四元二维零相关区阵列集构造法

李玉博,许成谦,李　刚,刘　凯
(燕山大学信息科学与工程学院,河北秦皇岛 066004)

摘　要： 基于二维最佳二进阵列,利用逆Gray映射构造了一类四元二维零相关区(ZCZ)阵列集.得到的四元ZCZ阵列集的参数可以达到理论界限,是一类最佳四元ZCZ阵列集.ZCZ阵列集的参数如阵列数目和零相关区大小可以灵活设定.矩形零相关区在行或者列方向上达到最大值.还给出了一类移位序列集的构造方法,通过设定不同参数可以得到多个可用于构造四元ZCZ阵列集的移位序列.

关键词： 二进制最佳阵列；四元阵列集；零相关区；逆Gray映射
中图分类号： TN911.2　　**文献标识码：** A　　**文章编号：** 0372-2112(2012)10-2047-05
电子学报URL： http://www.ejournal.org.cn　　**DOI：** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.10.024

Construction of Quaternary Two Dimensional Array Sets with a Zero Correlation Zone

LI Yu-bo, XU Cheng-qian, LI Gang, LIU Kai
(*College of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei* 066004, *China*)

Abstract： Based on binary two dimensional array with ideal auto-correlation, a class of quaternary two dimesional array sets with zero-correlation zone are constructed by using inverse Gray mapping. The proposed quaternary ZCZ array set is optimal according to the theoretical bound, and the parameters of which are flexible. Moverover, a construction of shift sequence sets is presented. Numbers of shift sequences can be constructed by setting different parameters, and quaternary ZCZ array sets can be proposed correspondingly.

Key words： binary optimal array; quaternary array set; zero correlation zone; inverse Gray mapping

1　引言

具有良好相关性能的二维序列,也称阵列在很多应用场合具有很重要的应用.例如在位置探测,相控阵天线,声源阵列等领域.阵列也同时用于高维信号处理中.具有理想自相关性能的二元二维最佳阵列广泛存在[1,2].但是具有良好互相关的阵列数目较小,这就限制了最佳阵列的应用.为寻找更多的具有良好互相关性能的二维阵列,有两种方式扩展阵列集的存在范围,一种是将阵列扩展为阵列偶[3],近些年提出一些具有良好性能的二维阵列偶构造方法[3~7].另一种方式是将零相关区(ZCZ)的概念由一维序列推广得到二维零相关区阵列[8],文献[8]利用二维非周期正交互补阵列集构造了二元二维ZCZ阵列集.文献[9]给出了利用Hadamard矩阵构造二元二维ZCZ阵列集的方法.还有一些基于二元最佳阵列和交织法构造二元二维ZCZ阵列集的方法[10,11].文献[12]通过加零的方法构造了三元ZCZ阵列集.文献[13]利用一对Hadamard矩阵构造了一类三元ZCZ阵列集.相对于二元和三元二维ZCZ阵列集,目前四元ZCZ阵列集构造方法比较少.研究四元ZCZ阵列集的构造无论是在实际应用还是理论角度都是值得关注的一个方向.

本文基于二元二维最佳阵列,利用逆Gray映射构造了一类四元二维ZCZ阵列集.阵列自相关函数和互相关函数在原点周围一个矩形内为零.矩形零相关区窗的大小可以灵活设定,在行或者列方向上达到最大值.阵列集中阵列的数目也可以灵活设定.并且阵列集相对于理论界限是最优的.

2　基本概念

定义1[1]　假设两个 $N_1\times N_2$ 阶复数矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{i,j}]$ 和 $\boldsymbol{B}=[b_{i,j}]$,定义阵列互相关函数为

收稿日期:2010-12-15;修回日期:2012-05-23
基金项目:国家自然科学基金(No.60872061,No.60971126,No.61172094);河北省自然科学基金(No.F2012203171);河北省教育厅资助科研课题(No.2010286)

$$R_{A,B}(\tau_1,\tau_2)=\sum_{i=0}^{N_1-1}\sum_{j=0}^{N_2-1}a_{i,j}b^{*}_{(i+\tau_1)\,\mathrm{bmod}\,N_1,(j+\tau_2)\,\mathrm{bmod}\,N_2}$$

式中，$*$ 表示取共轭. 如果 $A=B$，则称上式为阵列自相关函数，简记为 $R_A(\tau_1,\tau_2)$.

定义 2[1] 设一个 $N_1\times N_2$ 阶矩阵 $A=[a_t^i]$ 如下，

$$A=\begin{bmatrix}a^0\\a^1\\\vdots\\a^{N_1-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & \cdots & a_{N_2-1}^0\\a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{N_2-1}^1\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\a_0^{N_1-1} & a_1^{N_1-1} & a_2^{N_1-1} & \cdots & a_{N_2-1}^{N_1-1}\end{bmatrix}$$

其中，a^i 表示阵列的第 $i+1$ 行元素组成的序列，如果阵列的自相关函数满足

$$R_A(\tau_1,\tau_2)=\sum_{i=0}^{N_1-1}\sum_{t=0}^{N_2-1}a_t^i\cdot a^{(i+\tau_1)\mathrm{mod}N_1}_{(t+\tau_2)\mathrm{mod}N_2}=\begin{cases}N_1N_2, & (\tau_1,\tau_2)=(0,0)\mathrm{mod}(N_1,N_2)\\0, & (\tau_1,\tau_2)\neq(0,0)\mathrm{mod}(N_1,N_2)\end{cases}$$

则称阵列 A 为最佳阵列或最佳自相关阵列.

定义 3[8] 设 $C=\{C_i\}_{0\leqslant i\leqslant M-1}$ 是一个包含 M 个 $N_1\times N_2$ 阶阵列的阵列集，如果阵列集中任意两个阵列相关函数满足条件

$$R_{C_i,C_j}(\tau_1,\tau_2)=\begin{cases}E\neq0, & i=j,(\tau_1,\tau_2)=(0,0)\\0, & i\neq j,(\tau_1,\tau_2)=(0,0)\\0, & (\tau_1,\tau_2)\neq(0,0),\\ & |\tau_1|<Z_1,|\tau_2|<Z_2\end{cases}$$

则称 C 为二维零相关区阵列集，表示为 $ZCZ(N_1\times N_2,M,Z_1\times Z_2)$. $Z_1\times Z_2$ 为矩形零相关区大小.

定义 4[14] 定义一个映射如下：

$\phi(0,0)=0,\phi(0,1)=1,\phi(1,1)=2,\phi(1,0)=3$

则 ϕ 称为逆 Gray 映射.

利用逆 Gray 映射可以将二元序列对应到四元序列，有下面引理.

引理 1[14] 设 a_1,a_2,b_1,b_2 是四个周期为 N 的二元序列，s_1 和 s_2 是两个周期为 N 的四元序列，由下面式子得到：

$s_1(t)=\phi(a_1(t),b_1(t)),s_2(t)=\phi(a_2(t),b_2(t))$

则序列 s_1 和 s_2 的互相函数为

$$R_{s_1,s_2}(\tau)=\frac{1}{2}[R_{a_1,a_2}(\tau)+R_{b_1,b_2}(\tau)]+\frac{\omega}{2}[R_{a_1,b_2}(\tau)-R_{b_1,a_2}(\tau)]$$

其中 $\omega=j=\sqrt{-1}$ 表示四次单位原根. 根据引理 1 可以得到下面引理.

引理 2 设 a 是一个周期为 N 的二元序列，s_i 和 s_j 是两个周期为 N 的四元序列，由下面式子得到：

$s_i(t)=\phi(a(t+e_{i,0}),a(t+e_{i,1}))$,

$s_j(t)=\phi(a(t+e_{j,0}),a(t+e_{j,1}))$

其中 $(e_{i,0},e_{i,1})$ 和 $(e_{j,0},e_{j,1})$ 称为移位序列，$e_{i,0},e_{j,0},e_{i,1},e_{j,1}\in\{0,1,2,\cdots,N-1\}$. 定义四个参数：$d_0^{i,j}=e_{i,0}-e_{j,0}$，$d_1^{i,j}=e_{i,1}-e_{j,1}$，$d_2^{i,j}=e_{i,0}-e_{j,1}$，$d_3^{i,j}=e_{i,1}-e_{j,0}$. 序列 s_i 和 s_j 移位不等价当且仅当 $d_0^{i,j}\neq d_1^{i,j}$. s_i 和 s_j 互相关函数为：

$$R_{s_i,s_j}(\tau)=\frac{1}{2}[R_a(\tau-d_0^{i,j})+R_a(\tau-d_1^{i,j})]+\frac{\omega}{2}[R_a(\tau-d_2^{i,j})-R_a(\tau-d_3^{i,j})]$$

3 四元二维 ZCZ 阵列集构造法

本节利用逆 Gray 映射和二元二维最佳阵列来构造四元二维 ZCZ 阵列集.

构造法 1

定理 1 按下面步骤构造得到阵列集 $\{B_m,0\leqslant m\leqslant M-1\}$ 是一个四元 ZCZ 阵列集，可以表示为 $ZCZ(N_1\times N_2,M,N_1\times Z)$.

步骤 1 选取一个 $N_1\times N_2$ 阶的二元二维最佳阵列如下：

$$A=\begin{bmatrix}a^0\\a^1\\\vdots\\a^{N_1-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & \cdots & a_{N_2-1}^0\\a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{N_2-1}^1\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\a_0^{N_1-1} & a_1^{N_1-1} & a_2^{N_1-1} & \cdots & a_{N_2-1}^{N_1-1}\end{bmatrix}$$

其中，$N_2=MZ+r,0\leqslant r\leqslant Z$.

步骤 2 构造移位序列集 $E=\{e_m,0\leqslant m\leqslant M-1\}$，$e_m=(e_{m,0},e_{m,1})$. 满足：

(1)当 $0\leqslant m_1\neq m_2\leqslant M-1$ 时，有 $\min\{d_0^{m_1,m_2},d_1^{m_1,m_2}\}\geqslant Z$ 成立.

(2)当 $0\leqslant m_1,m_2\leqslant M-1$ 时，有 $\min\{d_2^{m_1,m_2},d_3^{m_1,m_2}\}\geqslant Z$ 或者 $d_2^{m_1,m_2}=d_3^{m_1,m_2}$ 成立.

(3)当 $0\leqslant m_1\neq m_2\leqslant M-1$ 时，有 $d_0^{m_1,m_2}\neq d_1^{m_1,m_2}$ 成立.

其中参数 $d_0^{m_1,m_2},d_1^{m_1,m_2},d_2^{m_1,m_2},d_3^{m_1,m_2}$ 同引理 2 中定义.

步骤 3 构造含有 M 个阵列的四元阵列集 $\{B_m,0\leqslant m\leqslant M-1\}$ 如下：

$$B_m=\begin{bmatrix}b^{m,0}\\b^{m,1}\\\vdots\\b^{m,N_1-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_0^{m,0} & b_1^{m,0} & b_2^{m,0} & \cdots & b_{N_2-1}^{m,0}\\b_0^{m,1} & b_1^{m,1} & b_2^{m,1} & \cdots & b_{N_2-1}^{m,1}\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\b_0^{m,N_1-1} & b_1^{m,N_1-1} & b_2^{m,N_1-1} & \cdots & b_{N_2-1}^{m,N_1-1}\end{bmatrix}$$

$b_t^{m,i}=\phi(a_{t+e_{m,0}}^{i},a_{t+e_{m,1}}^{i}),0\leqslant m\leqslant M-1,0\leqslant i\leqslant N_1-1,0\leqslant t\leqslant N_2-1$

证明　设 $\boldsymbol{B}_{m_1}$ 和 $\boldsymbol{B}_{m_2}$ 是两个上述方法构造的四元阵列,当 $m_1=m_2=m$ 时,计算阵列自相关函数

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{B_m}(\tau_1,\tau_2) &= \sum_{i=0}^{N_1-1}\sum_{t=0}^{N_2-1} b_t^{m,i}\cdot b_{(t+\tau_2)\bmod N_2}^{m,(i+\tau_1)\bmod N_1}\\
&= \sum_{i=0}^{N_1-1} R_{\boldsymbol{b}^{m,i},\boldsymbol{b}^{m,(i+\tau_1)\bmod N_1}}(\tau_2)\\
&= \sum_{i=0}^{N_1-1} R_{\boldsymbol{a}^i,\boldsymbol{a}^{(i+\tau_1)\bmod N_1}}(\tau_2)+\frac{\omega}{2}\\
&\quad\Big[\sum_{i=0}^{N_1-1} R_{\boldsymbol{a}^i,\boldsymbol{a}^{(i+\tau_1)\bmod N_1}}(\tau_2-d_2^{m,m})\\
&\quad-\sum_{i=0}^{N_1-1} R_{\boldsymbol{a}^i,\boldsymbol{a}^{(i+\tau_1)\bmod N_1}}(\tau_2-d_3^{m,m})\Big]
\end{aligned}
$$

由于当 $0\leqslant m_1,m_2\leqslant M-1$ 时,有 $\min\{d_2^{m,m},d_3^{m,m}\}\geqslant Z$ 或者 $d_2^{m,m}=d_3^{m,m}$ 成立.根据二维最佳阵列的自相关特性,所以得当 $0\leqslant\tau_1\leqslant N_1-1,0\leqslant\tau_2\leqslant Z-1$ 时有

$$
\sum_{i=0}^{N_1-1} R_{\boldsymbol{a}^i,\boldsymbol{a}^{(i+\tau_1)\bmod N_1}}(\tau_2-d_2^{m,m})-\sum_{i=0}^{N_1-1} R_{\boldsymbol{a}^i,\boldsymbol{a}^{(i+\tau_1)\bmod N_1}}(\tau_2-d_3^{m,m})=0
$$

所以得到

$$
\begin{aligned}
R_{\boldsymbol{B}_m}(\tau_1,\tau_2) &= \sum_{i=0}^{N_1-1} R_{\boldsymbol{b}^{m,i},\boldsymbol{b}^{m,(i+\tau_1)\bmod N_1}}(\tau_2)\\
&= \sum_{i=0}^{N_1-1} R_{\boldsymbol{a}^{m,i},\boldsymbol{a}^{m,(i+\tau_1)\bmod N_1}}(\tau_2)\\
&= \begin{cases} N_1N_2, & (\tau_1,\tau_2)=(0,0)\bmod(N_1,N_2)\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}
\end{aligned}
$$

由上式可以看出,每个四元阵列自相关函数存在一个零相关区 $N_1\times Z$.

当 $m_1\neq m_2$ 时,计算互相关函数如下:

$$
\begin{aligned}
R_{\boldsymbol{B}_{m_1},\boldsymbol{B}_{m_2}}(\tau_1,\tau_2) &= \sum_{i=0}^{N_1-1}\sum_{t=0}^{N_2-1} b_t^{m_1,i}\cdot b_{(t+\tau_2)\bmod N_2}^{m_2,(i+\tau_1)\bmod N_1}\\
&= \sum_{i=0}^{N_1-1} R_{\boldsymbol{b}^{m_1,i},\boldsymbol{b}^{m_2,(i+\tau_1)\bmod N_1}}(\tau_2)\\
&= \frac{1}{2}\Big[\sum_{i=0}^{N_1-1} R_{\boldsymbol{a}^i,\boldsymbol{a}^{(i+\tau_1)\bmod N_1}}(\tau_2-d_0^{m_1,m_2})\\
&\quad+\sum_{i=0}^{N_1-1} R_{\boldsymbol{a}^i,\boldsymbol{a}^{(i+\tau_1)\bmod N_1}}(\tau_2-d_1^{m_1,m_2})\Big]\\
&\quad+\frac{\omega}{2}\Big[\sum_{i=0}^{N_1-1} R_{\boldsymbol{a}^i,\boldsymbol{a}^{(i+\tau_1)\bmod N_1}}(\tau_2-d_2^{m_1,m_2})\\
&\quad-\sum_{i=0}^{N_1-1} R_{\boldsymbol{a}^i,\boldsymbol{a}^{(i+\tau_1)\bmod N_1}}(\tau_2-d_3^{m_1,m_2})\Big]\\
&= \frac{1}{2}[R_A(\tau_1,\tau_2-d_0^{m_1,m_2})+R_A(\tau_1,\tau_2-d_1^{m_1,m_2})]\\
&\quad+\frac{\omega}{2}[R_A(\tau_1,\tau_2-d_2^{m_1,m_2})-R_A(\tau_1,\tau_2-d_3^{m_1,m_2})]
\end{aligned}
$$

由移位序列满足的条件 1 和条件 2 以及最佳阵列的自相关特性得

当 $0\leqslant\tau_1\leqslant N_1-1,0\leqslant\tau_2\leqslant Z-1$ 时,有下面式子成立:

$$R_A(\tau_1,\tau_2-d_2^{m_1,m_2})-R_A(\tau_1,\tau_2-d_3^{m_1,m_2})=0$$

$$R_A(\tau_1,\tau_2-d_0^{m_1,m_2})=R_A(\tau_1,\tau_2-d_1^{m_1,m_2})=0$$

所以此时有 $R_{\boldsymbol{B}_{m_1},\boldsymbol{B}_{m_2}}(\tau_1,\tau_2)=0$.不同阵列互相关函数存在一个 $N_1\times Z$ 的矩形零相关区,矩形零相关区在列方向上达到最大值 N_1.定理成立,证毕.

由上述方法可知,构造法 1 将阵列的每行做为一个序列进行逆 Gray 映射得到一类四元 *ZCZ* 阵列集.也可以将阵列的每列做为一个序列进行构造.

构造法 2

定理 2　按下面步骤得到的四元阵列集 $\{\boldsymbol{B}_m,0\leqslant m\leqslant M-1\}$ 为一个零相关区阵列集,表示为 $ZCZ(N_1\times N_2,M,Z\times N_2)$.

步骤 1　同样选取一个 $N_1\times N_2$ 阶的二元二维最佳阵列 $\boldsymbol{A}$.其中 $N_1=MZ+r,0\leqslant r\leqslant Z$.

步骤 2　构造与构造法 1 相同的移位序列集 $E=\{\boldsymbol{e}_m,0\leqslant m\leqslant M-1\},\boldsymbol{e}_m=(e_{m,0},e_{m,1})$.

步骤 3　构造含有 M 个阵列的四元阵列集 $\{\boldsymbol{B}_m,0\leqslant m\leqslant M-1\}$,其中

$b_t^{m,i}=\phi(a_t^{i+e_{m,0}},a_t^{i+e_{m,1}}),0\leqslant m\leqslant M-1,0\leqslant i\leqslant N_1-1,0\leqslant t\leqslant N_2-1$

证明过程与定理 1 类似,略去.

4　移位序列集的构造

由四元 *ZCZ* 阵列集构造过程可知,只要构造出满足条件的移位序列集,就可以对应得到四元 *ZCZ* 阵列集.本节给出一种满足条件的移位序列集构造方法.

定理 3　设 $N=MZ+r$,其中 $0\leqslant r\leqslant Z-1$,$M$ 为奇数或者 $r\neq0$.构造移位序列集 $\boldsymbol{E}^{\Delta}=\{e_i^{\Delta},0\leqslant i\leqslant M-1\}$,$\boldsymbol{e}_i^{\Delta}=(e_{i,0}^{\Delta},e_{i,1}^{\Delta}),0\leqslant\Delta\leqslant r$.

1. M 为奇数且 $r=0$ 时

$$\boldsymbol{e}_i^0=(iZ,(M-1-i)Z)$$

2. M 为奇数且 $r\neq0$ 时

$$
\boldsymbol{e}_i^{\Delta}=\begin{cases}(iZ,(M-1-i)Z+\Delta), & 0\leqslant i<\dfrac{M-1}{2}\\[2mm] (iZ+\Delta,(M-1-i)Z+\Delta), & i=\dfrac{M-1}{2}\\[2mm] (iZ+\Delta,(M-1-i)Z), & \dfrac{M-1}{2}<i\leqslant M-1\end{cases}
$$

3. M 为偶数且 $r\neq0$ 时

$$
\boldsymbol{e}_i^{\Delta}=\begin{cases}(iZ,(M-1-i)Z+\Delta), & 0\leqslant i\leqslant\dfrac{M}{2}-1\\[2mm] (iZ+\Delta,(M-1-i)Z), & \dfrac{M}{2}\leqslant i\leqslant M-1\end{cases}
$$

得到的移位序列集 $\boldsymbol{E}^{\Delta}=\{\boldsymbol{e}_i^{\Delta},0\leqslant i\leqslant M-1\}$满足构造法 1 中的三个条件.

证明 下面仅对当 M 为奇数且 $r\neq 0$ 时进行证明，其余情况类似.当 $0\leqslant i,j<\frac{M-1}{2}$时，当 $0\leqslant i,j<\frac{M-1}{2}$时，计算得 $d_0^{i,j}=(i-j)Z(\bmod N)$，$d_1^{i,j}=(j-i)Z(\bmod N)$；$d_2^{i,j}=(i+j+1)Z+r-\Delta$；$d_3^{i,j}=(M-i-j-1)Z+\Delta$.设 $i<j$，则有 $d_0^{i,j}=(M+i-j)L+r\geqslant Z$，$d_1^{i,j}=(j-i)Z\geqslant Z$，即 $\min\{d_0^{i,j},d_1^{i,j}\}\geqslant Z$.假设 $d_0^{i,j}=d_1^{i,j}$，则有$(M+i-j)Z+r=(j-i)Z$，进一步得 $N=2(j-i)Z$.因为 $N=MZ+r$，所以 $Z\nmid N$，与 $N=2(j-i)Z$ 相矛盾，假设不成立，即 $d_0^{i,j}\neq d_1^{i,j}$.对于 $0\leqslant i,j<\frac{M-1}{2}$，容易得 $d_2^{i,j}=(i+j+1)Z+r-\Delta\geqslant Z$，$d_3^{i,j}=(M-i-j-1)Z+\Delta\geqslant Z$，所以有 $\min\{d_2^{i,j},d_3^{i,j}\}\geqslant Z$ 成立.

其它情况：当 $0\leqslant i<\frac{M-1}{2}$，$j=\frac{M-1}{2}$时；当 $i=j=\frac{M-1}{2}$时；当 $i=\frac{M-1}{2}$，$\frac{M-1}{2}<j\leqslant M-1$ 时；当$\frac{M-1}{2}<i,j\leqslant M-1$ 时；当 $0\leqslant i<\frac{M-1}{2}$，$\frac{M-1}{2}<j\leqslant M-1$ 时，类似的可以证明移位序列满足构造法的条件.

当 Δ 取遍 0 到 r 的满足条件的整数可以得到多个移位序列集，这些移位序列集都可以用来构造四元 ZCZ 阵列集.从而可以得到多个四元 ZCZ 阵列集.

5 阵列集性能分析

文献[15]给出了二维 ZCZ 阵列集 $ZCZ(N_1\times N_2,M,Z_1\times Z_2)$能够包含的阵列数目的理论上界：

$$M\leqslant\frac{N_1N_2}{Z_1Z_2}$$

当上式等号成立时，称二维 ZCZ 阵列集为最佳二维 ZCZ 阵列集.

本文构造法 1 得到的阵列集参数为 $ZCZ(N_1\times N_2,M,N_1\times Z)$，其中 $N_2=MZ+r$.设 M_0 表示最佳 ZCZ 阵列集中的阵列数目，则有

$$M_0=\left\lfloor\frac{N_1N_2}{N_1Z}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{N_2}{Z}\right\rfloor=M$$

其中$\lfloor x\rfloor$表示不大于 x 的最大整数.由此可见，本文构造法 1 得到的阵列集中阵列数目达到了理论上界，是一个最佳 ZCZ 阵列集.同理有构造法 2 得到的 $ZCZ(N_1\times N_2,M,Z\times N_2)$，其中 $N_1=MZ+r$，有

$$M_0=\left\lfloor\frac{N_1N_2}{N_2Z}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{N_1}{Z}\right\rfloor=M$$

构造法 2 得到的 ZCZ 阵列集同样是一个最佳 ZCZ 阵列集.

可以通过 $N_2=MZ+r$ 和 $N_1=MZ+r$ 来灵活设定阵列集的阵列数目和零相关区大小等参数.下面给出一个构造法 1 的例子.

例 1 选取 8×8 阶二元最佳阵列

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&1&1\\0&0&1&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&1&1&0&1\\0&1&0&1&0&1&0&1\\0&1&0&1&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1&1&0\\0&1&1&1&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

设定 $M=2$，$Z=3$，构造移位序列集 $\boldsymbol{E}=\{(0,3),(3,0)\}$.得到参数为 $ZCZ(8\times 8,2,8\times 3)$的四元 ZCZ 阵列集$\{\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2\}$如下：

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&1&2&3&3&3\\1&0&3&2&1&0&3&2\\0&1&2&0&2&3&0&2\\1&3&1&3&1&3&1&3\\1&2&0&2&3&0&2&0\\0&3&2&1&0&3&2&1\\1&2&3&3&3&0&1&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&0\\0&3&3&3&2&1&1&1\\3&0&1&2&3&0&1&2\\0&3&2&0&2&1&0&2\\3&1&3&1&3&1&3&1\\3&2&0&2&1&0&2&0\\0&1&2&3&0&1&2&3\\3&2&1&1&1&0&3&3\end{pmatrix}$$

6 结束语

利用逆 Gray 映射和二元最佳阵列，本文给出了两种构造参数可以达到理论界限的四元二维 ZCZ 阵列集构造法.并给出了一种用于构造四元 ZCZ 阵列集的移位序列集构造方法.通过选取不同的参数可以得到多个满足条件的移位序列集，对应的可以构造出多个四元 ZCZ 阵列集.得到的四元 ZCZ 阵列集参数可以达到理论上界，并且参数如阵列数目和零相关区大小可以灵活设定以满足不同的应用需求.矩形零相关区在行或者列方向上达到最大值.目前已经提出很多二元、三元 ZCZ 阵列集构造方法，然而四元 ZCZ 阵列集构造法相对较少，本文构造的四元 ZCZ 阵列集也是对二维 ZCZ 阵列集理论的一个补充.

参考文献

[1] J Jebwab, C Mitchell. Constructing new perfect binary arrays [J]. Electronic Letters, 1988, 24(11): 650 – 652.

[2] P Wild. Infinite families of perfect binary arrays[J]. Electronic Letters, 1988, 24(14): 845 – 847.

[3] 赵晓群,何文才,王仲文,贾世楼.最佳二进制阵列偶理论研究[J].电子学报,1999,27(1):34 – 37.
Zhao Xiao-qun, He Wen-cai, Wang Zhong-wen, Jia Shi-lou. The theory of the perfect binary array pairs[J]. Acta Electronica Sinica, 1999, 27(1): 34 – 37. (in Chinese)

[4] 许成谦.差集偶与最佳二进制阵列偶的组合研究方法[J].电子学报,2001,29(1):87 – 89.
Xu Cheng-qian. Differences Set Pairs and Approach for the Study of Perfect Binary Array Pairs[J]. Acta Electronica Sinica, 2001, 29(1): 87 – 89. (in Chinese)

[5] 蒋挺,赵晓群,侯蓝田.最佳屏蔽二进阵列偶理论研究[J].电子学报,2004,32(2):282 – 286.
Jiang Ting, Zhao Xiao-qun, Hou Lan-tian. The study of punctured binary array pairs[J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32 (2): 282 – 286. (in Chinese)

[6] 李兆斌,蒋挺,周正. ZCZ 屏蔽阵列偶集的研究[J].电子学报,2009,37(3):489 – 493.
Li Zhao-bin, Jiang Ting, Zhou Zheng. Study on ZCZ Punctured Array Pairs Set[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(3): 489 – 493. (in Chinese)

[7] 许成谦,彭秀平.最佳四进制阵列偶构造方法研究[J].电子学报,2010,38(1):6 – 12.
Xu Cheng-qian, PENG Xiu-ping. A Study on the Methods for Constructing Perfect Quaternary Array Pairs[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(1): 6 – 12. (in Chinese)

[8] Tang X H, Fan P Z, Li D B, et al. Binary array set with zero correlation zone[J]. Electronic Letters, 2001, 37(13): 841 – 842.

[9] T Hayashi. A class of two-dimensional binary sequences with zero correlation zone[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2002, 9(7): 217 – 221.

[10] Tu Y F, Fan P Z, Hao L, Li X Y. Construction of binary array set with zero correlation zone based on interleaving technique [J]. IEICE Trans Fundamentals, 2011, E94 – A(2): 766 – 772.

[11] Cheng C, Jiang T, Liu Y N. A novel class of 2-D bianry sequences with zero correlation zone[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2010, 17(3): 301 – 304.

[12] T Hayashi. Ternary array set having a zero correlation zone [J]. IEICE Trans Fundamentals, 2003, E86-A(8): 2163 – 2167.

[13] 佟鑫,温巧燕.新的三元零相关区二维阵列集[J].通信学报,2008,29(3):123 – 128.
Tong Xin, Wen Qiao-yan. New class of ternary two dimensional array sets with a zero correlation zone[J]. Journal on Communications, 2008, 29(3): 123 – 128. (in Chinese)

[14] S M Krone, D V Sarwate. Quadriphase sequences for spread-spectrum multiple-access communication[J]. IEEE Trans Inf Theory, 1984, IT-30(3): 520 – 529.

[15] Tang X H, Fan P Z, S S Matsufuji. Lower bounds on correlation of spreading sequence set with low or zero correlation zone[J]. Electronic Letters, 2000, 36(6): 551 – 552.

作者简介

李玉博　男,1985 年生,河北衡水人.2007 年毕业于燕山大学电子信息工程专业,现为燕山大学电路与系统专业博士研究生.主要研究方向为扩频序列设计.
E-mail: liyubo6316@ysu.edu.cn

许成谦　男,1961 年生,陕西城固人.1997 年获北京邮电大学信号与信息处理专业博士学位,现为燕山大学教授、博士生导师.主要研究方向为编码理论、密码学、信号设计等.
E-mail: cqxu@ysu.edu.cn

李　刚　男,1979 年生,黑龙江通河人.2008 年获燕山大学电路与系统专业博士学位,现为燕山大学信息科学与工程学院讲师.主要研究方向为最佳离散信号设计、模式识别.
E-mail: lg@ysu.edu.cn

刘　凯　女,1977 年生,辽宁沈阳人.2010 年获燕山大学电路与系统专业博士学位,现为燕山大学信息科学与工程学院副教授.主要研究方向为序列设计、扩频通信、编码理论.
E-mail: liukai@ysu.edu.cn