, i = 1, \dots, m \\ & \mathbf{M}_\delta(\mathbf{y}) \geq 0 \end{aligned} \quad (10)$$

可以使用内点法高效求解上述优化问题.Lasserre<sup>[20]</sup>证明了当原优化式(9)问题中的可行域是紧的并且附加一些其它不严格的约束条件,随着阶数  $\delta$  的增加,松弛后的半定规划问题的最优解渐进收敛到原优化问题的最优解.对许多实际优化问题, $\delta$  取较小的值(2,3 或 4)即可得到较高精度的全局最优解.

Kahl 等<sup>[21]</sup>把 LMI 松弛优化方法引入到计算机视觉中进行有关几何重建问题的求解,本文将采用此方法计算固定焦距值.虽然蚁群算法、模拟退火、禁忌搜索以及粒子群优化等是具有通用性的启发式全局优化算法,但在实际应用中许多参数需要调整,并且如果没有针对性地设计算法,其收敛时间往往较长<sup>[22]</sup>.而基于 LMI 松弛技术的优化方法是直接面向多项式优化问题,较其他的确定性优化算法更能从理论上保证解的全局最优性.

## 4 多视点中固定焦距的自标定问题及求解

### 4.1 以往关于多视点自标定问题的研究

第 2.3 节介绍了基于绝对对偶二次曲面的自定标原理. 对相机焦距固定的情况, Triggs<sup>[16]</sup>通过式(5)两端元素间的交叉相乘消掉未知比例因子, 得到关于  $\omega^*$  和  $Q_\infty^*$  的双线性定标方程, 他采用拟线性或序贯二次规划方法求解  $\omega^*$  和  $Q_\infty^*$ , 共计 16 个未知量. Pollefeys 等<sup>[23]</sup>提出了焦距可变的相机自定标方法, 他们通过归一化的矩阵 F 范数消掉式(5)两端的比例因子得到优化变量为  $Q_\infty^*$  和  $\omega_i^*$  的非线性目标函数, 在假定  $\omega_i^*$  中某些元素具有先验值的情况下, 该目标函数存在有意义的最优解. 更进一步, 文献[23]观察到式(5)中  $\omega^*$  的约束可传递给  $Q_\infty^*$ , 特别地如果  $\omega^*$  中的某个元素为 0, 则自然消掉了比例因子, 从而可得到关于  $Q_\infty^*$  的线性定标方程. 此后, 围绕线性方式求解  $Q_\infty^*$ , 在计算稳定性、鲁棒性等方面展开了更广泛的研究. 虽然线性方法计算简单, 但有一个天生的不足之处: 需要对得到的  $Q_\infty^*$  进行秩 3 逼近以满足其性质要求. Chandraker 等<sup>[17]</sup>对文献[23]中的目标函数增加了  $Q_\infty^*$  秩为 3 的约束条件, 构造了关于  $Q_\infty^*$  的带多项式约束的线性最小二乘问题, 他们使用第 3 节中优化方法计算全局最优解.

#### 4.2 本文问题的描述及求解

本文以绝对对偶二次曲面为桥梁计算多视点中固定焦距值, 这里假定除焦距外其余内部参数均已知, 由于求解未知量个数的减少, 合理简化了文献[16]中的目标函数, 使得将绝对对偶二次曲面的性质作为约束条件加入优化问题中后仍能全局寻优. 我们利用基于 LMI 松弛的优化方法获得焦距的全局最优值, 虽然与文献[17]采用相同的优化方法, 但区别在于我们的目的是求解焦距,  $Q_\infty^*$  只是计算的副产品, 因此目标函数不尽相同.

假定已经完成射影重建, 得到投影矩阵  $P_i^p$  和 3D 重建点  $X_j^p$ , 这里  $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ . 因为只标定相机内参数中的焦距, 其余量均已知:  $k = 0, s = 1, x_0$  和  $y_0$  为常数, 所以可使用上述参数值对投影矩阵进行规整

$$\frac{1}{f_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & f_0 \end{bmatrix} P_i^p \rightarrow P_i^p$$

这里  $f_0$  是猜测的焦距值, 用来对未知的焦距量做尺度变换, 提高数值计算的稳定性. 规整后  $P_i^p$  对应的相机内部参数矩阵变为  $K = \text{diag}(f, f, 1)$ , 绝对对偶二次曲面的成像等式(5)有如下简单形式

$$\text{diag}(f^2, f^2, 1) \cong (P_i^p)^T Q_\infty^* (P_i^p) \quad (11)$$

为了把 2.4 节的 Cheirality 约束应用在焦距的自标定中, 我们根据 3D 射影重建点调整  $P_i^p$  的符号得到  $P_i^m$ <sup>[19]</sup>, 这里  $P_i^m = P_i^p$  或  $-P_i^p$ , 显然变号后的投影矩阵

并不对式(11)造成影响, 但其对应的相机光心位置却可借助无穷远平面构成对  $Q_\infty^*$  的约束.

令  $\omega_i^* = (P_i^m)^T Q_\infty^* (P_i^m)^T, \gamma = f^2$ , 则式(11)可写成

$$\begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cong \omega_i^* \quad (12)$$

用  $\omega_i^{*jk}$  表示矩阵  $\omega_i^*$  中位于  $j$  行和  $k$  列的元素, 显然欲使上式成立, 则要求  $\omega_i^{*11} - \gamma\omega_i^{*33} = \omega_i^{*22} - \gamma\omega_i^{*33} = 0, \omega_i^{*12} = \omega_i^{*13} = \omega_i^{*23} = 0$ , 那么自定标对应如下优化问题

$$\min_{\gamma, Q_\infty^*} \sum_{i=1}^m (\omega_i^{*12})^2 + (\omega_i^{*13})^2 + (\omega_i^{*23})^2 + (\omega_i^{*11} - \gamma\omega_i^{*33})^2 + (\omega_i^{*22} - \gamma\omega_i^{*33})^2$$

P1: s. t.  $\gamma > 0$

$$\|Q_\infty^*\|_F^2 = 1, \det(Q_\infty^*) = 0, Q_\infty^* \geq 0$$

$$\pi_\infty^T \tilde{C}_i > 0 \text{ or } \pi_\infty^T \tilde{C}_i < 0 \text{ for all } i$$

式中  $\|\cdot\|_F$  表示矩阵的 F 范数,  $\pi_\infty$  和  $\tilde{C}_i$  分别由式(6)和式(7)计算得到. 由于  $Q_\infty^*$  是对称矩阵, 这里用 10 个变量对其过参数化, 关于半正定、秩 3 等其它需要满足的性质则放在约束条件项中. 显然 P1 是多项式优化问题, 我们使用第 3 节的基于 LMI 松弛的优化方法计算其全局最优值.

如果设定射影重建中的某个投影矩阵为典范形式  $[I \ 10]$ , 其中  $I$  为单位矩阵, 此时绝对对偶二次曲面可参数化为

$$Q_\infty^* = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & q_1 \\ 0 & \gamma & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & s & q_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix}$$

其中  $\gamma = f^2$  与式(12)左端相同. 这里  $Q_\infty^*$  的参数化形式与文献[23]中不同, 我们没有通过设定  $s = 1$  来固定  $Q_\infty^*$  的尺度, 而是通过设定其 F 范数为常数来消掉尺度自由度, 实验证明此参数化形式在数值计算中表现得更为鲁棒. 不失一般性令  $P_i^m = [I \ 10]$ , 自定标对应如下优化问题

$$\min_{Q_\infty^*} \sum_{i=2}^m (\omega_i^{*12})^2 + (\omega_i^{*13})^2 + (\omega_i^{*23})^2$$

P2:

$$+ (\omega_i^{*11} - \gamma\omega_i^{*33})^2 + (\omega_i^{*22} - \gamma\omega_i^{*33})^2$$

$$\text{s. t. } \|Q_\infty^*\|_F^2 = 1, \det(Q_\infty^*) = 0, Q_\infty^* \geq 0$$

$$\pi_\infty^T \tilde{C}_i > 0 \text{ or } \pi_\infty^T \tilde{C}_i < 0 \text{ for all } i$$

与 P1 中有 11 个优化变量相比, P2 中优化变量减为 6 个, 使得在进行 LMI 松弛时提升变量的个数大大减少, 从而降低了计算复杂度. 我们的实验同时表明 P2 对优化变量  $\gamma$  大小的敏感性远低于 P1, 即当  $\gamma \approx 1$  时二者都

能得到全局最优值,如果  $\gamma$  与 1 差别较大,使用第 3 节的优化方法往往无法对 P1 正确求解.因此,为了正确求解 P1,要求猜测的焦距值与实际值比较接近.但 P1 中的  $Q_{\infty}^*$  采用的是无偏的参数化形式,对每个投影矩阵同等对待,保证了焦距计算的无偏性.

在实际应用时,我们建议先求解优化问题 P2,然后用得到的焦距值对投影矩阵重新规整,最后求解 P1 得到固定焦距值.在对以上两个优化问题进行 LMI 松弛时,实验表明取松弛阶数  $\delta = 2$  即可得全局最优解.

以上给出了多视点中固定焦距的自标定方法,具体计算过程总结如下.

输入:投影矩阵  $P_i^p, i = 1, 2, \dots, m$ , 3D 重建点  $X_j^p, j = 1, \dots, n$ , 以及规整参数  $f_0$  (相机内部参数矩阵  $K$  中其它元素取值为  $k = 0, s = 1, x_0$  和  $y_0$  一般取图像的中心位置), 执行下列步骤:

**步骤 1** 规整  $P_i^p$  (如果求解问题 P2, 还需把规整后的  $P_i^p$  变换成典范形式)

**步骤 2** 调整  $P_i^p$  的符号后, 计算其对应的相机光心位置  $\tilde{C}_i$

**步骤 3** 求解优化问题 P1 (或 P2)

**步骤 4** 对得到的最优焦距值  $f^*$  进行尺度反变换  $f_0 f^*$

输出: 固定焦距值

## 5 实验

为了检验本文提出的固定焦距值计算方法的实用性,我们分别在合成数据和真实图像上进行了实验.在标定焦距前需要对多视点图像中的匹配点进行射影重建,这可有多种方式来完成<sup>[18,24]</sup>,下面的实验中采用的是与文献[25]类似的序贯方式.

### 5.1 合成数据

在合成数据实验中,测试在不同噪声水平影响下标定的焦距值与真实值之间的偏差以及计算时间.实验数据采用如下方式生成:3D 点均匀分布在以原点为中心,边长为 2 的立方体内;相机中心与原点之间的距离取均值为 2 标准差为 0.1 的随机数,主轴指向原点附近;相机的内部参数矩阵为  $K = \text{diag}(1, 1, 1)$ .按照上述配置得到的像点散布在  $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$  区域内,对它们的位置施加均值为 0 标准差为  $\sigma$  的高斯噪声扰动,由于像点坐标的绝对值比较小,这里的  $\sigma$  从 0.2% 增加至 3%.对每个  $\sigma$  的取值分别进行 80 次实验,每次实验随机产生 90 个 3D 点和 5 幅图像,图 1 是相机和 3D 点的配置示意图.

在每次实验中,首先进行射影重建,这里假定不存在遮挡,90 个 3D 点在 5 幅图像中均可成像,重建后得到投影矩阵  $P_i^p, i = 1, \dots, 5$  和 3D 点  $X_j^p, j = 1, \dots, 90$ ;然后把其中的一个投影矩阵变换成典范形式,为保持投影位置不变,同时对 3D 点进行逆变换,并从变换后的投影矩阵和 3D 点中得到准仿射重建;最后求解问题 P2 获得标定的焦距值  $f$ ,其中基于 LMI 松弛的全局优化方法的实现部分来自 GloptiPoly 工具箱<sup>[26]</sup>.

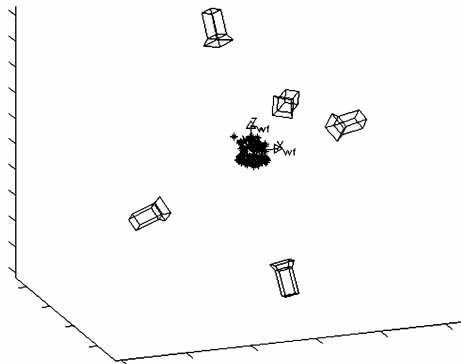


图1 相机与3D点的配置

我们从准确性和计算效率两方面将本文方法(LMI-P2)与文献[15]中的方法(IA)进行了比较,其中准确性以自标定值与真实值之间偏差  $\Delta f = |f - 1|$  的大小来衡量,表 1 是在不同  $\sigma$  值下对 80 次实验的统计结果.可以看出,当  $\sigma$  取较小值(施加较小的噪声扰动)时,IA 的平均偏差要略低于 LMI-P2,但二者差别不明显.当  $\sigma$  的值超过 1% 后,IA 的平均偏差随  $\sigma$  上升较快,LMI-P2 则上升缓慢,说明 LMI-P2 具有较高的鲁棒性.在计算时间上,随着  $\sigma$  的变大二者均有增加,但 IA 增加的幅度远大于 LMI-P2,特别是当  $\sigma = 3\%$  时,二者相差达两个数量级.上述比较实验在相同 PC 机上完成(Intel Pentium D CPU@ 3.20GHz, 2GB RAM),IA 的实现代码由原作者提供.

表 1 本文焦距计算方法(LMI-P2)与基于区间分析的焦距计算方法(IA)的比较

	算法	高斯噪声的标准差 $\sigma(\%)$						
		0.2	0.5	1	1.5	2	2.5	3
平均偏差	LMI-P2	0.0052	0.0128	0.0262	0.0347	0.0431	0.0697	0.0720
	IA	0.0022	0.0097	0.0440	0.2124	0.2625	0.3595	0.4796
平均耗时(s)	LMI-P2	1.1428	1.1423	1.1720	1.1274	1.1607	1.1652	1.1589
	IA	18.6502	71.1932	73.0994	98.7607	108.8239	182.3129	211.6474

### 5.2 真实图像

我们在常用的 Valbonne 教堂图像集<sup>[28,29]</sup>上对本文计算固定焦距的方法进行了测试.该图像集共有 15 幅图像,这里使用了其中的 5 幅,图像尺寸为  $512 \times 768$ ,图 2 给出了所用的 3 幅.我们用 SIFT<sup>[27]</sup>向量描述提取的特征点,并根据描述量之间的欧式距离进行点匹配.在鲁棒

估计匹配点之间的几何关系<sup>[18]</sup>并剔除异常匹配点后,进行射影重建.投影矩阵的规整参数设为 $f_0 = 1000$ ,主点位置定在图像中心 $x_0 = 256, y_0 = 384$ 处.通过求解问题 P1 得到规整后焦距的全局最优值 0.679,用 $f_0$ 进行尺度反变换后得到标定的固定焦距值 679,表 2 给出了本文以及其它文献的标定结果.



图2 Valbonne教堂图像

在表 2 所列的结果中,前两行的标定值是基于 Kruppa 方程的方法得到,标定的参数为 5 个,后两行采用的是基于绝对对偶二次曲面方法得到的标定值,标定的参数为 1 个焦距量.分析表 2,我们有如下观察:在自定标时,如果假定主点是未知的,则不同自定标方法标定的主点位置差别较大,说明了主点的敏感性;除焦距外,当允许其它 4 个量设为先验值时,对焦距的标定结果与同时标定 5 个量时的结果差别不大,表明对固定内部参数的相机只估计焦距是可行的.

表 2 不同方法对 Valbonne 教堂图像的焦距标定结果

	$f$	$s$	$x_0$	$y_0$	$k$
Habed et al. <sup>[28]</sup>	667	1.039	241	389	—
雷成等 <sup>[29]</sup> (GA)	664	1.003	255	347	-0.85
Bocquillon et al. <sup>[15]</sup>	687	1	256	384	0
本文方法(LMI-P1)	679	1	256	384	0

由于原始图像集中并未给出相机拍摄时的内部参数真实值,我们难以计算标定值与真实值之间的偏差,下面通过三维重建的方式,间接说明使用本文方法标定的相机内部参数是可靠的.我们根据所标定的相机内部参数值对图像中的 Valbonne 教堂进行三维度量重建,图 3 给出了重建结果.其中图 3(a)和(b)是从稀疏匹配点中重建的 3D 点,从俯视图 3(b)中可看出,墙壁表面的 3D 点在空间的分布有显著的垂直特征,这与实际相符.为了定量评估重建的结构特征,我们手工提取了图像中一些线段并对其重建,图 3(c)是重建的线结构,计算了具有明显平行或垂直关系的 3D 线段之间的夹角,其中平行线段之间的夹角在 $0.234^\circ$ 至 $1.567^\circ$ 之间,垂直线段之间的夹角在 $88.904^\circ$ 到 $91.183^\circ$ 之间.以上结果说明重建的 3D 结构与目标的实际结构差别较小,考虑到特征手工提取时的误差也会造成重建影响,那么在此情况下,标定的相机参数仍然可满足实际要求.图 3(d)是我们重建的带纹理信息的 3D 点云模型.

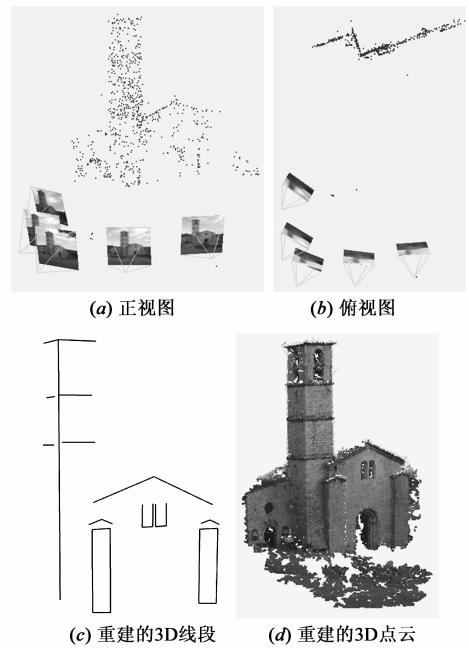


图3 Valbonne教堂的三维度量重建结果

## 6 结论

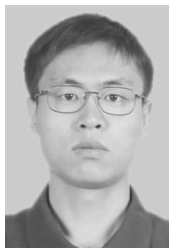
本文研究了多视点图像中固定焦距的自标定问题,通过对绝对对偶二次曲面进行两种形式的参数化,给出了各自对应的计算固定焦距的约束优化问题并分析了二者的优缺点,使用基于 LMI 松弛的多项式优化方法获得了全局最优解.我们在合成数据和真实图像上分别进行了对比实验,结果表明本文方法具有计算时间少和鲁棒性好,焦距值准确度高优点,可满足实际应用的要求.

## 参考文献

- [1] R Szeliski. Computer Vision: Algorithms and Applications[M]. London: Springer, 2010.
- [2] T Dobbert. Matchmoving: The Invisible Art of Camera Tracking [M]. San Francisco: Sybex, 2005.
- [3] S Bounoux. From projective to euclidean space under any practical situation, a criticism of self-calibration[A]. The Sixth International Conference on Computer Vision[C]. Bombay: IEEE Computer Society, 1998. 790 - 796.
- [4] G Zhang, et al. Robust metric reconstruction from challenging video sequences[A]. Proc Computer Vision and Pattern Recognition[C]. Minneapolis: IEEE Computer Society, 2007. 1 - 8.
- [5] N Snavely, S M Seitz, R Szeliski. Photo tourism: exploring photo collections in 3D[A]. ACM SIGGRAPH[C]. New York: Association for Computing Machinery, 2006. 835 - 846.
- [6] P Sturm, et al. Focal length calibration from two views: method and analysis of singular cases[J]. Computer Vision and Image Understanding, 2005, 99(1): 58 - 95.
- [7] Y-j Zhou, X-j Kou. A practical iterative two-view metric recon-

- struction with uncalibrated cameras[J]. Journal of Zhejiang University-Science A, 2007, 8(10): 1614 – 1623.
- [8] K Kanatani, C Matsunaga. Closed-form expression for focal lengths from the fundamental matrix[A]. Proc The 4th Asian Conf on Computer Vision[C]. Taipei: Springer, 2000. 128 – 133.
- [9] T Ueshiba, F Tomita. Self-calibration from two perspective views under various conditions: closed-form solutions and degenerate configurations[A]. Proc Australia-Japan Advanced Workshop on Computer Vision[C]. Adelaide: The Japan Society for the Promotion of Science, 2003. 118 – 125.
- [10] K Kanatani, A Nakatsuji, Y Sugaya. Stabilizing the focal length computation for 3-D reconstruction from two uncalibrated views[J]. International Journal of Computer Vision, 2006, 66(2): 109 – 122.
- [11] H Stewenius, et al. A minimal solution for relative pose with unknown focal length[A]. Proc Computer Vision and Pattern Recognition[C]. San Diego: IEEE Computer Society, 2005. 789 – 794.
- [12] Z Kukelova, M Bujnak, T Pajdla. Automatic generator of minimal problem solvers[A]. Proc 10th ECCV[C]. Marseille: Springer, 2008. 302 – 315.
- [13] M Byröd, K Josephson, K Astrom. Improving numerical accuracy of grobner basis polynomial equation solvers[A]. 11th International Conference on Computer Vision[C]. Rio de Janeiro: IEEE Computer Society, 2007. 1 – 8.
- [14] H Li. A simple solution to the six-point two-view focallength problem[A]. Proc 9th ECCV[C]. Graz: Springer, 2006. 200 – 213.
- [15] B Bocquillon, et al. On constant focal length self-calibration from multiple views[A]. Proc Computer Vision and Pattern Recognition[C]. Minneapolis: IEEE Computer Society, 2007. 1 – 8.
- [16] B Triggs. Autocalibration and the absolute quadric[A]. Proc Computer Vision and Pattern Recognition[C]. San Juan: IEEE Computer Society, 1997. 609 – 614.
- [17] M Chandraker, et al. Autocalibration via rank-constrained estimation of the absolute quadric[A]. Proc Computer Vision and Pattern Recognition[C]. Minneapolis: IEEE Computer Society, 2007. 1 – 8.
- [18] R Hartley, A Zisserman. Multiple View Geometry in Computer Vision[M]. New York: Cambridge University Press, 2003.
- [19] D Nister. Untwisting a projective reconstruction[J]. Int J Comput Vision, 2004, 60(2): 165-183.
- [20] J B Lasserre. Global optimization with polynomials and the problem of moments[J]. SIAM Journal on Optimization, 2001, 11(3): 796 – 817.
- [21] F Kahl, D Henrion. Globally optimal estimates for geometric reconstruction problems[A]. 10th International Conference on Computer Vision[C]. Beijing: IEEE Computer Society, 2005. 978 – 985.
- [22] D H Wolpert, W G Macready. No free lunch theorems for optimization[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 1997, 1(1): 67 – 82.
- [23] M Pollefeys, R Koch, L V Gool. Self-calibration and metric reconstruction inspite of varying and unknown intrinsic camera parameters[J]. International Journal of Computer Vision, 1999, 32(1): 7 – 25.
- [24] 吴福朝. 计算机视觉中的数学方法[M]. 科学出版社, 2008.  
Wu Fuchao. Mathematical Methods in Computer Vision[M]. Beijing: Science Press, 2008. (in Chinese)
- [25] P A Beardsley, A Zisserman, D W Murray. Sequential updating of projective and affine structure from motion[J]. International Journal of Computer Vision, 1997, 23(3): 235 – 259.
- [26] D Henrion, J-B Lasserre. GloptiPoly: global optimization over polynomials with Matlab and SeDuMi[J]. ACM Trans Math Software, 2003, 29(2): 165 – 194.
- [27] D G Lowe. Distinctive image features from scale-invariant keypoints[J]. International Journal of Computer Vision, 2004, 60(2): 91 – 110.
- [28] A Habed, B Boufama. Camera self-calibration from bivariate polynomials derived from Kruppa's equations[J]. Pattern Recognition, 2008, 41(8): 2484 – 2492.
- [29] 雷成, 胡占义, 吴福朝, 等. 一种新的基于 Kruppa 方程的摄像机自标定方法[J]. 计算机学报, 2003, 26(5): 587 – 597.  
Lei Cheng, Hu Zhanyi, Wu Fuchao, et al. A novel camera self-calibration technique based on Kruppa equations[J]. Chinese Journal of Computers, 2003, 26(5): 587 – 597. (in Chinese)

### 作者简介



陈 京 男, 1978 年出生于河南民权, 北京交通大学博士研究生. 研究方向为三维计算机视觉, 图像处理.

E-mai: 03112026@bjtu.edu.cn



袁保宗 男, 1932 年生于江苏吴江. 北京交通大学信息所教授, 名誉所长, 博士生导师. 目前, 他的主要研究方向包括语音信号处理、图像处理、计算机视觉、虚拟现实以及人机交互技术等.