

基于 FRFT 的线性调频信号欠采样快速检测方法

仇兆炀¹, 陈 蓉^{1,2}, 汪一鸣^{1,2}

(1. 苏州大学电子信息学院, 江苏苏州 215006; 2. 通信系统信息控制技术国家级重点实验室, 浙江嘉兴 314001)

摘 要: 采用分数阶 Fourier 变换对线性调频信号(Linear Frequency Modulation, LFM)进行检测与参数估计时, 由于信号的特征未知, 需要运用二维搜索方法确定分数阶 Fourier 变换的最佳旋转角度. 该方法运算量巨大. 为减少运算量, 本文推导了欠采样前后 LFM 信号的分数阶 Fourier 变换最佳能量聚集旋转角度关系, 证明了无噪 LFM 信号的调频率估计可以完全不受 Nyquist 采样定理的限制; 通过推导分析欠采样含噪 LFM 信号在最佳分数阶 Fourier 域的信噪比, 给出了欠采样倍数 M 对 LFM 信号检测的影响及其选取原则; 最终提出一种基于欠采样理论的 LFM 信号快速检测方法. 实验结果表明, 当 M 选取合适时, 利用原始信号的欠采样样本即可对 LFM 信号实现有效检测, 快速确定其调频率.

关键词: 欠采样; 分数阶 Fourier 变换; 线性调频信号; 最佳旋转角度; 信噪比

中图分类号: TN957.51 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2012) 11-2165-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.11.004

Fast Detection of LFM Signal Based on FRFT and Sub-Nyquist Sampling

QIU Zhao-yang¹, CHEN Rong^{1,2}, WANG Yi-ming^{1,2}

(1. School of Electronics and Information Engineering, Soochow University, Suzhou, Jiangsu 215006, China;

2. National Laboratory of Information Control Technology for Communication System, Jiaxing, Zhejiang 314001, China)

Abstract: The relationship between the optimal rotation angle of fractional Fourier transform (FRFT) of the undersampled signal and that of the original signal was studied. It was proved that the chirp-rate of noiseless linear frequency modulation (LFM) signal can be estimated correctly even though the signal was undersampled. By deducing and analyzing the signal to noise ratio (SNR) in the optimal fractional Fourier domain, the impact of subsampling rate on detection of LFM signal was discussed. Finally, a novel method was proposed to realize fast detection of LFM signal. Simulation results show that when the subsampling rate is set properly, the detection and parameter estimation of LFM signal can be realized rapidly by applying FRFT to the undersampled signal.

Key words: sub-nyquist sampling; fractional Fourier transform; linear frequency modulation signal; optimal rotation angle; signal to noise ratio

1 引言

线性调频 (Linear Frequency Modulation, LFM) 信号被广泛应用于雷达、声纳等信息系统中, 对其的检测与参数估计具有重要意义, 如通过对 LFM 信号参数的正确估计可以有效地分辨雷达类型^[1]等. 鉴于 LFM 信号的非平稳特性, 通常采用时频分析方法对其进行处理, 如短时 Fourier 变换、Gabor 变换、小波变换等.

分数阶 Fourier 变换 (Fractional Fourier Transform, FRFT) 是近年来发展起来的一种新的时频分析工具. 由于 FRFT 对 LFM 信号具有良好的能量聚集性且其离散

算法的计算量与 FFT 相当, 因此, 分数阶 Fourier 变换被大量应用于 LFM 信号的检测和分析^[2~5]. 对于特征未知的 LFM 信号, 基于 FRFT 的二维峰值搜索可有效实现 LFM 信号的检测及调频率估计. 然而, 该方法计算量大, 检测耗时长^[2].

为了解决这一问题, 本文从处理欠采样信号的角度出发, 首先推导了欠采样前后 LFM 信号的最佳分数阶 Fourier 变换旋转角度关系, 进而证明利用欠采样 LFM 信号的最佳 FRFT 旋转角度即可有效的估计原始信号的调频率. 在此基础上, 提出了一种基于欠采样技术的 LFM 信号的快速检测方法.

2 基于 FRFT 及 DTFRFT 的 LFM 信号检测原理

分数阶 Fourier 变换是 Fourier 变换的一种广义形式. 信号的分数阶 Fourier 变换可以理解为信号在时频平面中坐标轴绕原点逆时针旋转任意角度后的表示方法, 当旋转角度为 $\frac{\pi}{2}$ 时, 分数阶 Fourier 变换即为传统的 Fourier 变换.

信号 $x(t)$ 在 α 角度的 FRFT 定义为^[6]

$$X_{\alpha}(u) = \begin{cases} B_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\pi(u^2 \cot\alpha - 2ut \csc\alpha + t^2 \cot\alpha)} x(t) dt, & \alpha \neq n\pi \\ x(t), & \alpha = 2n\pi \\ x(-t), & \alpha = (2n+1)\pi \end{cases} \quad (1)$$

其中, $B_{\alpha} = \sqrt{1 - j \cot\alpha}$, n 为整数.

2.1 基于 FRFT 的 LFM 信号检测原理

设 LFM 信号的时域表达式为

$$x(t) = A \cdot e^{j2\pi f_0 t + j\pi k_0 t^2} \quad (2)$$

其中, A 为信号幅度, k_0 为调频率, f_0 为初始频率.

把式(2)代入式(1)中, 得

$$X_{\alpha}(u) = AB_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\pi[u^2 \cot\alpha - 2ut \csc\alpha + 2f_0 t + (\cot\alpha + k_0)t^2]} dt$$

当 $\alpha = \text{arccot}(-k_0)$ 时, LFM 信号在最佳分数阶 Fourier 域中形成能量聚集, 有

$$X_{\alpha}(u) = AB_{\alpha} e^{j\pi u^2 \cot\alpha} \delta[2\pi(uc \csc\alpha - f_0)] \quad (3)$$

2.2 基于 DTFRFT 的 LFM 信号检测原理

实际应用中, 处理对象均为离散信号, 因此本文采用离散时间分数阶 Fourier 变换进行理论推导.

离散时间分数阶 Fourier 变换^[7]的定义为

$$X_{\alpha}(u) = B_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\pi u^2 \cot\alpha + j\pi(nT_s)^2 \cot\alpha - j2\pi u T_s \csc\alpha} x(nT_s) \quad (4)$$

其中, T_s 为采样间隔, n 为整数.

设采样间隔为 T_s 的离散时间 LFM 信号为

$$x(nT_s) = A e^{j2\pi f_0 n T_s + j\pi k_0 n^2 T_s^2} \quad (5)$$

把式(5)代入式(4), 得

$$X_{\alpha}(u) = AB_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\pi u^2 \cot\alpha - 2j\pi u T_s \csc\alpha + 2j\pi f_0 n T_s + j\pi n^2 (T_s^2 \cot\alpha + k_0 T_s^2)} \quad (6)$$

当 $T_s^2 \cot\alpha = -k_0 T_s^2$ 时, 可以找到最佳旋转角度 α_0 , 即

$$\alpha_0 = \text{arccot}(-k_0) \quad (7)$$

根据等式 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n} = 2\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi r)$ 可得

$$X_{\alpha_0}(u) = 2\pi AB_{\alpha_0} e^{j\pi u^2 \cot\alpha_0} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(2\pi u T_s \csc\alpha_0 - 2\pi f_0 T_s - 2\pi r) \quad (8)$$

显然, 离散情况下, LFM 信号仍会在最佳分数阶 Fourier 域中产生能量聚集.

3 基于 DTFRFT 的欠采样 LFM 信号的检测及参数估计

3.1 欠采样 LFM 信号在最佳分数阶 Fourier 域的能量聚集

为便于讨论, 令欠采样前的原始信号是使用奈奎斯特采样频率采样所得信号, M 倍欠采样信号是使用奈奎斯特采样频率的 $\frac{1}{M}$ 倍的频率采样所得信号.

设离散 LFM 信号 $x(nT_s)$ 的 M 倍欠采样信号为

$$x'(nT_s) = x(MnT_s) = x(nT_s) \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(nT_s - iMT_s) \quad (9)$$

根据泊松和公式, $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(nT_s - iMT_s) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M} n T_s i}$, 式(9)可以进一步写成

$$\begin{aligned} x'(nT_s) &= \frac{1}{M} x(nT_s) \sum_{i=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M} n T_s i} \\ &= \frac{A}{M} \sum_{i=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M} n T_s i} e^{j2\pi f_0 n T_s + j\pi k_0 n^2 T_s^2} \end{aligned} \quad (10)$$

在众多离散分数阶 Fourier 变换(DFRFT)算法中, 由 Ozaktas 等人提出的采样型算法^[6]的计算结果与连续 FRFT 接近, 计算复杂度仅为 $O(N \cdot \lg N)$, 计算速度与 FFT 相当, 因此得到广泛的认可与应用.

然而, 采样型算法需先对数据进行量纲归一化. 由于 Ozaktas 等人提出的量纲归一化方法在实际中不具可操作性, 故工程中多采用文献[8]提出的离散尺度化方法. 该方法直接将观测时间 T_d 作为 LFM 信号时长, 采样频率 f_s 作为 LFM 信号带宽. 量纲归一化后, 信号在新坐标系中被限定在区间 $[-\frac{x_b}{2}, \frac{x_b}{2}]$ 内, 采样间隔为 $\frac{1}{x_b}$, 其中 $x_b = \sqrt{T_d f_s}$. 可以看到, 量纲归一化后, 信号的时域区间及采样间隔都发生了改变, 这将使 LFM 信号在分数阶 Fourier 域中的最佳旋转角度及其分布发生变化. 因此, 需考虑量纲归一化对欠采样信号 DTFRFT 的影响.

对信号进行 M 倍欠采样后, 式(4)中的变换核的采样间隔从 T_s 变为 $T'_s = \frac{1}{x_b} = \frac{1}{\sqrt{T_d f_s / M}} = \sqrt{M} T_s$, 且式(4)

中的自变量 n 变为 $n' = \frac{n}{M}$.

用 T'_s 、 n' 和欠采样后的信号 $x'(nT_s)$ 重写式(4), 可得到受量纲归一化影响的欠采样信号 DTFRFT 的结果

$$X'_{\beta}(u) = B_{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\pi u^2 \cot\beta + j\pi \frac{(nT_s)^2}{M} \cot\beta - j2\pi u \frac{nT_s}{\sqrt{M}} \csc\beta} x'(nT_s) \quad (11)$$

其中, β 是欠采样 LFM 信号做分数阶 Fourier 变换的旋转角度, $B_{\beta} = \sqrt{1 - j\cot\beta}$.

把式(10)代入式(11),得

$$X'_{\beta}(u) = \frac{AB_{\beta}}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cdot e^{j\pi u^2 \cot\beta - j2\pi \frac{nT_s}{\sqrt{M}} u \csc\beta + j2\pi f_0 nT_s + j\frac{2\pi}{M} nT_s i + j\pi(k_0 T_s^2 + \frac{T_s^2}{M} \cot\beta) n^2} \quad (12)$$

显然,当 $\frac{T_s^2}{M} \cot\beta = -k_0 T_s^2$ 时,可以找到最佳旋转角度,即

$$\beta_0 = \arccot(-Mk_0) \quad (13)$$

此时,式(12)可进一步化为

$$X'_{\beta_0}(u) = 2\pi \frac{AB_{\beta_0}}{M} \sum_{i=0}^{M-1} e^{j\pi u^2 \cot\beta_0} \cdot \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(2\pi \frac{T_s \csc\beta_0}{\sqrt{M}} u - 2\pi f_0 T_s - \frac{2\pi}{M} T_s i - 2\pi r) \quad (14)$$

式(14)表明,任一周期内(r 取任一整数),欠采样 LFM 信号在最佳分数阶 Fourier 域中将形成 M 个能量聚集峰,且与特征参数相同的非欠采样 LFM 信号相比,能量聚集峰的幅值及其在最佳分数阶 Fourier 域中的坐标均发生了变化。

3.2 欠采样前后最佳旋转角度关系

对比式(7)和式(13),可以得到欠采样前后 LFM 信号在分数阶 Fourier 域的最佳旋转角度关系

$$\cot\alpha_0 = \frac{1}{M} \cot\beta_0 \quad (15)$$

其中, α_0 是欠采样前 LFM 信号的最佳 FRFT 旋转角度, β_0 是欠采样后 LFM 信号的最佳 FRFT 旋转角度。

欠采样前的 LFM 信号的调频率估计值为^[8]

$$\hat{k}_0 = -\frac{f_s}{T_d} \cot\alpha_0 \quad (16)$$

欠采样后的 LFM 信号调频率估计值为

$$\hat{k}'_0 = -\frac{f'_s}{T'_d} \cot\beta_0 = -\frac{f_s}{T_d M} \cot\beta_0 \quad (17)$$

将式(15)代入式(17),得

$$\hat{k}'_0 = -\frac{f_s}{T_d M} \cot\beta_0 = -\frac{f_s}{T_d} \cot\alpha_0 = \hat{k}_0 \quad (18)$$

由此可见,仅对欠采样 LFM 信号做 FRFT 处理,即可实现 LFM 信号调频率的有效估计。

3.3 欠采样 LFM 信号的参数估计

利用欠采样 LFM 信号估计原信号调频率的方法由

式(17)给出。

由式(14)知,欠采样 LFM 信号在最佳分数阶 Fourier 域会出现峰值重复与移位,因此,无法使用欠采样 LFM 信号在最佳分数阶 Fourier 域中的分布直接估计原始信号的初始频率。

针对这一问题,可先以 FRFT 处理欠采样 LFM 信号,利用式(17)求调频率,进而由式(18)求得原始 LFM 信号在 FRFT 域中的最佳旋转角度。而后对原始信号在这一最佳分数阶 Fourier 域中进行初始频率的估计。

4 欠采样含噪 LFM 信号在最佳分数阶 Fourier 域的信噪比分析

欠采样倍数 M 取值的不同会影响 LFM 信号在最佳 FRFT 域的峰值大小,进而影响含噪信号检测和估计的有效性。因此,进一步讨论 M 对采样后 LFM 信号在最佳 FRFT 域的信噪比的影响。

时域中,含噪 LFM 信号的信噪比定义为^[9]

$$\text{SNR}_0 = \frac{A^2}{\sigma_0^2} \quad (19)$$

式中, A 为 LFM 信号的幅度, σ_0^2 为高斯白噪声方差。

然而,由于分数阶 Fourier 变换具有聚集 LFM 信号、分散噪声的性质,因此,传统的信噪比定义在分数阶 Fourier 域中不再适用^[10]。文献[11]给出了信号经最佳阶次 FRFT 变换后的信噪比定义

$$\text{SNR}_{\alpha_0} = \frac{|S_{\alpha_0}(u_0)|^4}{D[|R_{\alpha_0}(u_0)|^2]} \quad (20)$$

其中, $S_{\alpha_0}(u_0)$ 为无噪 LFM 信号在最佳变换角度 α_0 下 FRFT 的峰值,其在 FRFT 域的坐标为 u_0 , $R_{\alpha_0}(u_0)$ 为含噪信号在 α_0 角度下 u_0 位置上 FRFT 结果, $D[x]$ 表示 x 的方差。

设非欠采样含噪离散 LFM 信号为

$$r(nT_s) = s(nT_s) + w(nT_s) \quad (21)$$

其中, $s(nT_s)$ 为有限长离散时间 LFM 信号, $n \in [-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$, $w(nT_s)$ 为高斯白噪声,其方差为 σ_0^2 。

记 $r(nT_s)$ 的 M 倍欠采样信号为 $r'(nT_s)$

$$r'(nT_s) = s'(nT_s) + w'(nT_s) \quad (22)$$

其中, $s'(nT_s)$ 、 $w'(nT_s)$ 分别为 $s(nT_s)$ 和 $w(nT_s)$ 的 M 倍欠采样结果。

由式(10)可得,

$$s'(nT_s) = s(MnT_s) = \frac{A}{M} \sum_{i=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M} nT_s i} e^{j2\pi f_0 nT_s + j\pi k_0 n^2 T_s^2} \quad (23)$$

则 $s'(nT_s)$ 的 DTFRFT 结果为

$$S'_{\beta}(u) = B_{\beta} \sum_{n=-\frac{N}{2M}}^{\frac{N}{2M}} e^{j\pi u^2 \cot\beta + j\pi \frac{(nT_s)^2}{M} \cot\beta - j2\pi \frac{nT_s}{\sqrt{M}} u \csc\beta}$$

$$\frac{A}{M} \sum_{i=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}T_i} e^{j2\pi f_0 n T_s + j\pi k_0 n^2 T_s^2} \quad (24)$$

当 $\beta_0 = \arccot(-Mk_0)$, $u_0 = \left(f_0 + \frac{i}{M}\right)\sqrt{M} \sin\beta_0$, $i = 0, 1, 2, \dots, M-1$ 时, $s'(nT_s)$ 在 FRFT 域取得峰值

$$\left| S'_{\beta_0}(u_0) \right|^2 = \frac{A^2 |B_{\beta_0}|^2}{M^2} \left(\frac{N}{M} + 1\right)^2 \quad (25)$$

记 $w'(nT_s)$ 在 β_0 角度下 u_0 位置上的 DTFRFT 值为 $W'_{\beta_0}(u_0)$, 则

$$\begin{aligned} E \left[\left| W'_{\beta_0}(u_0) \right|^2 \right] &= \left| B_{\beta_0} \right|^2 \sum_{n_1 = -\frac{N}{2M}}^{\frac{N}{2M}} \sum_{n_2 = -\frac{N}{2M}}^{\frac{N}{2M}} E \left[w'(n_1 T_s) w'^*(n_2 T_s) \right] \\ &\quad \cdot e^{j\pi \frac{(n_1 T_s)^2}{M} \cot\beta_0 - j2\pi \frac{n_1 T_s}{\sqrt{M}} u_0 \csc\beta_0} \cdot e^{-j\pi \frac{(n_2 T_s)^2}{M} \cot\beta_0 + j2\pi \frac{n_2 T_s}{\sqrt{M}} u_0 \csc\beta_0} \\ &= \left| B_{\beta_0} \right|^2 \sigma_0^2 \left(\frac{N}{M} + 1\right) \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} D \left[\left| R'_{\beta_0}(u_0) \right|^2 \right] &= E \left[\left| R'_{\beta_0}(u_0) \right|^4 \right] - \left\{ E \left[\left| R'_{\beta_0}(u_0) \right|^2 \right] \right\}^2 \\ &= \left(\frac{N}{M} + 1\right) \sigma_0^2 \left[2 \left| S'_{\beta_0}(u_0) \right|^2 \left| B_{\beta_0} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{N}{M} + 1\right) \sigma_0^2 \left| B_{\beta_0} \right|^4 \right] \end{aligned} \quad (27)$$

由此可得, 欠采样含噪 LFM 信号在最佳 FRFT 域中的信噪比为

$$\text{SNR}_{\beta_0} = \frac{A^4 \left(\frac{N}{M} + 1\right)^2}{2A^2 \sigma_0^2 M^2 \left(\frac{N}{M} + 1\right) + M^4 \sigma_0^4} \quad (28)$$

易得, 当 $M = 1$ 时, 式(28)即为非欠采样情况下含噪 LFM 信号在最佳 FRFT 域中的信噪比。

由式(28)可以看出, 对于给定的含噪 LFM 信号, 欠采样倍数 M 将直接影响其在最佳 FRFT 域的信噪比, 进而影响 LFM 信号的检测效果。

5 仿真分析

仿真使用 Ozaktas 的采样型 DFRFT. 取 LFM 信号 $x(t) = e^{j2000\pi t^2 + j2000\pi t}$, 信号持续时间为 $[-0.5\text{s}, 0.5\text{s}]$, 其最高频率为 $2000 \times 0.5 + 1000 = 2000\text{Hz}$, 则奈奎斯特采样频率为 4000Hz , 设欠采样倍数为 M .

图 1 为无噪声情况下, 欠采样前后 LFM 信号在最佳分数阶 Fourier 域中的分布图像. 实验中, 利用 Matlab 软件自带的 Data Cursor 功能, 在仿真结果图中标出了能量聚集峰值点对应的坐标值, 当 $M = 1$ 时, 峰值点对应的 u 域坐标为 $\hat{u}_{0\alpha_0} = 14.15$, 幅度为 54.77; $M = 2$ 时, 峰值点对应的 u 域坐标为 $\hat{u}_{0\beta_0} = 15.81$, 幅度为 24.88.

如图 1 所示, 与图 1(a) 中非欠采样 LFM 信号在最佳 FRFT 域分布相比, 图 1(b) 中经 2 倍欠采样后的 LFM 信号在最佳 FRFT 域的能量聚集峰发生了复制与移位,

且其幅值出现了明显的下降. 根据式(8), 并考虑量纲归一化的影响, 可计算得 $M = 1$ 时, 能量聚集峰值点对应的 u 域坐标理论值为 $u_{0\alpha_0} = \frac{f_0}{\csc\alpha_0} \sqrt{\frac{T_d}{f_s}} \approx \frac{1000}{\csc(2.03)}$

$\sqrt{\frac{1}{4000}} \approx 14.14$, 与实验值 $\hat{u}_{0\alpha_0} = 14.15$ 近似. 根据式(14), $M = 2$ 时, 能量聚集峰值点在正半轴对应的 u 域坐标理论值为 $u_{0\beta_0} = \frac{f_0 \sqrt{M}}{\csc\beta_0} \sqrt{\frac{T_d}{f_s}} \approx \frac{1000 \sqrt{2}}{\csc(2.36)} \sqrt{\frac{1}{4000}} \approx 15.81$, 与实验值 $\hat{u}_{0\beta_0} = 15.81$ 相等.

此外, 根据式(8)与式(14), 并考虑量纲归一化的影响, 可计算出欠采样前后的能量聚集峰幅值关系的理论值, 即

$$\begin{aligned} \left| \frac{X'_{\beta_0}(u)}{X_{\alpha_0}(u)} \right| &= \left| \frac{\sqrt{2} B_{\beta_0}}{2 M B_{\alpha_0}} \right| = \left| \frac{\sqrt{\csc\beta_0}}{\sqrt{2} M |\csc\alpha_0|} \right| \\ &= \left| \frac{\sqrt{|\csc(2.36)|}}{2\sqrt{2} \sqrt{|\csc(2.03)|}} \right| \approx 0.40 \end{aligned}$$

而实验中, 欠采样前后峰值的关系为 $\left| \frac{X'_{\beta_0}(u)}{X_{\alpha_0}(u)} \right| = \frac{24.88}{54.77} \approx 0.45$, 与理论值基本相符.

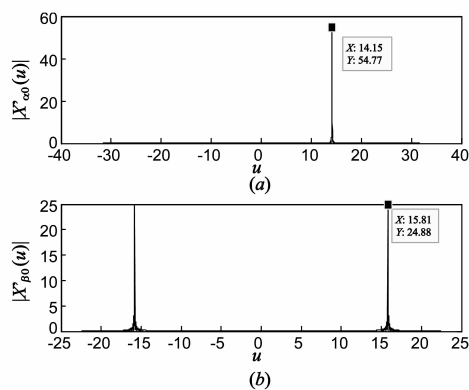


图1 欠采样前后无噪 LFM 信号的最佳分数阶 Fourier 变换结果

图 2 为时域信噪比不同时, 含噪 LFM 信号的最佳 FRFT 域信噪比随 M 的变化情况。

从图 2 可以看出, 显然 $M = 1$ 时, 非欠采样情况下, 信号在最佳 FRFT 域的信噪比最大, 信号检测效果最佳. 当原始信号的时域信噪比 SNR_0 恒定时, 欠采样倍数 M 越大, 信号在最佳 FRFT 域的信噪比 SNR_{β_0} 越小, 越不利于 LFM 信号的检测. 而当 M 一定时, SNR_0 越大, SNR_{β_0} 越大. 因此在时域信噪比 SNR_0 较大时, 可适当增大 M , 以进一步减小运算量。

图 3 为 SNR_0 分别取 $-2\text{dB}, 0\text{dB}, 2\text{dB}$, 且 M 从 1 到 8 变化时, 欠采样前后 LFM 信号调频率估计值的均方根误差 (RMSE). 其中, 每个 M 进行 1000 次 Monte Carlo 模拟运算。

如图 3 所示,调频率估计值的均方根误差随欠采样倍数 M 的增大或 SNR_0 的减小而增大.此外,当 $M \leq 6$ 时,调频率估计值的均方根误差随 SNR_0 的减小而缓慢增加,而当 $M > 6$ 时, SNR_0 的减小将引起调频率估计结果的剧烈恶化.因此,在实际应用中,可根据原始信号的时域信噪比 SNR_0 恰当地选择欠采样倍数 M ,从而在提高检测效率的同时,保证 LFM 信号的正确检测.

图 4 为 SNR_0 从 -8dB 到 0dB 变化时,分别对非欠采样 LFM 信号以及欠采样信号 ($M = 5$) 进行 FRFT 处理,估计所得的调频率均方根误差.

可以看出,当 SNR_0 较大时,欠采样前后估计出的

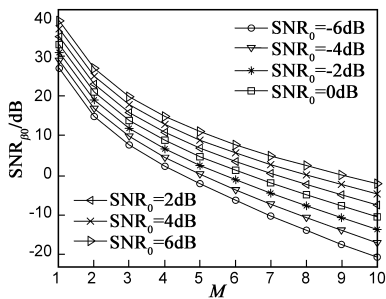


图2 含噪LFM信号的最佳FRFT域信噪比示意图

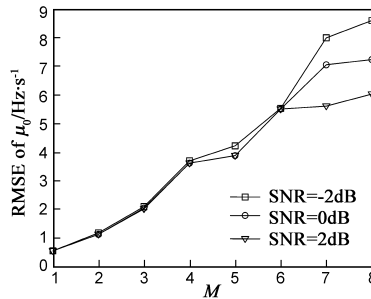


图3 M 取不同值时,调频率估计值的均方根误差

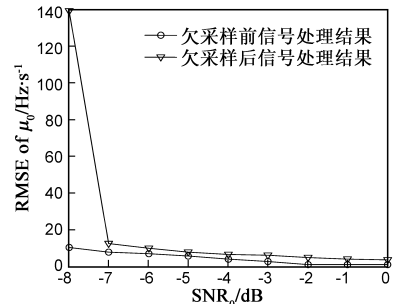


图4 不同信噪比下,非欠采样信号及欠采样信号($M=5$)调频率估计值均方根误差

6 结论

本文通过研究基于 FRFT 的 LFM 信号检测原理并结合 DTFRT 推导出了受量纲归一化影响的欠采样前后 LFM 信号最佳分数阶 Fourier 变换旋转角度之间的关系,从理论上证明了可直接使用欠采样 LFM 信号的最佳旋转角度来估计原始 LFM 信号的调频率,从而降低 LFM 信号检测的运算量.此外,通过推导欠采样含噪 LFM 信号在最佳 FRFT 域的信噪比公式,给出了欠采样倍数对信号检测的影响及其选取原则.本文提出的方法可以应用于多个 LFM 信号的调频率检测.

参考文献

- [1] 谢德光,张贤达.基于分数阶 Fourier 变换的雷达目标识别[J].清华大学学报,2010,50(4):485-488.
Xie De-guang, Zhang Xian-da. Radar target recognition based on fractional Fourier transform[J]. Journal of Tsinghua University, 2010, 50(4): 485-488. (in Chinese)
- [2] 齐林,陶然,等.基于分数阶 Fourier 变换的多分量 LFM 信号的检测和参数估计[J].中国科学 E 辑,2003,33(8):349-359.
- [3] Tao Ran, Deng Bing, Wang Yue. Research progress of the fractional fourier transform in signal processing[J]. Science in China F: Information Science, 2006, 49(1): 1-25.
- [4] 殷敬伟,惠俊英,蔡平,郭龙祥.分数阶 Fourier 变换在深海

调频率误差较小,此时可直接利用欠采样信号作为处理对象来估计 LFM 信号的调频率.而当 $\text{SNR}_0 < -7\text{dB}$ 时,欠采样 LFM 信号在最佳分数阶 Fourier 域的峰值逐渐被噪声淹没,无法实现调频率的正确估计.

综上所述,当 M 选取合适时,欠采样含噪 LFM 信号在最佳 FRFT 域的峰值不会被噪声淹没,此时可利用原始信号的欠采样样本实现 LFM 信号的检测及其调频率估计,从而使待处理信号的数据量减少为原来的 $\frac{1}{M}$,一次 FRFT 运算的计算复杂度从欠采样前的 $O(N \cdot \lg N)$ 降低为欠采样后的 $O(\frac{N}{M} \cdot \lg \frac{N}{M})$,检测效率得到大幅提高.

远程水声通信中的应用[J].电子学报,2007,35(8):1499-1504.

Yin Jing-wei, Hui Jun-ying, Cai Ping, Guo Long-xiang. Application of fractional fourier transform in long range deep-water acoustic communication[J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(8): 1499-1504. (in Chinese)

- [5] 杨小明,陶然.基于分数阶傅里叶变换的线性调频信号二维波达方向估计[J].电子学报,2008,36(9):1737-1740.
Yang Xiao-ming, Tao Ran. 2-D DOA estimation of LFM signals based on fractional fourier transform[J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(9): 1737-1740. (in Chinese)
- [6] H M Ozaktas, Orhan Arikan, et al. Digital computation of the fractional fourier transform[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1996, 44(9): 2141-2150.
- [7] Erseghe T, Kraniakauskas P, Cariolaro G. Unified fractional Fourier transform[J]. IEEE Tran Signal Process, 1999, 47(12): 3419-3423.
- [8] 赵兴浩,邓兵,陶然.分数阶傅里叶变换数值计算中的量纲归一化[J].北京理工大学学报,2005,25(4):360-364.
Zhao Xing-hao, Deng Bing, Tao Ran. Dimensional normalization in the digital computation of the fractional fourier transform[J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2005, 25(4): 360-364. (in Chinese)
- [9] 陶然,邓兵,王越.分数阶傅里叶变换及其应用[M].北京:清华大学出版社,2009:105-106.
Tao Ran, Deng Bing, Wang Yue. Fractional Fourier Transform

and Its Applications [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2009: 105 – 106. (in Chinese)

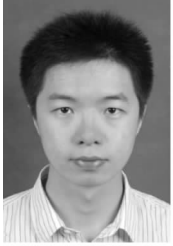
- [10] 刘建成, 刘忠, 王雪松, 肖顺平, 王国玉. 高斯白噪声背景下的 LFM 信号的分数阶 Fourier 域信噪比分析[J]. 电子与信息学报, 2007, 29(10): 2337 – 2340.

Liu Jian-cheng, Liu Zhong, Wang Xue-song, Xiao Shun-ping, Wang Guo-yu. SNR analysis of LFM signal with gaussian

white noise in fractional fourier transform domain[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2007, 29(10): 2337 – 2340. (in Chinese)

- [11] S Barbarossa. Analysis of multicomponent LFM signals by a combined wigner-hough transform[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43(6): 1511 – 1515.

作者简介



仇兆扬 男, 1987 年 7 月生于四川省成都市, 苏州大学电子信息学院硕士研究生. 主要研究方向为通信信号处理.

E-mail: nerv2015@foxmail.com



汪一鸣(通讯作者) 女, 1956 年 2 月生于江苏省苏州市, 苏州大学电子信息学院教授, 博士生导师. 研究方向为认知无线电、通信信号处理.

E-mail: ymwang@suda.edu.cn



陈蓉 女, 1983 年 10 月生于江苏省镇江市, 苏州大学电子信息学院博士研究生. 主要研究方向为通信信号处理, 信道编解码技术.

E-mail: chrong@suda.edu.cn