

# 适用任意阵列的变换域二维波达角快速估计算法

闫锋刚<sup>1</sup>, 金 铭<sup>2</sup>, 乔晓林<sup>2</sup>

(1. 哈尔滨工业大学电子与信息工程学院, 黑龙江哈尔滨 150001; 2. 哈尔滨工业大学(威海)信息工程研究所, 山东威海 264209)

**摘 要:** MUSIC(Multiple Signal Classification)算法是波达角(the Direction of Arrival, DOA)估计的经典算法之一,但在二维 DOA 估计中因需进行二维谱峰搜索而计算量十分巨大.为降低 MUSIC 算法的计算量,本文在引入变换域 DOA 概念的基础上提出了一种能够适用于任意阵列结构的二维 DOA 快速估计算法,即变换域 MUSIC(transformed domain-MUSIC, TD-MUSIC)算法.理论分析和仿真实验表明:该算法不但将空间谱峰搜索的范围减小一半而且具有更低维度的噪声子空间,因而其计算量远小于 MUSIC 算法.同时,新算法具有比 MUSIC 更高的空间分辨率.

**关键词:** 变换域 MUSIC; DOA 估计; 虚拟辐射源; 交替投影算法; 奇异值分解

**中图分类号:** TN959.2      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2013)05-0936-07

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.05.017

## Fast 2-D DOA Estimation Method in Transformed Domain with Arbitrary Arrays

YAN Feng-gang<sup>1</sup>, JIN Ming<sup>2</sup>, QIAO Xiao-lin<sup>2</sup>

(1. School of Electronics and Information Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin, Heilongjiang 150001, China;

2. School of Information Engineering, Harbin Institute of Technology at Weihai, Weihai, Shandong 264209, China)

**Abstract:** As one of the most popular techniques for direction-of-arrival(DOA)estimation, the multiple signal classification (MUSIC)algorithm has a tremendous computational complexity for 2-D DOA estimation problems, which is mainly caused by an involved 2-D spectral search step. To reduce the complexity, a new algorithm named the transformed domain MUSIC(TD-MUSIC) for fast 2-D DOA estimation with arbitrary arrays is presented by this work based on a new concept of the transformed domain DOA. It is shown by theoretical analysis and experiment results that TD-MUSIC not only realizes a compression for the spectral search region, but also has a dimension-reduced noise subspace and hence, it requires much lower complexity than the standard MUSIC. Moreover, the new method also shows an improved resolution as compared to MUSIC.

**Key words:** transformed domain MUSIC; direction-of-arrival estimation; virtual source; alternate projection method(APM); singular value decomposition(SVD)

## 1 引言

波达角(DOA)估计是雷达、声呐、无线通信和无源定位等应用中经常遇到的关键问题<sup>[1]</sup>.过去几十年内,基于子空间的 DOA 估计算法如 ML (Maximum-Likelihood)<sup>[2]</sup>, Mini-norm<sup>[3]</sup>, MUSIC<sup>[4]</sup>等得到了深入研究.其中, MUSIC 算法以其优越的空间分辨性能和对阵列结构的弱依赖性吸引了众多研究者的深入关注<sup>[5]</sup>.然而,经典 MUSIC 巨大的计算量妨碍了其在实际工程的广泛应用.

MUSIC 算法巨大的计算量主要产生于两个方面,一是子空间分解,二是谱峰搜索.由于子空间分解通常基于特征值分解(Eigenvalue Decomposition, EVD)或奇异值分解(Singular Value decomposition, SVD)得到,一些无需

EVD 或 SVD 的快速 DOA 估计算法被相继提出<sup>[6,7]</sup>.然而事实上,谱峰搜索的计算量要远远大于子空间分解的计算量<sup>[8,9]</sup>.这是因为谱峰搜索需计算空间谱的每个谱值,而空间谱总点数在精确搜索或二维 DOA 估计中十分巨大<sup>[10~12]</sup>.因此,避免谱峰搜索或降低谱峰搜索的范围是实现快速 DOA 估计的关键.基于此,一些无需搜索(search-free method)的 DOA 估计算法应运而生.其中, root-MUSIC<sup>[13]</sup>和 ESPRIT<sup>[14]</sup>是最重要的两类算法.然而不幸的是, ESPRIT 要求阵列结构具有旋转不变性(shift-invariant)而 root-MUSIC 算法仅适用于均匀线阵(Uniform Linear Array, ULA).近年来,一些学者提出了将 ESPRIT 和 root-MUSIC 扩展到任意阵列结构的思路,通过所谓的降维 MUSIC (Reduced Dimension MUSIC, RD-MUSIC)算

法<sup>[15]</sup>、阵列分离技术 (Manifold Separation Technique, MST)<sup>[16]</sup>及傅里叶域求根 MUSIC (Fourier-domain MUSIC, FD-MUSIC)<sup>[8]</sup>等降低 DOA 估计的计算量。但这些算法或者依然受到阵型的限制,或者仅适用一维 DOA 估计。

我们知道,虚拟阵元 (Array Interpolation) 技术<sup>[17,18]</sup>通过阵列映射等效地增加了阵元个数,扩展了阵列孔径。那么,与其对应的概念即虚拟辐射源是否存在、能否被应用于 DOA 估计并带来何种便利呢? 本文在此类启发下,提出了一种适用于任意阵列结构的二维 DOA 快速估计算法。该算法的核心思想可总结为如下两点:一是引入了变换域 DOA 的概念,使得任意二维阵列的导向矢量具有了共轭对称性;二是利用原噪声子空间及共轭噪声子空间的交集代替 MUSIC 算法的噪声子空间并提出了变换域 MUSIC (Transformed Domain MUSIC, TD-MUSIC) 算法。理论分析和实验均表明,新算法实现了空间谱范围的二倍减少和噪声子空间的降维,从而大大降低了 DOA 估计的计算量。

## 2 传统 MUSIC 算法原理

### 2.1 阵列和数据模型

为了便于讨论,我们选取  $M$  个位于  $yo$ z 平面、坐标为  $(0, y_m, z_m)$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$  的阵元作为阵列模型。事实上,后文论述将表明本文算法不受阵型的任何限制。设空间存在  $L$  个窄带、非相关辐射源  $s(t_l)$ ,  $l = 1, 2, \dots, L$  的入射信号。定义波达方向为  $(\theta_l, \varphi_l)$ 。其中,  $\theta_l$  为信号入射方向与其在  $xoy$  平面投影的夹角;  $\varphi_l$  为  $x$  轴与信号入射方向在  $xoy$  平面投影的夹角。其中,  $\theta_l, \varphi_l$  的取值范围均为  $[-\pi/2, \pi/2]$ 。对于远场窄带信号,阵列一次快拍接收的数据可表示为:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi})\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{x}(t) \triangleq [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T$  是  $M \times 1$  维阵列接收数据;  $\mathbf{s}(t) \triangleq [s_1(t), s_2(t), \dots, s_L(t)]^T$  和  $\mathbf{n}(t) \triangleq [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T$  分别表示信号和通道噪声。其中,各通道噪声均为方差为  $\sigma^2$  的加性高斯白噪声 (Additive White Gaussian Noise, AWGN); 阵列流矩阵  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi}) \triangleq [\mathbf{a}(\theta_1, \varphi_1), \mathbf{a}(\theta_2, \varphi_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_L, \varphi_L)]$ , 导向矢量  $\mathbf{a}(\theta_l, \varphi_l)$  为:

$$\mathbf{a}(\theta_l, \varphi_l) \triangleq [\exp(-i\beta_{l,1}), \exp(-i\beta_{l,2}), \dots, \exp(-i\beta_{l,M})]^T \quad (2)$$

其中,  $i = \sqrt{-1}$  为复数单元。

设  $\lambda$  为信号波长,则  $\beta_{l,m}$  为:

$$\beta_{l,m} = \frac{2\pi}{\lambda}(y_m \cos\theta_l \sin\varphi_l + z_m \sin\theta_l) \quad (3)$$

### 2.2 传统 MUSIC 算法

设阵列接收数据协方差矩阵  $\mathbf{R}$ , 则由其定义可得  $\mathbf{R} =$

$E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\} = \mathbf{A}\mathbf{R}_s\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I}$ 。其中,  $\mathbf{R}_s$  是信号数据协方差矩阵。对  $\mathbf{R}$  进行特征值分解,有:  $\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H$ 。其中, 对角阵  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)$ ,  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{M-L+1} = \dots = \lambda_M = \sigma^2$  为  $\mathbf{R}$  的特征值, 其对应的特征向量为  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ 。  $\mathbf{U}$  为特征向量矩阵且按特征值可分块为  $\mathbf{U} = [\mathbf{S}\mathbf{G}]$ 。于是, 矩阵  $\mathbf{S} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_L]$  和  $\mathbf{G} = [\mathbf{e}_{M-L+1}, \dots, \mathbf{e}_M]$  分别张成所谓的信号子空间  $\text{span}(\mathbf{S})$  和噪声子空间  $\text{span}(\mathbf{G})$ 。在阵列信号处理中, 可证明<sup>[4]</sup>:  $\text{span}(\mathbf{S}) \perp \text{span}(\mathbf{G})$  且  $\text{span}(\mathbf{S}) = \text{span}(\mathbf{A})$ , 因此:

$$\mathbf{a}^H(\theta, \varphi)\mathbf{G} = \mathbf{O}_{M \times 1} \quad (4)$$

由此, 可构造 MUSIC 空间谱为:

$$f_{\text{MUSIC}}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta, \varphi)\mathbf{G}\mathbf{G}^H\mathbf{a}(\theta, \varphi)} \quad (5)$$

根据子空间正交性原理, 在二维空间搜索, 可得 DOA 为:

$$(\theta_l, \varphi_l) = \underset{\theta, \varphi}{\text{argmax}} [f_{\text{MUSIC}}(\theta, \varphi)], l = 1, 2, \dots, L \quad (6)$$

## 3 基于变换域 MUSIC 的 DOA 估计算法

### 3.1 从角度域 DOA 到变换域 DOA

由上述分析可见, 传统 MUSIC 算法的基础是首先利用各阵元接收到的辐射源信号相位差  $\beta_{l,m}$  构造导向矢量模型; 然后通过特征值分解建立互相正交的信号子空间与噪声子空间; 最后基于导向矢量与噪声子空间的正交性判断实现 DOA 估计。由式(3)可见, 基于常规角度域变量  $(\theta, \varphi)$  构建的相位差表达式  $\beta_{l,m}$  是一个关于  $(\theta, \varphi)$  的非线性函数。因而, 式(6)所示的空间谱极值搜索实质上是一个非线性的正交性判断过程。这种非线性使得巨大的计算开销无法得到简化。如果通过某种变换能建立相位差  $\beta_{l,m}$  关于 DOA 或关于 DOA 函数的线性表达式, 则极值搜索能够得到压缩, 从而 DOA 估计速度也将得到提高。由此分析, 我们做如下变换:

$$\begin{cases} u = \cos\theta \sin\varphi \\ v = \sin\theta \end{cases} \quad (7)$$

该变换使传统 MUSIC 谱函数  $f_{\text{MUSIC}}(\theta, \varphi)$  从  $(\theta, \varphi)$  域变换到  $(u, v)$  域。我们称后者为变换域 MUSIC 谱, 并记其谱函数为  $f_{\text{TD-MUSIC}}(\theta, \varphi)$ 。

将式(7)代入式(3), 得:

$$\beta_{l,m} = \frac{2\pi}{\lambda}(y_m u_l + z_m v_l) \quad (8)$$

可见: 变换域的相位差  $\beta_{l,m}$  是变量  $(u, v)$  的线性函数。容易理解, 以自变量  $(\theta, \varphi)$  和以自变量  $(u, v)$  得到的 MUSIC 谱函数和 TD-MUSIC 谱函数在物理意义上是等效的。这是因为, 对于给定的角度域波达角  $(\theta, \varphi)$ , 有唯一的变换域  $(u, v)$  与之对应; 反之, 由式(7)可得:

$$\begin{cases} \theta_1 = \sin^{-1}(v) \\ \varphi_1 = \sin^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{1-v^2}}\right) \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \theta_2 = \sin^{-1}(v) \\ \varphi_2 = \pi - \sin^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{1-v^2}}\right) \end{cases} \quad (9)$$

即对给定的变换域“波达角” $(u, v)$ , 仅有两对角度值 $(\theta, \varphi)$ 和 $(\theta, \pi - \varphi)$ 与其对应. 由于用式(4)可对 $(\theta, \varphi)$ 及 $(\theta, \pi - \varphi)$ 是否为真实波达角进行判断, 因而基于传统 MUSIC 和基于 TD-MUSIC 的 DOA 估计是等效的. 事实上, 类似的想法也在文献[8]和[19]中被论述过.

下面, 我们对 $(u, v)$ 和 $(\theta, \varphi)$ 域 DOA 估计进行分析对比. 对式(7)两边求微分, 可得:

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial u}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Delta \varphi = (-\sin \theta \sin \varphi) \Delta \theta + (\cos \theta \cos \varphi) \Delta \varphi \\ \Delta v = \frac{\partial v}{\partial \theta} \Delta \theta + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \Delta \varphi = (\cos \theta) \Delta \theta \end{cases} \quad (10)$$

假设  $\Delta \theta = \Delta \varphi, \Delta u = \Delta v$ , 我们有:

$$\begin{cases} |\Delta u| = |(-\sin \theta \sin \varphi) \Delta \theta + (\cos \theta \cos \varphi) \Delta \varphi| \\ \leq |(-\sin \theta \sin \varphi) \Delta \theta| + |(\cos \theta \cos \varphi) \Delta \varphi| \\ \leq 2|\Delta \theta| \\ |\Delta v| = |(\cos \theta) \Delta \theta| \leq |\Delta \theta| \end{cases} \quad (11)$$

可见, 基于变换域的空间谱函数和传统角度域的空间谱函数关于各自的自变量的变换率是不一样的. 由(11)可知: 在某些角度, TD-MUSIC 相比于 MUSIC 可能出现空间谱函数峰值位置的误差. 然而, 搜索步长的量化作用使得该误差不会超过搜索步长. 通常情况下, 搜索步长相对于整个空间谱范围而言取值很小. 因而 TD-MUSIC 空间谱函数的峰值位置误差不会太大. 为保持 DOA 估计精度不下降, 我们可先利用 TD-MUSIC 得到变换域 DOA, 再在其临域进行极致检验. 后续实验将表明, 本文提出的变换域 MUSIC 实际上和 MUSIC 具有十分接近的 RMSE (root mean square error).

### 3.2 变换域虚拟辐射源及 TD-MUSIC 谱函数构造

设空间存在辐射源  $E$ , 其角度域波达角为 $(\theta, \varphi)$ , 而由式(7)给出的变换域波达角为 $(u, v)$ . 由于:  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$  且  $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ , 因此,  $\tilde{u} \in [-1, 1], \tilde{v} \in [-1, 1]$ , 即  $u$  和  $v$  的取值范围均关于原点对称. 将式(8)代入式(2), 可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(u, v) &= \begin{bmatrix} \exp[-i2\pi(y_1 u + z_1 v)/\lambda] \\ \exp[-i2\pi(y_2 u + z_2 v)/\lambda] \\ \vdots \\ \exp[-i2\pi(y_M u + z_M v)/\lambda] \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \exp[-i2\pi[y_1(-u) + z_1(-v)]/\lambda] \\ \exp[-i2\pi[y_2(-u) + z_2(-v)]/\lambda] \\ \vdots \\ \exp[-i2\pi[y_M(-u) + z_M(-v)]/\lambda] \end{bmatrix}^* \\ &= \mathbf{a}^*(-u, -v) \end{aligned} \quad (12)$$

用  $\mathbf{a}(u, v)$  替换式(4)的  $\mathbf{a}(\theta, \varphi)$  并对其两边同取共轭, 同时利用式(12), 可得:

$$[\mathbf{a}^*(u, v)]^H \mathbf{G}^* = \mathbf{a}^H(-u, -v) \mathbf{G}^* = \mathbf{O}_{M \times 1} \quad (13)$$

由式(13)可见: 变换域波达角为 $(u, v)$ 的辐射源实

际上存在虚拟波达角为 $(-u, -v)$ 的镜像  $E'$ , 我们不妨称其为虚拟辐射源. 对比式(4)和(13)发现, 真实辐射源对应的导向矢量取值与原噪声子空间  $\text{span}(\mathbf{G})$  正交, 而虚拟辐射源对应的导向矢量取值与共轭噪声子空间  $\text{span}(\mathbf{G}^*)$  正交. 如果我们利用  $\text{span}(\mathbf{G})$  与  $\text{span}(\mathbf{G}^*)$  的交集代替  $\text{span}(\mathbf{G})$  构造 TD-MUSIC 谱函数, 由于  $\text{span}(\mathbf{G})$  与  $\text{span}(\mathbf{G}^*)$  的交集具有与导向矢量及其共轭的双正交性, 因而 TD-MUSIC 将在真实 DOA 及其镜像位置同时产生极值. 这种特性使得 DOA 估计只须搜索 $(u, v)$ 域的一半范围即可, 因而实现了搜索范围的减小.

构造 TD-MUSIC 的关键在于求解  $\text{span}(\mathbf{G})$  与  $\text{span}(\mathbf{G}^*)$  的交集  $\text{span}(\mathbf{G}_{\text{inter}})$ . 为此, 我们首先介绍一种传统的基于极限收敛的交替投影算法 (Alternate Projection Method, APM), 然后再给出一种直接求解方法, 并对两者进行分析对比.

APM<sup>[20,21]</sup>是在已知两个子空间投影矩阵的基础上, 通过某种极限运算得到这两个子空间交集投影矩阵的方法. 其主要结论由下述定理给出:

**定理 1** 设  $\mathbf{P}_1$  和  $\mathbf{P}_2$  为 Hilbert 空间  $\mathbf{H}$  的两个有限维子空间, 其投影矩阵分别为  $\mathbf{M}_1$  和  $\mathbf{M}_2$ . 设  $\mathbf{B}_H$  为  $\mathbf{H}$  的单位球, 那么  $\mathbf{P}_1$  和  $\mathbf{P}_2$  交集  $\mathbf{P}$  的投影矩阵  $\mathbf{M}$  与  $\mathbf{M}_1$  和  $\mathbf{M}_2$  满足:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2)^n - \mathbf{M}\| = \vartheta(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)^{2n-1} \quad (14)$$

其中,  $\vartheta(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$  为  $\mathbf{P}_1$  和  $\mathbf{P}_2$  夹角的余弦值, 定义为:

$$\vartheta(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) \triangleq \sup \{ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mid \mathbf{x} \in \mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}^\perp \cap \mathbf{B}_H, \mathbf{y} \in \mathbf{P}_2 \cap \mathbf{P}^\perp \cap \mathbf{B}_H \} \quad (15)$$

**证明** 该定理的证明由 Aronszajn 在文献[20]中给出. Kayalar 和 Weinert 在文献[21]对其收敛性进行了讨论. 定理 1 表明: 两个子空间投影矩阵乘积的幂收敛于两者交集的投影矩阵. 如果我们令:

$$\mathbf{M}_1 \triangleq \mathbf{G} \mathbf{G}^H, \mathbf{M}_2 \triangleq \mathbf{G}^* \mathbf{G}^T \quad (16)$$

利用  $\mathbf{G}^H \mathbf{G} = \mathbf{I}_{M-L}$  可得  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_1^H$  且:

$$\mathbf{M}_1^2 = \mathbf{G} \mathbf{G}^H \mathbf{G} \mathbf{G}^H = \mathbf{G} \mathbf{I}_{M-L} \mathbf{G}^H = \mathbf{G} \mathbf{G}^H = \mathbf{M}_1 \quad (17)$$

同理可得:  $\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_2^H, \mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_2^2$ . 表明:  $\mathbf{M}_1$  和  $\mathbf{M}_2$  均为 Hermite 矩阵, 因而它们分别是原噪声子空间  $\text{span}(\mathbf{G})$  和共轭噪声子空间  $\text{span}(\mathbf{G}^*)$  的投影矩阵<sup>[20]</sup>; 显然,  $\mathbf{G}_{\text{inter}} \mathbf{G}_{\text{inter}}^H$  是  $\text{span}(\mathbf{G}_{\text{inter}})$  的投影矩阵. 因此, 由定理 1 得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\mathbf{G} \mathbf{G}^H \mathbf{G}^* \mathbf{G}^T)^n - \mathbf{G}_{\text{inter}} \mathbf{G}_{\text{inter}}^H\| = \mathbf{O}_{M \times 1} \quad (18)$$

于是, 我们基于 APM 可定义 TD-MUSIC 谱函数(我们记其为 TD-MUSIC-APM)为:

$$\begin{aligned} f_{\text{TD-MUSIC-APM}}(u, v) &= \frac{1}{\mathbf{a}^H(u, v) \mathbf{G}_{\text{inter}} \mathbf{G}_{\text{inter}}^H \mathbf{a}(u, v)} \\ &= \frac{1}{\mathbf{a}^H(u, v) \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{G} \mathbf{G}^H \mathbf{G}^* \mathbf{G}^T)^n \mathbf{a}(u, v)} \end{aligned} \quad (19)$$

利用式(19),我们得到了 TD-MUSIC 的构造方法. 该方法的优点是当阵元数  $M$  或信噪比(Signal-to-Noise Ratio, SNR)较大时,指数  $n$  取值较小即能获得较好的收敛精度,因而计算量较小. 但当  $M$  或 SNR 较小时,则需要较大  $n$  值才能获得较好的收敛精度. 另外,不同应用条件下,  $n$  的选择也缺少统一确定方法. 为了克服 AMP 的不足,这里,我们给出一种基于矩阵奇异值分解直接求取  $\text{span}(\mathbf{G}_{\text{inter}})$  的方法.

**定理 2** 利用  $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{G}^*$  定义如下式所示的矩阵  $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q} \triangleq \mathbf{G}^T \mathbf{G}^* \quad (20)$$

设  $\mathbf{Q}$  的 SVD 为  $\mathbf{Q} = \mathbf{C}\mathbf{\Sigma}\mathbf{D}^H$ , 那么我们有:

$$\mathbf{G}_{\text{inter}} = \mathbf{G}\mathbf{C}(1, 1: M-2L) \triangleq \mathbf{W} \quad (21)$$

**证明** 该定理的证明参见[22]的 12.2.4 节.

由定理 2,我们同样可基于 SVD 构造 TD-MUSIC 谱函数(我们记其为 TD-MUSIC-SVD)为:

$$\begin{aligned} f_{\text{TD-MUSIC-SVD}}(u, v) &= \frac{1}{\mathbf{a}^H(u, v) \mathbf{G}_{\text{inter}} \mathbf{G}_{\text{inter}}^H \mathbf{a}(u, v)} \\ &= \frac{1}{\mathbf{a}^H(u, v) \mathbf{W}\mathbf{W}^H \mathbf{a}(u, v)} \quad (22) \end{aligned}$$

如前文所述,由于 TD-MUSIC 具有在  $(u, v)$  域的真实 DOA 及其镜像位置同时产生极值的特性,因而 DOA 估计只须搜索  $(u, v)$  域 TD-MUSIC 的一半范围即可定位谱峰位置. 之后,我们在得到的谱峰位置及其镜像位置的小邻域进行极值检验,只有满足与原噪声子空间正交的峰值位置才是真实波达角.

由前文理论分析和公式推导可见,本文算法对阵列形式无任何特殊要求,能够适用于任意二维阵列结构、甚至立体阵.

### 3.3 TD-MUSIC 算法步骤描述

综上所述,本文提出的 TD-MUSIC 算法步骤如下:

**步骤 1** 若工作环境 SNR 较高,选取合适的指数  $n$  ( $n \leq 2$ ) 基于式(19)构造 TD-MUSIC 空间谱;否则,直接利用式(22)构造 TD-MUSIC 空间谱;

**步骤 2** 在 TD-MUSIC 半谱内搜索,给出  $(u, v)$  域 DOA 信息  $(\hat{u}_i, \hat{v}_i)$  或其镜像  $(-\hat{u}_i, -\hat{v}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, L'$ ,  $L' \leq L$ ;

**步骤 3** 用  $\mathbf{a}(-\hat{u}_i, -\hat{v}_i)$  替换式(4)的  $\mathbf{a}(\theta, \varphi)$  并分别代入  $(\hat{u}_i, \hat{v}_i)$  及  $(-\hat{u}_i, -\hat{v}_i)$  进行极值检验,满足  $\|\mathbf{a}^H(u, v) \mathbf{G}\|^2 \approx 0$  的即为真实变换域波达角  $(\hat{u}_i, \hat{v}_i)$ ;

否则,为虚假镜像;

**步骤 4** 将  $(\hat{u}_i, \hat{v}_i)$  代入(9)计算得到可能的角度域 DOA  $(\hat{\theta}_{i1}, \hat{\varphi}_{i1})$  及  $(\hat{\theta}_{i2}, \hat{\varphi}_{i2})$ ;

**步骤 5** 在  $(\hat{\theta}_{i1}, \hat{\varphi}_{i1})$  及  $(\hat{\theta}_{i2}, \hat{\varphi}_{i2})$  的临近小区域进行极值检验式检验,满足  $\|\mathbf{a}^H(\theta, \varphi) \mathbf{G}\|^2 \approx 0$  的即为真实角度域 DOA;

**步骤 6** 若  $i = L$  则停止;否则令  $i = i + 1$  并转向步骤 3.

从上述步骤可见,若真实辐射源位置本身对称,由于本文算法在“步骤 3”和“步骤 5”中对 MUSIC 谱的对称位置进行了极值检验,因此不会丢失真实 DOA 信息,也不会出现测角模糊.

### 3.4 TD-MUSIC 与 MUSIC 复杂度对比分析

对于传统 MUSIC 算法,计算每个谱值点均需要计算模值  $\|\mathbf{a}^H(\theta, \varphi) \mathbf{G}\|^2$ . 由于  $\mathbf{G}$  的维度为  $M \times (M-L)$ ,故传统 MUSIC 算法谱峰搜索的计算量为  $C_1 = J(M-L)(M+1)^{[5]}$ . 其中,  $J$  为空间谱总点数.

对于本文提出的 TD-MUSIC 算法,计算每个谱值点需要计算模值  $\|\mathbf{a}^H(u, v) \mathbf{G}_{\text{inter}}\|^2$ . 注意到  $\mathbf{G}_{\text{inter}}$  相比于  $\mathbf{G}$  具有更低的维度  $M \times (M-2L)$  且 TD-MUSIC 的谱峰搜索范围降低了一半,故 TD-MUSIC 谱峰搜索的计算量为  $C_2 = J(M-2L)(M+1)/2$ .

对于 MUSIC 和 TD-MUSIC 共同包含的维度为  $M \times M$  的矩阵  $\mathbf{R}$  特征值分解,采用所谓的快速子空间分解技术<sup>[23]</sup>,其复杂度为可被降低至  $C_3 = M(L+2)^2$ . 注意到 TD-MUSIC 的信号子空间维等效为  $M \times (2L)$  且  $\mathbf{Q}$  矩阵相比于  $\mathbf{R}$  矩阵具有更低的维度  $(M-L) \times (M-L)$ ,因此 TD-MUSIC 比 MUSIC 多余的  $\mathbf{Q}$  矩阵 SVD 的复杂度为  $C_4 = (M-L) \times (2L+2)^2$ .

综上, MUSIC 算法和 TD-MUSIC 算法总的计算量分别为:

$$\begin{aligned} C_{\text{MUSIC}} &= C_1 + C_3 \\ &= J(M-L)(M+1) + M(L+2)^2 \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{\text{TD-MUSIC}} &= C_2 + C_3 + C_4 \\ &= J(M-2L)(M+1)/2 + M(L+2)^2 \\ &\quad + (M-L) \times (2L+2)^2 \quad (24) \end{aligned}$$

表 1 和表 2 给出了信源数为  $L = 2$ 、分别采用  $10^\circ$  粗搜索和  $1^\circ$  细搜索时, MUSIC 和 TD-MUSIC 计算量随着阵

表 1 粗搜索时算法复杂度对比

阵元数 比较项目	$M = 5$	$M = 6$	$M = 7$	$M = 8$	$M = 9$	$M = 10$	$M = 11$	$M = 12$	$M = 13$	$M = 14$	$M = 15$
$C_{\text{MUSIC}}$	5912	9168	13072	17624	22824	28672	35168	42312	50104	58544	67632
$C_{\text{TD-MUSIC}}$	1160	2508	4180	6176	8496	11140	14108	17400	21016	24956	29220
$\frac{C_{\text{MUSIC}}}{C_{\text{TD-MUSIC}}}$	5.097	3.656	3.128	2.854	2.686	2.574	2.493	2.432	2.384	2.346	2.315

表 2 细搜索时算法复杂度对比

阵元数 比较项目	$M=5$	$M=6$	$M=7$	$M=8$	$M=9$	$M=10$	$M=11$	$M=12$	$M=13$	$M=14$	$M=15$
$C_{\text{MUSIC}}$	583280	907296	1296112	1749728	2268144	2851360	3499376	4212192	4989808	5832224	6739440
$C_{\text{TD-MUSIC}}$	97388	227040	389092	583544	810396	1069648	1361300	1685352	2041804	2430656	2851908
$\frac{C_{\text{MUSIC}}}{C_{\text{TD-MUSIC}}}$	5.989	3.996	3.331	2.998	2.799	2.666	2.571	2.499	2.444	2.394	2.363

元数变化的对比关系. 由表可见:  $C_{\text{MUSIC}}/C_{\text{TD-MUSIC}} > 2$ , 即本文提出的基于 TD-MUSIC 的 DOA 估计算法的复杂度实际上低于 MUSIC 复杂度的一半.

上述分析中, 我们只对比了 TD-MUSIC-SVD 的和 MUSIC 的复杂度. 从式(19)可见, 当  $n \geq 3$  时, TD-MUSIC-APM 的复杂度要远大于 TD-MUSIC-SVD 的复杂度. 后文实验将表明, 当 SNR 较高时, 式(19)在  $n=2$  时即具有和式(22)相当的精度. 因此, 我们建议当环境 SNR 较高时, 可用  $n \leq 2$  基于式(19)构造 TD-MUSIC.

## 4 仿真及分析

**实验 1** 首先, 我们选取阵元数为  $M=4 \times 4$  的二维均匀阵列, 阵元间距为半个波长, 设置信噪比 SNR = 20dB, 辐射源数  $L=1$ , 快拍数  $N=100$ .  $(\theta, \varphi)$  域 DOA 为  $(30^\circ, 30^\circ)$ , 对应  $(u, v)$  域“DOA”为  $(0.5, 0.4333)$ . 图 1 ~ 图 3 中, 分别给出了传统角度域 MUSIC、变换域 MUSIC 及变换域 TD-MUSIC 的空间谱. 图 4 中, 我们选取了  $M=2 \times 2$  的二维均匀阵列, 阵元间距为半个波长, 信噪比 SNR = -15dB, 快拍数  $N=100$ . 为了进行直观对比, 图 4 固定  $u=0.4333$  而对  $v$  域进行一维显示.

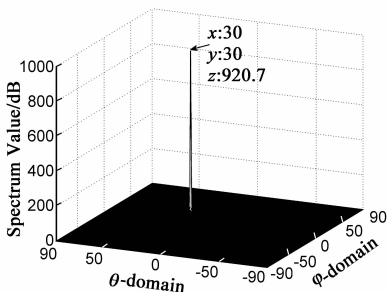


图1 角度域MUSIC空间谱

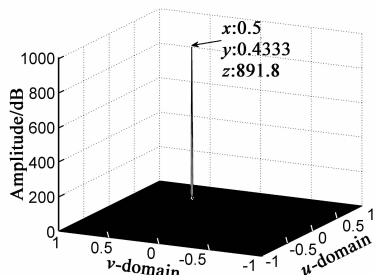


图2 变换域MUSIC空间谱

由图 2 和图 3 可见: 变换域 MUSIC 在变换域波达角  $(0.5, 0.4333)$  处产生了峰值, 而 TD-MUSIC 不但在  $(0.5, 0.4333)$  产生了峰值, 而且在镜像位置  $(-0.5, -0.4333)$

同时产生了峰值. 因此, 我们只需搜索 TD-MUSIC 的半谱即能给出波达角或其镜像. 之后, 进行相应的极值判断即能得到真实 DOA. 由图 4 可见: 随着  $n$  增大, APM 的收敛精度增高并接近于 SVD. 具体表现在 TD-MUSIC-APM 的谱峰随  $n$  的增大而变得更为尖锐, 但其始终没有 TD-MUSIC-SVD 谱尖锐.

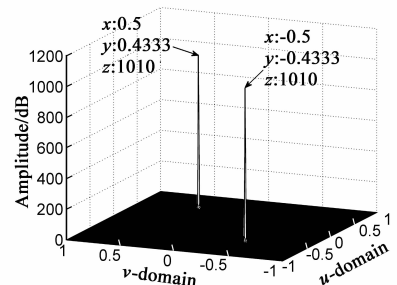


图3 变换域TD-MUSIC空间谱

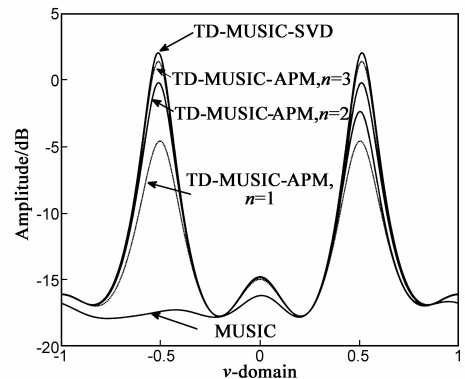


图4 TD-MUSIC-APM、TD-MUSIC-SVD及MUSIC空间谱对比

**实验 2** 为了对比 TD-MUSIC-APM 和 TD-MUSIC-SVD 波达角估计的性能, 我们选取阵元数为  $M=3 \times 3$  的二维均匀阵列, 阵元间距为半个波长并设置  $N=100$ . 然后, 分别利用 TD-MUSIC-APM 和 TD-MUSIC-SVD 空间谱对位于  $(\theta_1, \varphi_1) = (15^\circ, 60^\circ)$  和  $(\theta_2, \varphi_2) = (17^\circ, 60^\circ)$  的两个非相干辐射源进行波达角估计精度和分辨成功概率实验. 图 5 和图 6 分别给出了波达角估计的 RMSE 和分辨成功概率的 500 次蒙特卡罗统计平均值随 SNR 的对比曲线. 其中, RMSE 定义为:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{500} \sum_{i=1}^{500} [(\hat{\theta}_i - \theta_i)^2 + (\hat{\varphi}_i - \varphi_i)^2]} \quad (25)$$

式中,  $(\hat{\theta}_i, \hat{\varphi}_i)$  为估计值,  $(\theta_i, \varphi_i)$  为真实值.

分辨成功概率的定义为: 当相邻的两个角度  $(\theta_1, \varphi_1)$ 、 $(\theta_2, \varphi_2)$  谱值  $f$  满足下式时, 则认为分辨成功:

$$\frac{f(\theta_1, \varphi_1) + f(\theta_2, \varphi_2)}{2} > f\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \quad (26)$$

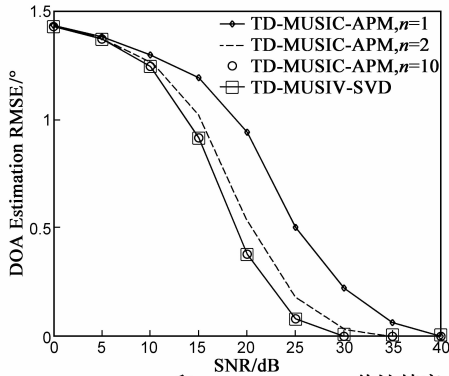


图5 TD-MUSIC-APM和TD-MUSIC-SVD估计精度对比

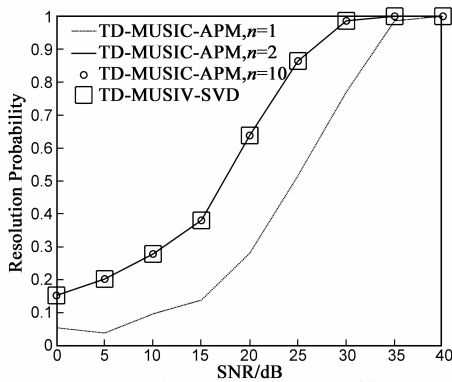


图6 TD-MUSIC-APM和TD-MUSIC-SVD分辨成功概率对比

由图 5 和图 6 可见: TD-MUSIC-APM 相比于 TD-APM-SVD 估计 RMSE 较大, 分辨成功概率也较低. 当  $n = 1$  时, 这种差异最大. 然而, 随着  $n$  的增大, TD-MUSIC-APM 的性能迅速提高, 其在  $n = 2$  时便具有了和 TD-APM-SVD 相当的 RMSE 和几乎完全一致的分辨成功概率. 随着  $n$  的进一步增大, TD-MUSIC-APM 的性能和 TD-APM-SVD 表现一致. 大量仿真试验证明, 当阵元数  $M$  较大或 SNR 较高时, TD-MUSIC-APM 在  $n = 2$  时便具有了和 TD-APM-SVD 一致的估计性能. 因此, 我们在这些情况下也可以选择 APM 法构造 TD-MUSIC 空间谱.

**实验 3** 为了对比 TD-MUSIC 与 MUSIC 波达角估计的性能, 我们选取阵元数为  $M$  的二维均匀阵列, 阵元间距为半个波长并设置  $N = 100$ . 然后, 分别利用 TD-APM-SVD 和 MUSIC 对位于  $(\theta_1, \varphi_1) = (15^\circ, 50^\circ)$  和  $(\theta_2, \varphi_2) = (17^\circ, 50^\circ)$  的两个非相干辐射源进行波达角估计精度和分辨成功概率实验, 实验结果均为 500 次蒙特卡罗统计平均值. 由于 TD-MUSIC-SVD 具有比 TD-MUSIC-APM 更好的精度, 这里我们基于 TD-MUSIC-SVD 进行精度对比实验. 其中, 图 7 以  $M$  为参变量给出了波达角估计的 RMSE 随 SNR 的对比曲线; 图 8 以  $L$  为参变量给出了波达角估计的分辨成功概率随 SNR 的对比曲线.

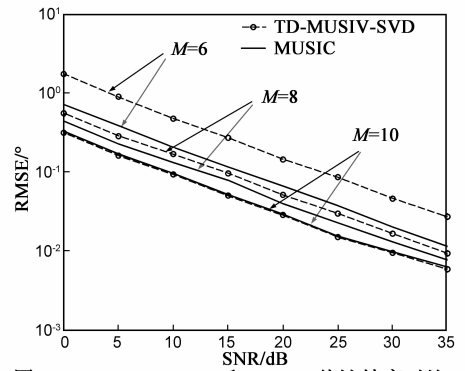


图7 TD-MUSIC-SVD和MUSIC估计精度对比

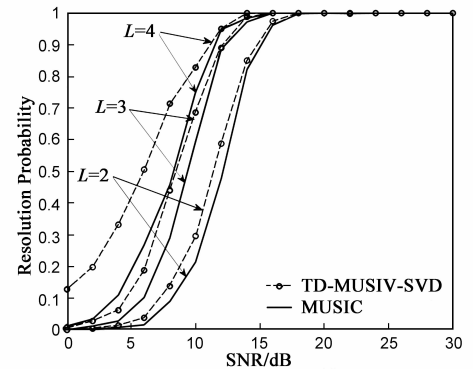


图8 TD-MUSIC-SVD和MUSIC分辨成功概率对比

由图 7 可见: TD-MUSIC-SVD 在  $M$  较小时具有比 MUSIC 更大的估计误差, 但相差不大. 随着  $M$  增大, TD-MUSIC-SVD 和 MUSIC 的误差变得十分接近. 因此, 本文算法在减少计算量的同时并未引起估计误差的太大牺牲. 由图 8 可见, TD-MUSIC-SVD 具有比 MUSIC 更好空间分辨率, 尤其是当  $L$  较大时这种分辨率优势更为明显.

注意到 TD-MUSIC 具有比 MUSIC 更低维度的噪声子空间, 因此前者的空间谱将比后者的空间谱更为尖锐(该现象也可由图 3 看出). 同时发现 TD-MUSIC 的分辨率改善来源于其对估计误差的牺牲. 因而, 本文提出的 TD-MUSIC 算法与 MUSIC 算法的关系与 Mini-Norm<sup>[3]</sup> 和 MUSIC 的关系极为相似<sup>[24]</sup>.

## 5 结论

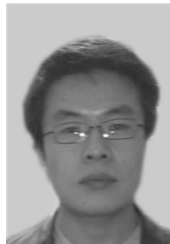
波达方向估计是空间谱估计的重要研究内容. 传统 MUSIC 算法需在二维空间进行峰值搜索, 计算量巨大. 本文将传统角度域波达角转换到变换域, 提出了一种基于变换域 MUSIC 的二维阵列快速 DOA 估计算法. 该算法能适用于任意阵型, 并极大地降低了 DOA 估计的计算量, 具有较大的理论和应用价值.

## 参考文献

- [1] Yo Han Ko, et al. 2-D DOA estimation with cell searching for

- a mobile relay station with uniform circular array [J]. IEEE Trans Communications, 2010, 58(10): 2805 – 2809.
- [2] A G Jaffer. Maximum likelihood direction finding of stochastic sources: A separable solution [A]. Proc ICASSP [C]. 1988, 2893 – 2896.
- [3] R Kumaresan and D W Tufts. Estimating the angles of arrival of multiple plane waves [J]. IEEE Trans Aerosp Electron Syst, 1983, 19(1): 134 – 139.
- [4] R O Schmidt. Multiple emitter location and signal parameter estimation [J]. IEEE Trans Antennas Propag, 1986, 34(3): 276 – 280.
- [5] Y Zhang and Boon Poh Ng. MUSIC-Like DOA estimation without estimating the number of sources [J]. IEEE Trans Signal Process, 2010, 58(3): 1668 – 1676.
- [6] S M Kay and A K Shaw. Frequency estimation by principal component AR spectral estimation method without eigendecomposition [J]. IEEE Trans Acoust Speech, Signal Process, 1988, 36(1): 95 – 101.
- [7] C E Davila and M Azmoodeh. Efficient estimation of the signal subspace without eigendecomposition [J]. IEEE Trans Signal Processing, 1994, 42(1): 236 – 239.
- [8] M Rubsamen and A B Gershman. Direction-of-arrival estimation for nonuniform sensor arrays: From manifold separation to Fourier domain MUSIC methods [J]. IEEE Trans Signal Process, 2009, 57(2): 588 – 599.
- [9] W W Cui, et al. Fast and robust DOA estimation method using searching space pre-estimation [J]. Chinese Journal of Electronics, 2008, 17(1): 136 – 140.
- [10] G M Wang, et al. Computationally efficient subspace-based method for two-dimensional direction estimation with L-shaped array [J]. IEEE Trans Signal Processing, 2011, 59(7): 3197 – 3212.
- [11] F J Chen, S Kwong, C W Kok. Esprit like two dimensional DOA estimation for coherent signals [J]. IEEE Trans Aerospace and Electronic Systems, 2010, 46(3): 1477 – 1484.
- [12] J L Liang, D Liu. Joint elevation and azimuth direction finding using L-shaped array [J]. IEEE Trans Signal Processing, 2010, 58(6): 2136 – 2141.
- [13] V Volodymyr. Improving the performance of root-MUSIC via pseudo-noise resampling and conventional beamformer [J]. Microwave, Radar and Remote Sensing Symposium (MRRS), 2011, 25(8): 309 – 312.
- [14] R Roy and T Kailath. ESPRIT-estimation of parameters via rotational invariance techniques [J]. IEEE Trans Acoust, Speech, Signal Process, 1989, 37(7): 984 – 995.
- [15] X F Zhang, et al. Direction of departure (DOD) and direction of arrival (DOA) estimation in MIMO radar with reduced-dimension MUSIC [J]. IEEE Communications Letters, 2010, 14(12): 1161 – 1163.
- [16] F Belloni, A Richter and V Koivunen. DoA estimation via manifold separation for arbitrary array structures [J]. IEEE Trans Signal Process, 2007, 55(10): 4800 – 4810.
- [17] A Osman, A Noureldin. Direction of arrival estimation using virtual array search [J]. IET Radar, Sonar & Navigation. 2011, 5(4): 389 – 397.
- [18] 张聪, 胡谋法, 卢焕章. 基于虚拟阵列空间平滑的相干信号 DOA 估计 [J]. 电子学报, 2010, 38(4): 929 – 933.  
C Zhang, M F Hu and H Z L. Virtual array-based spatial smoothing method for direction finding of coherent signals [J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(4): 929 – 933. (in Chinese)
- [19] Harry L van Trees. Optimum array processing optimum array processing [M]. John Wiley & Sons, Inc, New York, 2002. 2001 – 2050.
- [20] J von Neumann. Functional operators II. The geometry of orthogonal spaces [M]. Ann of Math Stud, 22 Princeton Univ Press, 1950. 356 – 398.
- [21] S Kayalar and H Weinert. Error bounds for the method of alternating projections [J]. Math Control Signals Systems, 1988, 35(1): 43 – 59.
- [22] G H Golub and C F Van Loan. Matrix computations [M]. 3rd ed. The Johns Hopkins University Press, 1983. 588 – 510.
- [23] G H Xu and T Kailath. Fast subspace decomposition [J]. IEEE Trans Signal Process, 1994, 42(3): 539 – 551.
- [24] F Li, Richard J Vmcaro. Analysis of min-norm and MUSIC with arbitrary array geometry [J]. IEEE Trans Aerosp Electron Syst, 1990, 26(6): 976 – 985.

### 作者简介



闫锋刚 男, 1982 年生于陕西咸阳. 哈尔滨工业大学电子与信息工程系博士研究生, 工程师. 研究方向为雷达对抗, 阵列信号处理, 统计信号理论研究等.

E-mail: yfglion@163.com



金铭 男, 1968 年生于辽宁大连. 哈尔滨工业大学信息工程研究所教授, 博士生导师. 主要研究方向为雷达对抗, 空间谱估计, 极化敏感阵列信号处理等.

E-mail: hit0987@sohu.com