

PML子结构方法分析波导不连续性问题

杨红卫,慕振峰,姜舒宁,王震

(北京工业大学应用数理学院,北京 100124)

摘要: 按均匀性将波导沿纵向划分为不同子结构,视 PML 为其中一个子结构.采用有限元方法对波导各个子结构横截面进行离散,沿纵向运用精细积分算法求出各子结构的出口刚度阵,进而做子结构拼装以求解波导不连续性问题.算例的数值结果表明本文方法能够有效地分析波导不连续性问题,克服了人工边界距离波导不均匀部分必须足够远的缺点,可以求得距离波导不均匀部分较近区域处的场.

关键词: 波导不连续性;有限元法;完全匹配层;子结构;精细积分

中图分类号: O441.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2013)03-0539-04

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.03.020

Analysis of Waveguide Discontinuity Problems Using PML Substructure Method

YANG Hong-wei, MU Zhen-feng, JIANG Shu-ning, WANG Zhen

(College of Applied Sciences, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: The waveguide is decomposed into several substructures in the longitudinal direction, and PML absorbing boundary is treated as one of them. The transverse section of the substructures is discretized with the finite element method, a precise integration method based on the Riccati equations is used for the longitudinal integration to generate the export stiffness matrices, and then the waveguide discontinuity problems are expected to be solved through the combination of the substructures. Numerical examples demonstrate that, the waveguide discontinuity problems can be effectively solved with this method, the disadvantage that the artificial boundary must be far away from the non-uniform region can be overcome, and the field near the non-uniform region can be worked out.

Key words: waveguide discontinuity; finite element method; perfectly matched layer; substructure; precise integration

1 引言

波导不连续性是波导的基本问题及热点问题.确定不连续波导的入射波与反射波的能量分配,对波导不连续性的分析研究有非常重要的意义^[1~5].有限元方法能够有效地对波导不均匀区域进行离散,因此很适合应用于波导不连续性的分析中.由于通常认为波导沿传播方向是无限长的,在采用有限元方法求解波导不连续性的过程中,必须用人工边界对无限空间进行截断.相较于其他吸收边界条件,PML(Perfectly Matched Layer,完全匹配层)吸收边界条件从理论上能够使得无论什么频率和角度的电磁波都被完全吸收,从而没有反射波反射回计算区域.利用 PML 吸收边界条件可以对求解区域进行有效的截断,保证了数值结果的精确性.

文献[1]中,采用常规有限元方法求解波导不连续

性问题,由于人工边界必须设置在距离不均匀部分足够的地方,导致计算量与内存消耗比较大.文献[2]中,结合 PML 吸收边界条件,利用常规有限元方法分析波导不连续性问题,虽然可以将人工边界设在距离不均匀部分较近的地方,节省了计算空间,但是由于仍需进行三维有限元离散,网格数较多,计算复杂.文献[3,4]中,在辛体系下利用精细积分求解波导不连续性问题,由于运用了精细积分算法,即使人工边界设置在距离不均匀部分较远处也不会增加计算的工作量,但是当人工边界设置在距离不均匀部分较近处时,计算精度并不高.

本文采用 PML 吸收边界条件,并将其视为一个子结构,利用精细积分算法求解波导不连续性问题.将波导按纵向均匀性划分为若干子结构,PML 是其中一个子结构.采用有限元方法对波导各个子结构横截面进行离散,沿纵向运用精细积分算法求出各子结构的出口刚度阵,进而做子结构拼装以对整个问题求解.包括 PML

子结构在内,由于只需对子结构的横截面进行离散,计算工作量大大地减少.与文献[3,4]的区别在于,本文利用 PML 边界条件,并将其视为一个子结构对波导不连续性进行了求解.运用本文算法分别分析计算了介质不连续波导与结构不连续波导的两个算例,并将结果与参考文献的计算结果进行比较,验证了本文方法的有效性.同时,通过研究 PML 前的子结构长度(即人工边界与不均匀部分的距离)与入射能量损耗的关系,对其适用性进行了分析.结果表明,本文方法克服了求解波导不连续性时人工边界必须远离波导不均匀部分的缺点,具有较大的适用性.

2 基本算法与原理

如图 1 所示,矩形波导内部填充有一长方体障碍物.考虑波导是无限长的,设置两个虚构面 S_1 、 S_2 将其截断成有限空间.其中, S_1 面距离障碍物足够远,由障碍物激励的高次模在到达 S_1 面前已经衰减消失,其边界条件见文献[1]; S_2 面处采用 PML 吸收边界条件,即放置完全匹配层来截断计算区域.按均匀性将波导沿纵向划分为 4 个区段,即 S_1 面到不均匀部分、含障碍物的不均匀部分、不均匀部分到 S_2 面以及完全匹配层 4 个子结构.考察其中一个区段,其横截面为 Ω ,纵向长度为有限,两个虚构面的 z 轴坐标分别为 z_a 、 z_b ,考虑齐次边界条件,与矢量波动方程相应的单变量变分原理为^[3]

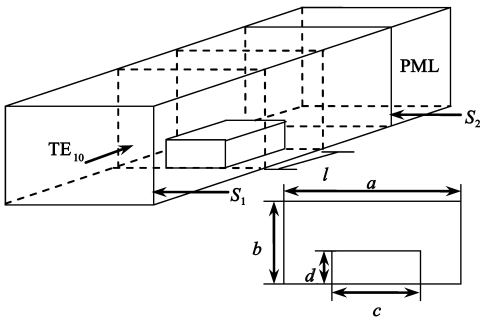


图1 波导几何结构与横截面图示

$\Pi(\mathbf{E})$

$$= \frac{1}{2} \int_{z_a}^{z_b} \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right] d\Omega dz, \quad (1)$$

$$\delta \Pi(\mathbf{E}) = 0$$

其中, \mathbf{E} 为电场强度, μ_r 和 ϵ_r 分别表示介质的磁导率和相对介电常数, k_0 为自由空间波数.将式(1)中的变量 \mathbf{E} 拆分为横向分量 \mathbf{E}_t 与纵向分量 \mathbf{E}_z ,只对区段的横截面进行离散,同时消去其纵向分量 \mathbf{E}_z ,便可以得到用横向变量 \mathbf{E}_t 表示的波导区段电磁势能.波导的区段势能应该是两端切向电场向量的二次型函数,可表示为

$$\Pi(\mathbf{E}_{ta}, \mathbf{E}_{tb}) = \mathbf{E}_{ta}^T \mathbf{K}_{aa} \mathbf{E}_{ta} / 2 + \mathbf{E}_{tb}^T \mathbf{K}_{ba} \mathbf{E}_{ta} + \mathbf{E}_{tb}^T \mathbf{K}_{bb} \mathbf{E}_{tb} / 2 \quad (2)$$

其中, \mathbf{E}_{ta} 、 \mathbf{E}_{tb} 分别是给定波导两端的切向电场向量,矩阵 \mathbf{K}_{aa} 、 \mathbf{K}_{ba} 、 \mathbf{K}_{bb} 为波导区段的出口刚度矩阵.只要求出各个子结构的出口刚度矩阵,就可以做子结构拼装来求解整个问题.

为了求出子结构的出口刚度矩阵 \mathbf{K}_{aa} 、 \mathbf{K}_{ba} 、 \mathbf{K}_{bb} ,引入对偶变量

$$\mathbf{q} = \mathbf{E}_t, \quad \mathbf{p} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} \quad (3)$$

可得到相应的变分原理

$$S = \int_{z_a}^{z_b} [\mathbf{p}^T \dot{\mathbf{p}} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p})] dz, \quad \delta S = 0 \quad (4)$$

其中 $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \mathbf{D} \mathbf{p} / 2 + \mathbf{p}^T \mathbf{A} \mathbf{p} + \mathbf{q}^T \mathbf{B} \mathbf{q} / 2$ (5) $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ 为哈密顿函数,也可以称为波导区段的混合能密度, \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{D} 为相应系数矩阵.只要求得哈密顿函数,即可得到相应的系数矩阵 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{D} 的值.

通过对区段势能的 Legendre 变换引入波导的区段的混合能^[4,6],可知区段混合能同样是二次型函数,可表达为

$$\Pi(\mathbf{q}_a, \mathbf{p}_b) = -\mathbf{q}_a^T \mathbf{Q} \mathbf{q}_a / 2 + \mathbf{p}_b^T \mathbf{F} \mathbf{q}_a + \mathbf{p}_b^T \mathbf{G} \mathbf{p}_b / 2 \quad (6)$$

其中, \mathbf{Q} 、 \mathbf{F} 、 \mathbf{G} 为混合能的系数矩阵.矩阵 \mathbf{K}_{aa} 、 \mathbf{K}_{ba} 、 \mathbf{K}_{bb} 与 \mathbf{Q} 、 \mathbf{F} 、 \mathbf{G} 是可以相互转化的,关系如下

$$\mathbf{K}_{aa} = \mathbf{Q} + \mathbf{F}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}, \quad \mathbf{K}_{ba} = -\mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}, \quad \mathbf{K}_{bb} = \mathbf{G}^{-1} \quad (7)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}_{aa} - \mathbf{K}_{ba}^T \mathbf{K}_{bb}^{-1} \mathbf{K}_{ba}, \quad \mathbf{F} = -\mathbf{K}_{bb}^{-1} \mathbf{K}_{ba}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{K}_{bb}^{-1}$$

区段混合能可由哈密顿函数积分得到,即区段混合能系数矩阵 \mathbf{Q} 、 \mathbf{F} 、 \mathbf{G} 可由区段混合能密度矩阵 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 、 \mathbf{D} 积分得到,其关系满足联立 Riccati 微分方程

$$\begin{cases} d\mathbf{F}/d\eta = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{B})\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{A} - \mathbf{D}\mathbf{Q}) \\ d\mathbf{G}/d\eta = \mathbf{D} + \mathbf{A}\mathbf{G} + \mathbf{G}\mathbf{A}^T - \mathbf{G}\mathbf{B}\mathbf{G} = \mathbf{F}\mathbf{D}\mathbf{F}^T \\ d\mathbf{Q}/d\eta = \mathbf{F}^T \mathbf{B} \mathbf{F} = \mathbf{B} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A} - \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q} \end{cases} \quad (8)$$

其中, η 为波导的区段长度.求解方程式(8)时采用 Riccati 微分方程的精细积分算法,将积分步长 η 细分为 2^N 段,再进行幂级数展开和区段合并消元,从而得到 η 步长相应的矩阵 \mathbf{Q} 、 \mathbf{F} 、 \mathbf{G} .精细积分算法的精度可以超过现有计算机字长所决定的精度范围,即可认为得到的是计算机上的解析解.在得到 \mathbf{Q} 、 \mathbf{F} 、 \mathbf{G} 后由式(7)就可求出子结构的出口刚度矩阵 \mathbf{K}_{aa} 、 \mathbf{K}_{ba} 、 \mathbf{K}_{bb} ,将求出的各子结构出口刚度矩阵进行有限元拼装便可对整个问题求解,进而求出反射系数和透射系数.

在 PML 子结构中, x 、 y 、 z 方向的介电常数张量和磁导率张量可以表示为

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \xi_\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_\epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_\epsilon \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_0 \begin{bmatrix} \xi_\mu & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_\mu & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_\mu \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中, $\xi_\mu = \xi_\epsilon = \xi$, $\zeta_\mu = \zeta_\epsilon = \zeta$, $\zeta_\mu = \zeta_\epsilon = \zeta$, 且要求满足 $\xi = \zeta = 1/\zeta$, $\text{Im}(\xi) < 0$. 本文中 PML 参数取 $\xi = \zeta = 1/\zeta = 1 - 5i$ [2,7].

3 数值算例

根据上述理论, 对介质不连续以及结构不连续矩形波导问题进行计算分析, 验证本文方法的有效性, 同时分析其适用性.

例 1 分析计算如图 1 所示的介质不连续矩形波导问题. 取文献中的数据, 其中 $a = 2b$, 介质块尺寸 $c = 0.888b$, $d = 0.399b$, $l = 0.8b$, 介质块的相对介电常数为 $\epsilon_r = 6$, 相对磁导率为 $\mu_r = 1$.

将整个求解区域沿纵轴按均匀性划分为 4 个子结构, 如图 1 所示. 子结构的长度分别取为 $0.8b, 0.8b, 0.8b, 3.0b$, 其中 PML 的厚度为 $3.0b$. 图 2 给出了文献 [1]、文献 [3] 以及本文算法在相同条件下反射系数随 k_0b 变化的曲线. 可以看出, 三种算法的结果吻合得很好, 证明了本文方法在处理波导介质不连续问题时的有效性. 计算中三维矢量单元法共划分单元数 $16 \times 8 \times 16$ 个, 节点数 2601 个, 而本文方法只需对子结构横截面进行离散, 本例中各子结构的横截面离散为 8×4 个单元, 节点数共计 225 个, 未知量的个数大大减少, 保证了本文算法的计算效率. 表 1 给出了两种算法在相同精度下计算时间和内存消耗的比较, 明显看出本文方法的计算效率大大提高.

表 1 两种方法计算时间和内存消耗的比较(相同精度)

k_0b	精细积分算法 + PML		三维矢量单元法	
	计算时间/s	内存消耗/Mb	计算时间/s	内存消耗/Mb
1.8	2.42	852	19.64	1318
2.0	2.39	846	20.09	1319
2.2	2.40	824	19.41	1283

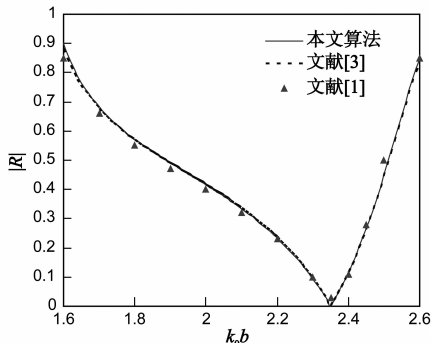


图2 反射系数随 k_0b 变化曲线

下面分析其适用性. 保持 S_1 面位置及 PML 厚度不变, 改变 PML 前的子结构长度, 即 S_2 面的位置随着该子结构长度的改变而改变. 考虑入射能量的损耗, 根据能量守恒定律, 在无损耗介质中, 根据能量守恒, 应该

$$\Delta = 1 - (|R|^2 + |T|^2) = 0 \quad (11)$$

式(11)是一种理想情况, 在计算中由于各种误差的存在, Δ 总是一个很小的非零数值, 故能量损耗 Δ (即计算误差) 可以作为判断算法数值精度的一个指标 [1,4], Δ 越小, 数值结果越精确. R 和 T 分别是反射系数和透射系数, 在求解出电磁场的分布后即可根据公式求出.

图 3 给出了文献 [3] 算法与本文算法得到的 PML 前的子结构长度与能量损耗比率之间的关系曲线, 此时 k_0b 取值 2.4. 可以看出, 即使 PML 前的子结构长度取很短, 运用本文算法得出的结果也非常精确, 其精度远远高于文献 [3] 算法的精度. 也就是说, 本文算法可以不要求人工边界距离介质块必须足够远, S_2 面的位置距离不均匀部分很近也能保证数值结果的精确性, 克服了求解波导不连续性问题时人工边界必须远离波导不均匀部分的缺点. 而且, 当改变子结构长度时, 利用本文算法得到的能量损耗比率 Δ 变化非常小, 说明了此算法结果的稳定性.

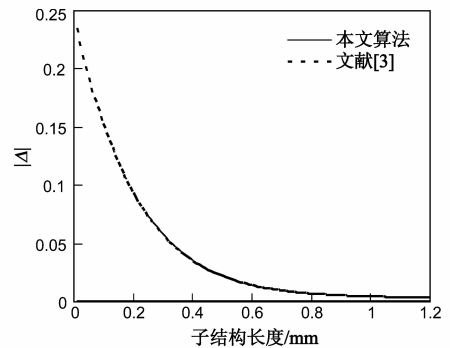


图3 能量损耗随子结构长度变化曲线

例 2 以如图 4 所示脊波导为例分析计算结构不连续波导问题. 图中脊波导横截面尺寸为 $a = 19.05\text{mm}$, $b = 9.524\text{mm}$, 脊的尺寸为 $c = 1.016\text{mm}$, $d = 7.619\text{mm}$, $l = 5.08\text{mm}$.

将整个求解区域沿纵轴按均匀性分为 4 个子结构, 子结构的长度分别取为: $10.16\text{mm}, 5.08\text{mm}, 10.16\text{mm}, 5.08\text{mm}$, 其中 PML 的厚度为 5.08mm . 含脊的子结构横截面被划分为 144 个单元, 其余不含脊的子结构横截面均为 160 个单元. 如图 5 所示, 给出了文献 [1]、文献 [3] 算法以及本文算法在相同条件下透射系数随频率变化

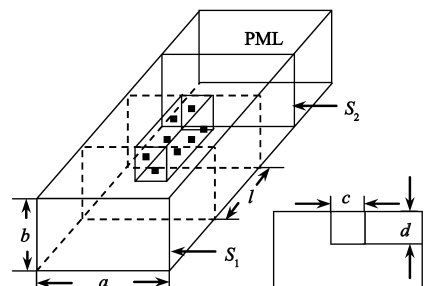


图4 脊波导几何结构及横截面图示

的曲线.可以看出,三种算法的结果吻合得很好.图6给出了脊波导 PML 前的子结构长度与能量损耗的关系曲线,从图中可以得到与例1相同的结论.

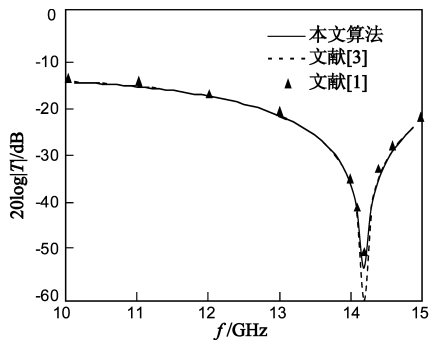


图5 透射系数随频率的变化曲线

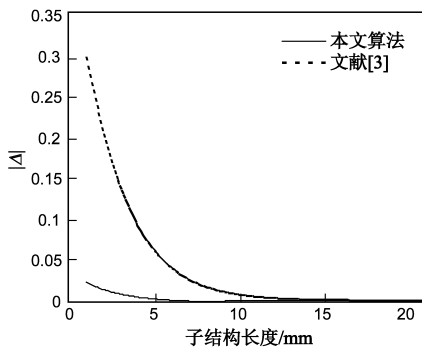


图6 脊波导能量损耗随子结构长度变化曲线

算例表明,无论是处理波导的介质不连续问题还是结构不连续问题,本文方法都是有效的,而且人工边界设置在距离波导不均匀部分较近处时,也能保证计算的精度.

4 结论

本文视 PML 为波导的一个子结构,利用精细积分算法及子结构有限元拼装求解波导不连续性问题.由于只需对子结构的横截面进行离散,可有效减少计算量.算例表明该方法能有效地处理波导不连续性问题.同时,当人工边界取在距离波导不均匀部分较近处时,本文方法仍能保证数值结果的精确性,从而可以求出距离波导不均匀部分较近区域处的场,克服了人工边界必须距离波导不均匀部分足够远的缺点,为求解波导不连续性问题提供了一种高效稳定的算法.

参考文献

- [1] 金建铭. 电磁场有限元方法[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1998. 1 - 190.
Jin J M. The Finite Element Method in Electromagnetic[M]. Xi'an: Xidian University Press, 1998. 1 - 190. (in Chinese)
- [2] 徐欧, 何小祥, 徐金平. 波导介质不连续性问题 FEM/PML 方法分析[J]. 微波学报, 2003, 19(2): 49 - 52.

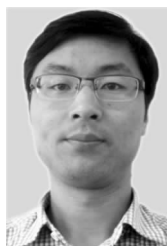
Xu Ou, He Xiao-xiang, Xu Jin-ping. Analyses of dielectric discontinuities in waveguides by FEM/PML method[J]. Journal of Microw, 2003, 19(2): 49 - 52. (in Chinese)

- [3] 杨红卫, 钟万勰, 隋永康. 精细积分算法在波导不连续性问题中的应用[J]. 北京工业大学学报, 2009, 35(4): 571 - 576.
Yang Hong-wei, Zhong Wan-xie, Sui Yong-kang. Application of precise integration algorithm in waveguide discontinuity problems[J]. Journal of Beijing University of Technology, 2009, 35(4): 571 - 576.
- [4] 陈杰夫, 朱宝, 钟万勰. 半解析对偶棱边元及其在波导不连续性问题中的应用[J]. 物理学报, 2009, 58(2): 1091 - 1099.
Chen Jie-fu, Zhu Bao, Zhong Wan-xie. Semi-analytical dual edge element method and its application to waveguide discontinuities[J]. Acta Physica Sinica, 2009, 58(2): 1091 - 1099. (in Chinese)
- [5] 刘发林, 徐善驾. 波导不连续问题分析中基函数对收敛性能影响的研究[J]. 电子学报, 2002, 30(3): 339 - 342.
LIU Fa-lin, XU Shan-Jia. Investigation on effect of basis functions on convergence property in analysis of waveguide discontinuity problems[J]. Acta Electronica Sinica, 2002, 30(3): 339 - 342. (in Chinese)
- [6] 钟万勰. 应用力学对偶体系[M]. 北京: 科学出版社, 2002. 215 - 261.
Zhong Wan-xie. Dual System in Applied Mechanics[M]. Beijing: Science Press, 2002. 215 - 261. (in Chinese)
- [7] J P Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves[J]. Journal of Computational Physics, 1994, 114(2): 185 - 200.

作者简介



杨红卫 女, 1967年8月出生于北京市. 现为北京工业大学数理学院副教授、硕士生导师. 主要研究方向为计算物理学.
E-mail: yanghongwe@bjut.edu.cn



慕振峰 男, 1983年12月出生于河南省鹤壁市. 研究生. 主要研究方向为计算电磁学.
E-mail: muzhf@163.com