

压缩感知中测量矩阵与重建算法的协同构造

李 佳, 王 强, 沈 毅, 李 波

(哈尔滨工业大学控制科学与工程系, 黑龙江哈尔滨 150001)

摘 要: 本文提出基于感知字典的迭代硬阈值(SDIHT)算法, 以此协同构造压缩感知中测量矩阵与重建算法. 将对测量矩阵与感知字典分别用于压缩投影和构造重建算法, 重建迭代至残差为零, 从而精确恢复原始稀疏信号. 本文证明了 SDIHT 算法精确恢复原始稀疏信号的充分条件. SDIHT 算法的优点是重建精度高和计算复杂度低. 仿真实验表明, 当信号稀疏度或测量次数相同时, 相比 IHT、OMP 和 BIHT 算法, SDIHT 算法重建 0-1 稀疏信号和二维图像效果更好, 算法效率更高.

关键词: 压缩感知; 测量矩阵; 重建算法; 感知字典

中图分类号: TN911 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2013)01-0029-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.01.006

Collaborative Construction of Measurement Matrix and Reconstruction Algorithm in Compressive Sensing

LI Jia, WANG Qiang, SHEN Yi, LI Bo

(Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001, China)

Abstract: This paper proposes a novel Sensing Dictionary-based Iterative Hard Thresholding (SDIHT) algorithm, which can collaboratively construct the measurement matrix and the reconstruction algorithm in compressive sensing. Pairs of measurement matrix and sensing dictionary are used for compressive projection and designing reconstruction algorithm respectively. The original sparse signal can be recovered exactly until the residual is reduced to zero as iteration proceeds. A sufficient condition for SDIHT algorithm is given and proved. The benefit of SDIHT is its high reconstruction accuracy and low computational complexity. Computer simulation indicates that when the signal sparsity or the measurement number is fixed, SDIHT algorithm can reconstruct 0-1 sparse signal and two dimensional images with better performance and higher efficiency than IHT, OMP and BIHT algorithm can.

Key words: compressive sensing; measurement matrix; reconstruction algorithm; sensing dictionary

1 引言

压缩感知^[1] (Compressive Sensing, CS) 是基于信号稀疏性的一套信号采样理论. 运用线性变换将稀疏信号投影到一个低维 (相对 Nyquist 比率) 空间上, 随机线性投影包含信号的大部分信息, 利用非线性解码方法 (或重建算法) 可精确恢复原始信号. 信号稀疏性是压缩感知的前提条件, 本文均假设原始信号是稀疏的.

测量矩阵在压缩投影过程中将稀疏信号投影成低维测量信号. 为保证投影前后能够保持信号的大部分能量, 测量矩阵需满足有限紧致特性 (Restricted Isometry Property, RIP)^[2]. 已经证实, 高斯随机矩阵^[3,4] 可在统计意义下以较高概率满足 RIP, 但此类随机矩阵的存储和传输给系统带来了很大的难度. 利用确定性测量矩阵取

代随机矩阵受到了很大关注, 目前压缩感知中确定性测量矩阵从构造方法可分为下述几类: 基于有限域的确定性测量矩阵, 如多项式矩阵^[5]; 基于特定编码的确定性测量矩阵, 如离散 Chirp 及二阶 Reed-Muller 编码矩阵^[6]; 训练优化算法构造的矩阵^[7~9]. 已证明, 上述矩阵满足 RIP 或相关性条件^[10,11], 故可用于压缩感知理论.

压缩感知稀疏信号重建算法主要分为两类^[12]: 一类是基于最小化 l_1 范数的方法, 包括基追踪算法 (Basis Pursuit, BP)^[13], 线性规划算法 (Linear Programming, LP)^[4] 等, 此类算法有最优的重建性能, 但高计算复杂性限制其在实际中应用. 另一类算法是基于最小化 l_0 范数的贪婪算法, 包括正交匹配追踪算法 (Orthogonal Matching Pursuit, OMP)^[14], 子空间追踪算法 (Subspace Pursuit, SP)^[15], 压缩采样匹配追踪算法 (Compressive Sampling

Matching Pursuit, CoSaMP)^[16], 迭代硬阈值算法 (Iterative Hard Thresholding, IHT)^[17] 及其衍生的基于回溯的迭代硬阈值算法 (Backtracking-based Iterative Hard Thresholding, BIHT)^[18] 等, 此类算法目的是寻找原始稀疏信号的支撑集, 通过迭代更新当前估计来优化信号恢复情况, 此类算法与 BP 算法一样可保证收敛性, 但计算复杂度明显降低。

测量矩阵和重建算法都会影响信号重建的效果^[19,20]。以往研究均分别优化上述两部分, 实际上构造有关联的测量矩阵与重建算法可充分发挥两者的性能, 提高稀疏信号重建精度。本文提出一种协同构造测量矩阵与重建算法方法, 一方面可实现测量矩阵确定化, 冲破随机矩阵给系统带来的束缚, 便于硬件的实现; 另一方面设计出的新重建算法, 利用两者内在联系, 在重建过程中可经较少次迭代精确恢复原始信号。

本文在感知字典理论基础上协同构造测量矩阵与重建算法。根据测量矩阵构造对应的感知字典并设计出新的 SDIHT 算法。通过理论分析得到上述算法精确重建原始稀疏信号的充分条件。在 SDIHT 算法中, 事先构造并存储测量矩阵和感知字典可降低计算复杂度; 感知字典与测量矩阵的低交叉相关性可改善重建算法性能。重建 0-1 稀疏信号与二维灰度图像的仿真实验表明, SDIHT 算法相比 IHT、OMP 和 BIHT 算法有更高重建精度和更低计算复杂度。

2 压缩感知基本理论

对信号 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$, 若只有 $K (K \ll N)$ 个非零系数, 则称此信号为 K 稀疏信号。压缩投影获取测量信号 $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$, 其中 $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N} (M \ll N)$ 为测量矩阵, M 称为测量次数。根据测量信号 \mathbf{y} 与测量矩阵 Φ , 利用重建算法可得重建信号 $\hat{\mathbf{x}}$, 其过程见图 1。

由于信号 \mathbf{x} 是稀疏的且信号恢复为病态求逆过程, 信号重建可视为从所有可能解中找出非零系数最少的解, 即下述 l_0 或 l_1 范数最小化问题的解

$$\hat{\mathbf{x}} = \min \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{s.t. } \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (1)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \min \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{s.t. } \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (2)$$

测量矩阵的有限紧致特性 (RIP) 和相关性为上述信号重建问题提供了理论保证。

定义 1 测量矩阵 Φ 满足参数 (K, δ_K) , $\delta_K \in (0, 1)$ 的有限紧致特性, 如果对所有 K 稀疏信号 \mathbf{x} , 式(3)成立:

$$(1 - \delta_K) \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\Phi \mathbf{x}\|_2 \leq (1 + \delta_K) \|\mathbf{x}\|_2 \quad (3)$$

定义 2 测量矩阵 Φ 的相关性参数与累积相关性

函数定义如下^[10]

$$\mu = \max_{j \neq k}^{\text{def}} |\langle \phi_j, \phi_k \rangle| \quad (4)$$

$$\mu_1(m) = \max_{|\Lambda|=m} \max_{1 \leq i, j \leq N, i \notin \Lambda, j \in \Lambda} \sum_{\Lambda} \langle \phi_i, \phi_j \rangle \quad (5)$$

其中 ϕ_i 为测量矩阵 Φ 的第 i 列, m 为正整数, Λ 为 $\{1, \dots, N\}$ 中任意子集。

实值 $M \times N$ 大小矩阵的相关性参数有下确界, 即 Welch 界

$$\mu_w = \sqrt{(N-M)(N-1)^{-1}M^{-1}} \quad (6)$$

3 基于感知字典的迭代硬阈值算法

3.1 感知字典理论

文献[21]提出一种感知字典 Ψ 构造算法, 并定义了如下累积交叉相关性函数。

定义 3 感知字典 Ψ 与测量矩阵 Φ 的累积交叉相关性函数定义为

$$\mu_i^*(m) = \max_{|\Lambda|=m} \max_{1 \leq i, j \leq N, i \notin \Lambda, j \in \Lambda} \sum_{\Lambda} \langle \psi_i, \phi_j \rangle \quad (7)$$

其中 ψ_i, ϕ_j 分别为感知字典 Ψ 的第 i 列和测量矩阵 Φ 的第 j 列。

文献[21]证明低交叉相关性可提高贪婪算法重建性能, 即类 Gram 矩阵 $\mathbf{G} = \Psi^T \Phi$ 的对角线元素保持 1, 非对角线元素绝对值尽可能小, 其中 Ψ^T 为 Ψ 的转置矩阵。文献[22]提出一种感知字典和测量矩阵同时构造算法, 可构造交叉相关性更低的成对感知字典和测量矩阵, 该算法记为感知字典 (Sensing Dictionary, SD) 算法, 记 SD 算法构造的测量矩阵为测量矩阵 (SD 算法)。

3.2 基于感知字典的迭代硬阈值算法

迭代硬阈值 (IHT) 算法以其简单和低复杂性受到了很多的关注, 其迭代过程如下: 假设 $\mathbf{x}_0 = 0$, 迭代

$$\mathbf{x}_{n+1} = H_K(\mathbf{x}_n + \Phi^T(\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}_n)) \quad (8)$$

其中 $H_K(\alpha)$ 是一个非线性算子, 保留 α 中绝对值最大的 K 个分量, 其余分量均设为零, \mathbf{x}_n 是第 n 次迭代估计。文献[17]为 IHT 算法用于压缩感知重建提供了一系列理论保证, 但它的缺陷是收敛速度慢, 局部收敛以及对测量矩阵敏感。

文献[21]指出若测量矩阵相关性太强, 则可用与测量矩阵交互相关性很低的感知字典来优化原子选取。受此启发, 本文将感知字典 Ψ 引入 IHT 算法来提高重建性能, 称此算法为基于感知字典的迭代硬阈值 (Sensing Dictionary-based Iterative Hard Thresholding, SDIHT) 算法。其迭代过程如下: 假设 $\mathbf{x}_0 = 0$, 迭代

$$\mathbf{x}_{n+1} = H_K(\mathbf{x}_n + \Psi^T(\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}_n)) \quad (9)$$

若选取 $\Psi = \Phi$, 则上述算法变为传统的 IHT 算法。

下面着重介绍如何基于感知字典来协同构造测量



矩阵与重建算法.首先在类 Gram 矩阵集合 \mathbf{G} 和理想矩阵集合 \mathbf{H} 间通过交互投影构造交叉相关性很低的测量矩阵 Φ 与感知字典 Ψ ,然后将两者分别用于压缩投影和构造重建算法(9),最后通过迭代重建信号.设计重建算法所需的感知字典和测量矩阵是成对存在的,两者之间的内在联系实现了协同构造测量矩阵与重建算法.具体步骤见算法 1.

分别定义类 Gram 矩阵集合 \mathbf{G} 和理想矩阵集合 \mathbf{H} 如下:

$$\mathbf{G} = \{ \mathbf{G} = \Psi^T \Phi; \Phi, \Psi \in \mathbf{R}^{M \times N} \} \quad (10)$$

$$\mathbf{H} = \{ \mathbf{H} \in \mathbf{R}^{N \times N}; \mathbf{H} = \mathbf{H}^T, \mathbf{H}(i, i) = 1, | \mathbf{H}(i, j) | \leq \mu_w, 1 \leq i, j \leq N \} \quad (11)$$

算法 1 基于感知字典的迭代硬阈值(SDIHT)算法

输入:列单位化高斯随机矩阵 Φ ;理想矩阵集合 \mathbf{H} ;终止变量 ϵ_1 .

初始化:Gram 矩阵 $\mathbf{G} = \Phi^T \Phi$

迭代:第 $k(k \geq 1)$ 次循环

$$(1) \mathbf{H} = \min_{\mathbf{H}_w} \| \mathbf{H}_w - \mathbf{G} \|_F \quad \text{s.t. } \mathbf{H}_w \in \mathcal{H}$$

$$(2) \Psi = \min_{\Psi_w} \| \Psi_w^T \Phi - \mathbf{H} \|_F \quad \text{s.t. } \Psi_w \in \mathbf{R}^{M \times N}, \Psi_w^T \Phi \in \mathcal{G}$$

$$(3) \Phi = \min_{\Phi_w} \| \Psi^T \Phi_w - \mathbf{H} \|_F \quad \text{s.t. } \Phi_w \in \mathbf{R}^{M \times N}, \Psi^T \Phi_w \in \mathcal{G}$$

$$(4) \mathbf{G} = \Psi^T \Phi, r_k = \| \mathbf{H} - \mathbf{G} \|_F$$

(5)若 $k \geq 2$ 且 $r_k - r_{k-1} \leq \epsilon_1$,退出迭代;否则转向(1),且令 $k = k + 1$;
退出迭代输出:测量矩阵 Φ 和感知字典 Ψ .

输入:测量信号 $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$;测量矩阵 Φ ;感知字典 Ψ ;

初始化: $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, n = 0$

迭代:第 n 次循环

$$1) \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{H}_K(\mathbf{x}_n + \Psi^T(\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}_n))$$

2)若 $\| \mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}_{n+1} \|_2 < \epsilon_2$,退出迭代;否则转向 1),且令 $n = n + 1$;

退出迭代输出:重建信号 $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{n+1}$.

3.3 算法收敛性证明

SDIHT 算法精确恢复原始稀疏信号的充分条件可由下述定理表述.

定理 1(稀疏信号的精确恢复) 设原始信号 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$ 是 K 稀疏的,测量信号为 $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$.若测量矩阵 Φ 与对应感知字典 Ψ 满足 $2 \| \Psi^T \Phi - \mathbf{I} \|_2 < 1$,其中 \mathbf{I} 为单位矩阵,则 SDIHT 算法经有限次迭代可精确重建 \mathbf{x} .

证明 令 $\alpha_{n+1} = \mathbf{x}_n + \Psi^T(\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}_n)$ 及残差 $\mathbf{r}_n = \mathbf{x} - \mathbf{x}_n$,则有

$$\begin{aligned} \| \mathbf{r}_{n+1} \|_2 &= \| \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x} \|_2 \\ &= \| \mathbf{x}_{n+1} + \alpha_{n+1} - \alpha_{n+1} - \mathbf{x} \|_2 \\ &\leq \| \mathbf{x}_{n+1} - \alpha_{n+1} \|_2 + \| \alpha_{n+1} - \mathbf{x} \|_2 \end{aligned} \quad (12)$$

由 $H_K(\cdot)$ 定义及 $\mathbf{x}_{n+1} = H_K(\alpha_{n+1})$ 可知, \mathbf{x}_{n+1} 是距离 α_{n+1} 最近的 K 稀疏信号,即 $\mathbf{x}_{n+1} - \alpha_{n+1}$ 的范数是最小的,则对任意 K 稀疏信号 β ,都有 $\| \mathbf{x}_{n+1} - \alpha_{n+1} \|_2 \leq \| \beta - \alpha_{n+1} \|_2$,故式(13)成立^[17]

$$\| \mathbf{x}_{n+1} - \alpha_{n+1} \|_2 \leq \| \alpha_{n+1} - \mathbf{x} \|_2 \quad (13)$$

因此

$$\begin{aligned} \| \mathbf{r}_{n+1} \|_2 &\leq 2 \| \alpha_{n+1} - \mathbf{x} \|_2 \\ &= 2 \| \mathbf{x}_n + \Psi^T \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) - \mathbf{x} \|_2 \\ &= 2 \| (\Psi^T \Phi - \mathbf{I})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \|_2 \\ &\leq 2 \| \Psi^T \Phi - \mathbf{I} \|_2 \| \mathbf{x} - \mathbf{x}_n \|_2 \\ &= 2 \| \Psi^T \Phi - \mathbf{I} \|_2 \| \mathbf{r}_n \|_2 \end{aligned} \quad (14)$$

由 2 范数的相容性得上述第二个不等式.由式(14)可知,若测量矩阵 Φ 和对应的感知字典 Ψ 满足

$$2 \| \Psi^T \Phi - \mathbf{I} \|_2 < 1 \quad (15)$$

则 SDIHT 算法收敛,即对任意 n

$$\| \mathbf{r}_{n+1} \|_2 < \| \mathbf{r}_n \|_2 \quad (16)$$

记 $\| \Psi^T \Phi - \mathbf{I} \|_2 = \rho^{-1}$,其中 $\rho > 2$,则有下式成立

$$\| \mathbf{r}_n \|_2 < 2^n \rho^{-n} \| \mathbf{r}_0 \|_2 = 2^n \rho^{-n} \| \mathbf{x} \|_2 \quad (17)$$

给定重建误差 ϵ ,只需迭代次数 n 满足

$$(\rho/2)^n \geq \| \mathbf{x} \|_2 / \epsilon \quad (18)$$

则可精确重建 \mathbf{x} ,证毕.

式(15)为 SDIHT 算法收敛的充分条件,等价于

$$\mathbf{G} = \Psi^T \Phi \approx \mathbf{I} \quad (19)$$

SD 算法可构造交互相关性很低的测量矩阵 Φ 与感知字典 Ψ ,即以最小化 $\| \Psi^T \Phi - \mathbf{I} \|_2$ 为目的.本文 SDIHT 算法的主要特点为:(1)在每一次迭代估计中都通过与测量矩阵相关性很低的感知字典来优化估计信号的收敛情况,可实现较高的重建精度;(2)分别用于压缩投影和设计重建算法的测量矩阵和感知字典可事先构造存储,故可保持原始 IHT 算法的低计算复杂性.

4 仿真实验

4.1 相关性

此实验比较高斯随机矩阵、测量矩阵(SD 算法)的相关性,Schnass^[21]和 SD 算法的构造结果也参与比较.取 $N = 256$,以 10 为步长从 90 到 220 改变测量次数 M ,得相关性参数对比图(如图 2 所示).取 $M = 128$ 和 $N = 256$,改变定义 2 和定义 3 中支撑集大小 m ,得累计(交叉)相关性对比图(如图 3 所示).由图 2 和图 3 可知,测量矩阵(SD 算法)的相关性低于高斯随机矩阵,即 SD 算法具备优化测量矩阵的特点.下文记测量矩阵(SD 算法)为优化矩阵.相比上述矩阵,Schnass 算法构造结果的相关性降低了很多,SD 算法构造的感知字典和测量矩阵明显优于上述三种情况.因此 SD 算法在相关性意义下是最优的.

4.2 一维信号重建

本节通过重建一维 0-1 稀疏信号来比较本文算法的优劣,评价指标为信号重建概率.参与比较的重建算法为 IHT、OMP、BIHT 以及本文算法.

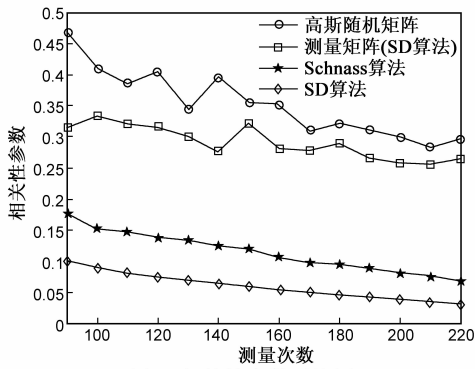


图2 相关性参数对比图

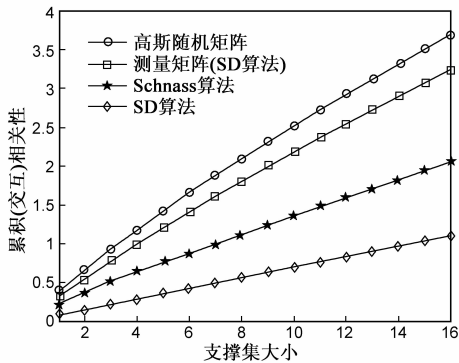


图3 累计(交叉)相关性对比图

令算法 1 中终止变量 $\epsilon_1 = 10^{-5}$. 重建算法迭代终止条件均为迭代次数 n 超过 100 或者重建结果满足下式

$$\| \mathbf{y} - \Phi \hat{\mathbf{x}} \|_2 < \epsilon_2 = 10^{-5} \quad (20)$$

采用长度 $N = 256$ 的 0-1 稀疏信号 \mathbf{x} , 测量矩阵为高斯矩阵和优化矩阵, 分别从下述角度验证算法的性能: (1) 以 3 为步长从 2 到 60 改变信号稀疏度 K , 测量矩阵大小为 128×256 ; (2) 以 5 为步长从 70 到 180 改变测量次数 M , 信号稀疏度 $K = 30$. 首先进行压缩投影获得测量信号 \mathbf{y} , 然后进行信号重建, 最后重复仿真实验 500 次. 若重建结果满足下式

$$\frac{\| \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \|_2}{\| \mathbf{x} \|_2} < 10^{-4} \quad (21)$$

则重建实验成功, 否则记为失败. 统计不同稀疏度或不同测量次数 (X 轴) 成功重建的次数可得信号精确重建概率 (Y 轴), 如图 4 和图 5 所示.

从图 4 和图 5 可知, 优化矩阵的性能与高斯矩阵相当, IHT 和 BIHT 算法结合两种矩阵的重建结果相同. 图 4 中, 在测量次数 M 不变的情况下, 随着稀疏度 K 变大, 本文算法重建性能衰减最慢, 优于其他算法. 当稀疏度 K 接近 30 时, 本文算法仍能以 100% 的概率精确重建原始稀疏信号. 图 5 中, 在信号稀疏度 K 不变的情况下, 随着测量次数 M 的增加, 本文算法劣于 BIHT 算法, 优于 OMP 和 IHT 算法. 由算法步骤可知, BIHT 和

OMP 算法在每次迭代过程中均有伪逆运算, 此过程能够保证更快地逼近原始稀疏信号, 但不可避免地增加了重建过程的计算量. 利用事先构造存储测量矩阵和感知字典, 本文算法可保持 IHT 算法的低计算复杂性.

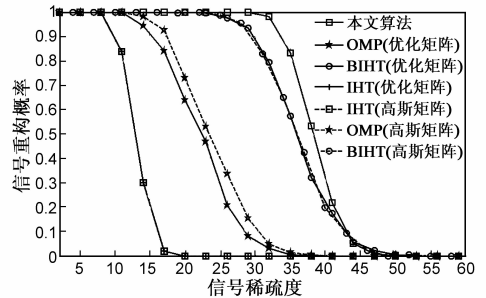


图4 不同重建算法的性能与稀疏度关系图

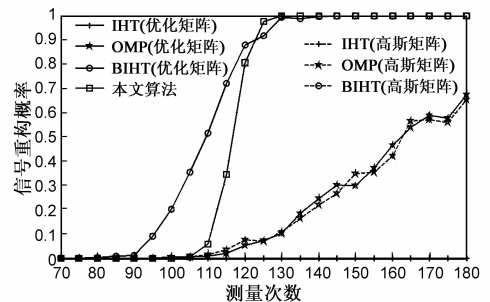


图5 不同重建算法的性能与测量次数关系图

当原始信号为高斯随机稀疏信号时, 采用相同策略统计重建概率, BIHT 算法重建效果最好, OMP 算法和本文算法的重建情况相当, IHT 算法最不稳定. 此实验体现了伪逆运算逼近原始信号的优越性.

4.3 二维图像重建

本节重建的原始二维图像是像素大小 256×256 的 Lena 灰度图像, 测量矩阵为 SD 算法输出的大小为 190×256 的测量矩阵 Φ . 用 Matlab 进行仿真实验, 实验在 CPU 为 Intel E7500 (双核 2.93GHz), 内存为 4.00Gbd 的联想机上运行. 利用离散小波变换对原始图像进行稀疏化处理, 原始图像与稀疏图像如图 6 所示. 压缩投影获取测量信号, 利用不同算法进行重建, 结果如图 7 所示.



图6 原始图像与稀疏图像

用重建误差来度量重建结果, 定义如下:



图7 不同算法的重建结果对比图

$$E_R = \frac{\|I_R - I\|_2}{\|I\|_2} \quad (22)$$

其中 I 和 I_R 分别为原始图像和重建图像. 若 $E_R > 100$, 则定义重建实验失败. 由于 IHT 在此实验中失败, 故不参与比较. 表 1 比较了不同算法重建原始图像的误差与时间.

从表 1 可知, 在重建时间上 OMP 算法是最快的, 本文算法次之, BIHT 算法最慢. 而在重建误差方面, 本文算法优于其他两种算法. 这验证了本文提出的 SDIHT 算法是一种高效的压缩感知重建算法.

表 1 重建误差与时间比较

重建算法	重建误差	重建时间(s)
OMP 算法	0.0163	8.8000
BIHT 算法	0.0158	25.1504
本文算法	0.0121	14.2499

下面探索测量次数 M 对重建结果的影响. 用峰值信噪比 (PSNR) 衡量重建结果, 定义如下

$$\text{PSNR} = 10 \times \log_{10} \left(\frac{255 \times 255}{m \times n \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |X(i, j) - X_R(i, j)|^2} \right) \quad (23)$$

其中 m, n 分别为图像的行数和列数, X 与 X_R 分别为原始图像与重建图像. 以 10 为步长从 140 到 220 改变 M , 不同算法重建结果 (即 PSNR 值) 如图 8 所示.

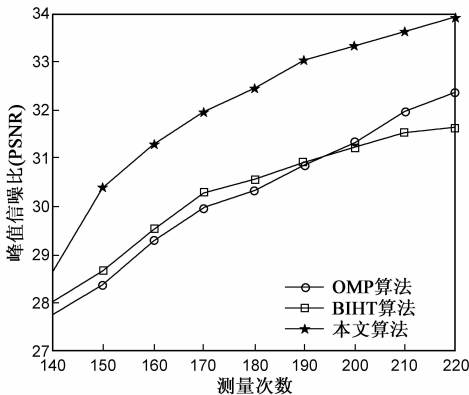


图8 不同算法重建结果的PSNR比较图

从图 8 可知, OMP 与 BIHT 算法相当, 均明显劣于本文算法. 但当测量次数 $M \leq 130$ 时, 本文算法重建原

始图像失败, 原因可归纳如下:

(1) 感知字典与测量矩阵的交叉相关性不够低. 此原因可从本文算法重建性能优劣得知.

(2) 迭代过程中缺少伪逆运算这样的优化过程. 此原因可从 BIHT 和 OMP 算法步骤得知.

(3) 重建高斯随机或者幅值衰减信号本身有缺陷. 此原因可从重建高斯随机稀疏信号实验得知.

5 结论

本文提出了一种基于感知字典的迭代硬阈值 (SDIHT) 算法, 实现协同构造测量矩阵和重建算法, 打破了以往单独构造测量矩阵和重建算法的束缚. 理论证明了 SDIHT 算法精确恢复信号的充分条件. 在测量次数或信号稀疏度相同的前提下, 恢复一维 0-1 信号和二维图像的仿真实验显示该算法在保持低计算复杂度的同时可高精度恢复原始信号, 对于精度和实时性要求较高的场合具有实际意义. 本文的研究工作还有许多有待改进的地方, 例如如何构造交互相关性更低的测量矩阵和感知字典, 如何将感知字典及伪逆运算应用到其他重建算法中以及如何进一步研究构造重建精度更高的算法等问题.

参考文献

- [1] Donoho D L. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 5406 - 5425.
- [2] Candès E, Romberg J, Tao T. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(2): 489 - 509.
- [3] 焦李成, 杨淑媛, 等. 压缩感知回顾与展望 [J]. 电子学报, 2011, 7(7): 1651 - 1662.
JIAO Li-cheng, YANG Shu-yuan, et al. Development and prospect of compressive sensing [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 7(7): 1651 - 1662. (in Chinese)
- [4] Candès E J, Tao T. Decoding by linear programming [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51 (12): 4203 - 4215.
- [5] Devore R A. Deterministic construction of compressed sensing matrices [J]. Journal of Complexity, 2007, 23(4-6): 918 - 925.
- [6] Ni K, Datta S, et al. Efficient deterministic compressed sensing for images with chirps and reed-muller codes [J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2011, 4(3): 931 - 953.
- [7] Elad M. Optimized projections for compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(12): 5695 - 5702.
- [8] Duarte-Carvajalino J M, Sapiro G. Learning to sense sparse signals: Simultaneous sensing matrix and sparsifying dictionary op-

- timization [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2009, 18(7): 1395 – 1408.
- [9] Abolghasemi V, Ferdowsi S, Sanei S. A gradient-based alternating minimization approach for optimization of the measurement matrix in compressive sensing [J]. Signal Processing, 2012, 92(3): 999 – 1009.
- [10] Tropp J A. Greed is good: Algorithmic results for sparse approximation [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2004, 50(10): 2231 – 2242.
- [11] Rauhut H, Schnass K, Vandergheynst P. Compressed sensing and redundant dictionaries [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2008, 54(5): 2210 – 2219.
- [12] 杨海蓉, 张成, 等. 压缩传感理论与重构算法 [J]. 电子学报, 2011, 39(1): 142 – 148.
YANG Hai-rong, ZHANG Cheng, et al. The theory of compressed sensing and reconstruction algorithm [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(1): 142 – 148. (in Chinese)
- [13] Chen B S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1998, 20(1): 33 – 61.
- [14] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(12): 4655 – 4666.
- [15] Dai W, Milenkovic O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 55(5): 2230 – 2249.
- [16] Needell D, Tropp J A. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2008, 26(3): 301 – 321.
- [17] Blumensath T, Davies M E. Iterative hard thresholding for compressed sensing [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2009, 27(3): 265 – 274.
- [18] 杨海蓉, 方红, 等. 基于回溯的迭代硬阈值算法 [J]. 自动化学报, 2011, 37(3): 276 – 282.
YANG Hai-Rong, FANG Hong, et al. Iterative hard thresholding algorithm based on backtracking [J]. Acta Automatica Sinica, 2011, 37(3): 276 – 282. (in Chinese)
- [19] 付宁, 乔立岩, 等. 面向压缩感知的块稀疏度自适应迭代算法 [J]. 电子学报, 2011, 39(3A): 75 – 79.
FU Ning, QIAO Li-yan, et al. Block sparsity adaptive iteration algorithm for compressed sensing [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(3A): 75 – 79. (in Chinese)
- [20] 李志林, 陈后金, 等. 一种有效的压缩感知图像重建算法 [J]. 电子学报, 2011, 39(12): 2796 – 2800.
LI Zhi-lin, CHEN Hou-jin, et al. An efficient algorithm for compressed sensing image reconstruction [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(12): 2796 – 2800. (in Chinese)
- [21] Schnass K, Vandergheynst P. Dictionary preconditioning for greedy algorithms [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(5): 1994 – 2002.
- [22] Li B, Shen Y, Li J. Dictionaries construction using alternating projection method in compressive sensing [J]. IEEE Signal Processing Letter, 2011, 18(11): 663 – 666.

作者简介



李 佳 男, 1986 年出生于河北衡水. 2010 年, 2012 年获得哈尔滨工业大学理学学士和工学硕士学位, 现为哈尔滨工业大学博士研究生. 研究方向为压缩感知、图像处理、无线传感器网络等.

E-mail: hitsalijia@163.com



王 强 男, 1975 年出生于辽宁沈阳. 哈尔滨工业大学控制科学与工程系教授、博士生导师. 主要研究方向为多传感器数据融合, 图像处理, 智能检测技术等.

E-mail: wangqiang@hit.edu.cn

沈 毅 男, 1965 年出生于吉林扶余. 哈尔滨工业大学控制科学与工程系教授、博士生导师. 主要研究方向为导航、制导与控制, 故障诊断和数字超声成像技术.

李 波 男, 1985 年出生于黑龙江虎林. 2008 年、2010 年获得哈尔滨工业大学工学学士和工学硕士学位, 现为哈尔滨工业大学博士研究生. 研究方向为目标跟踪, 压缩感知理论与应用.