

# 基于薄膜振动模型的曲线匹配方法

张桂梅, 马珂, 储

(南昌航空大学计算机视觉研究所, 江西南昌 330063)

**摘 要:** 提出了一种基于薄膜振动模型的仿射不变曲线描述子. 本文针对两种类型的曲线匹配进行研究: 若尔当曲线和开曲线. 对于若尔当曲线, 首先将若尔当曲线进行标准化, 消除仿射畸变对曲线匹配的影响, 然后应用有限元方法在标准化曲线的区域内求解 Helmholtz 方程的本征值构造曲线描述子; 对于开曲线, 首先应用欧氏距离变换对开曲线建立窄带模型形成封闭区域, 然后提取窄带的若尔当曲线代替原开曲线, 最后利用若尔当曲线匹配的方法提取曲线描述子, 实现开曲线的匹配. 用图像库中的图像和真实图像进行实验, 结果表明本文方法要优于现有的傅里叶形状描述方法和 Zernike 矩描述方法.

**关键词:** 曲线匹配; 薄膜振动; 若尔当曲线; Helmholtz 方程; 窄带模型

**中图分类号:** TN911.23      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2013) 10-1917-09

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.10.007

## A New Curve Matching Method Based on Membrane Vibration Model

ZHANG Gui-mei, MA Ke, CHU Jun

(Institute of Computer Vision Nanchang Hang kong University, Nanchang, Jiangxi 330063, China)

**Abstract:** A novel affine invariant curve descriptor based on membrane vibration model is proposed in this paper. This paper focused on two kinds of curves, of which one is Jardon curve and the other is open curve. For the Jardon curve, it was firstly normalized to overcome the influence of affine distortion. The curve descriptors were then obtained by calculating the eigenvalues of Helmholtz equation using the finite element method; For the open curve, its narrowband model region was firstly established by use of Euclidean distance transform. Then the open curves were replaced by the narrowband models. Finally the open curve descriptors were obtained by using the Jardon curve's method. The experimental results show that the proposed method outperforms the existing Fourier descriptor and Zernike moment descriptor.

**Key words:** curve matching; membrane vibration; Jardon curves; Helmholtz equation; narrowband model

## 1 引言

形状匹配是计算机视觉中的重要问题, 在目标识别、图像检索、医学图像分析和军事侦察等领域有着广泛的应用前景<sup>[1,2]</sup>. 在形状匹配中, 最基本的问题是形状特征的提取与描述, 形状描述子对形状区分能力的强弱将直接影响形状匹配的结果. 现有的形状曲线描述方法可以分为基于轮廓曲线的方法和基于区域的方法两大类<sup>[3]</sup>, 前者描述目标的形状考虑的是轮廓曲线上的像素点, 而后者则从目标形状的区域来提取形状的特征.

基于轮廓曲线的方法有曲率尺度空间、傅里叶变换

等经典方法. 曲率尺度空间 (Curvature Scale Space, CSS) 的方法常用于描述平面曲线, 当曲线复杂时该算法的收敛速度很慢<sup>[4]</sup>. 傅里叶描述子被广泛应用于描述物体的轮廓曲线<sup>[5]</sup>. 文献<sup>[6]</sup>通过大量实验证明了傅里叶变换的方法要优于 CSS 方法. 文献<sup>[7]</sup>提出了一种具有仿射不变性的傅里叶描述子, 并将其用于图像检索. 上述方法的有效性依赖于目标轮廓曲线的成功提取, 没有考虑形状区域的内部信息. 与上述方法相比, 基于区域的形状描述方法能够反映目标区域内部的形状信息. 文献<sup>[8]</sup>提出了一种基于傅里叶变换的区域形状描述子, 该方法保留了傅里叶系数中的相位信息, 但只适合于相似变换. 文献<sup>[9]</sup>利用仿射不变矩识别仿射变形的物体, 取

得了较好的识别效果. Zernike 矩<sup>[10]</sup>可以构建任意高阶的独立矩不变量,受到很多学者的关注. Zen Chen 等<sup>[11]</sup>提出了一种基于相位的 Zernike 矩,取得了较好的图像匹配效果,但该方法需要先估计待匹配区域的旋转角度,因而增加了计算复杂度. Lena Gorelick 等提出用定义在形状区域上的泊松方程解进行形状表示的方法<sup>[12]</sup>. 该方法利用泊松方程的解构造出有效描述形状的特征函数,再用几何矩将特征函数整体化得到泊松方程—几何矩描述子,将它应用在图像检索和分类中取得了很好的效果,但这种方法也仅局限于相似变换.

1966 年数学家 M Kac 发表了一篇题为“Can one hear the shape of a drum?”的论文<sup>[13]</sup>,文中提出这样一种思想:人们能否根据鼓的振动模式来猜想出鼓的几何形状. Kac 提出的与提取曲线描述子实现曲线匹配有着相同的特点. 若将鼓的振动模式与曲线的描述子之间建立某种对应关系,则不失为一种好的曲线匹配思想. M Zuliani 等正是基于此,提出利用 Helmholtz 方程边值问题的本征值来描述物体的形状特征<sup>[14]</sup>. 该方法的基本思想是,将形状区域看成是一面鼓的薄膜,通过有限差分方法求解 Helmholtz 方程的本征值来建立形状曲线的 Helmholtz 描述子. 该方法将图像的灰度信息与膜的密度建立一种对应关系,使得获取的曲线描述子具有深刻的物理意义. 他们将该描述子应用于形状匹配中取得了较好的匹配效果. 但该方法也存在着一定的局限性,具体表现为:用有限差分方法求解形状复杂的区域时,计算变得繁琐,并且解的精度受差分网格密集程度的限制;在曲线匹配中,该方法只能提取闭曲线的 Helmholtz 描述子;该描述子是描述物体形状的全局特征量,当物体形状局部遮挡和部分缺损时,匹配效果会受到很大的影响.

为了解决文献<sup>[14]</sup>存在的问题,提高 Helmholtz 描述子对曲线形状的描述精度,拓展该描述子的适用范围,本文在 M Zuliani 等人的基础上,做了一些新的工作. 本文的主要贡献在于:提出了一种新的仿射不变描述子—CHD (Helmholtz Descriptor with Canonical form, CHD),该描述子既能描述曲线的几何形状,又能反应形状区域的内部信息;对开曲线提出并建立了窄带模型,窄带的形状能反映开曲线的几何形状,描述开曲线的细节信息;窄带模型的建立,拓宽了本文描述子的适用范围,使得目标的局部遮挡问题也能得到解决.

## 2 相关理论

### 2.1 若尔当曲线定理

**定义 1** 一条封闭但自身不相交的简单曲线称为若尔当曲线.

**定理 1(若尔当定理<sup>[15]</sup>)** 任一简单闭曲线  $C$  将平

面 $\mathcal{R}^2$ 唯一地分成  $C$ 、 $I(C)$  及  $E(C)$  三个点集(图 1 所示),它们具有如下性质:(1)彼此不交;(2) $I(C)$  是一个有界区域(称为  $C$  的内部);(3) $E(C)$  是一个无界区域(称为  $C$  的外部);(4)若简单折线  $P$  的一个端点属于  $I(C)$ ,另一个端点属于  $E(C)$ ,则  $P$  必与  $C$  有交点.

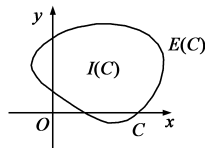


图1 若尔当曲线

若一条曲线满足定义 1 中的条件,则可以将该曲线视为若尔当曲线. 事实上很多物体的轮廓曲线都可以看成是若尔当曲线. 由定理 1 可知,若尔当曲线把平面分成一个“内部”区域和一个“外部”区域. 在后面的讨论中,我们将满足定义 1 和定理 1 的曲线统称为若尔当曲线,同时只考虑若尔当曲线形成的“内部”区域.

### 2.2 若尔当曲线表示

在二维图像坐标平面,物体的轮廓曲线是由有限个点组成的,我们采用如下向量来表示物体轮廓的若尔当曲线: $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ ,  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)^T$  表示若尔当曲线上第  $i$  个点的位置坐标. 这样若尔当曲线的形状就可以用一个  $2 \times n$  的矩阵表示. 对于两条若尔当曲线  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$ ,如果它们满足如下关系

$$\Gamma_2 = \{\mathbf{y} \in \mathcal{R}^2: \exists \mathbf{x} \in \Gamma_1, \text{使得 } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{t}\}$$

成立,则称若尔当曲线  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  仿射对应. 其中,  $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{2 \times 2}$  是非奇异矩阵,  $\mathbf{t} \in \mathcal{R}^2$  是平移向量.

### 2.3 膜振动方程模型

假设在二维平面 $\mathcal{R}^2$ 内有一个封闭的区域  $\Omega$ ,其边界  $\Gamma = \partial\Omega$  是一条若尔当曲线. 我们可以将区域  $\Omega$  视为一面鼓的薄膜,薄膜在外力的作用下会发生振动. 考虑膜的振动时我们作以下几个基本假设<sup>[16]</sup>:

(1)膜的厚度很小,从而可以视为一张曲面. 膜是均匀的,它的面密度  $\rho$  是常数;

(2)膜的平衡位置在一平面内,膜上各点在垂直方向上作微小振动,膜所受到的外力均与该平面垂直;

(3)膜是柔软的,薄膜形变产生的张力符合振动的基本要求.

以  $u(x, y, t)$  记膜在  $(x, y)$  处在时刻  $t$  偏离平衡位置的位移,则膜的振动方程可以表述为<sup>[16]</sup>:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f, \quad (1)$$

其中,  $a = \sqrt{T/\rho}$ ,  $T$  表示膜的张力,  $\rho$  表示膜的面密度,  $f$  为方程的自由项. 当  $f = 0$  时,方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

称为膜的自由振动方程。

### 2.4 Helmholtz 方程及其与图像的内在关系

对式(2)用分离变量法分离其空间和时间部分,  $u(x, y, t) = \varphi(x, y)h(t)$ . 对分离出的空间部分可以得到一个 Helmholtz 方程

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \lambda \varphi = 0, \quad (3)$$

该方程的第一类边界条件是 Dirichlet 边界条件:

$$\begin{cases} -(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}) = \lambda \varphi & (x, y) \in \Omega \\ \varphi(x, y) = 0 & (x, y) \in \Gamma \end{cases} \quad (4)$$

其中  $\lambda$  是方程的本征值, 它能描述薄膜的振动问题。

我们知道不同形状的薄膜, 它在振动时频率是不同的. 根据这种思想, 可以在薄膜振动模式与曲线描述子之间建立一种映射关系, 从而达到曲线匹配的目的. 由于薄膜是均匀的, 面密度  $\rho$  是常数, 所以我们所处理的图像区域应为二值图像, 目标区域的灰度值为 1. 这使得图像的灰度信息与薄膜的密度建立了对应关系。

## 3 若尔当曲线匹配算法

若尔当曲线匹配算法整体思路为: 首先对图像进行预处理, 提取模型与目标图像的轮廓曲线, 将轮廓曲线的坐标按照逆时针的顺序排列; 其次将提取的轮廓曲线标准化, 消除仿射畸变对轮廓曲线的影响; 然后利用有限元方法在标准化曲线围成的区域内计算 Helmholtz 方程的本征值, 构造曲线的仿射不变描述子; 最后利用加权欧氏距离进行差异性度量, 实现曲线匹配。

### 3.1 若尔当曲线获取

匹配的曲线包括模型曲线与目标曲线, 本文采用经典的 canny 边缘检测算法获取若尔当曲线. 但是由于噪声的影响, 用 canny 算子提取的图像边缘常会出现间断点. 因此先对模型和目标图像进行高斯平滑, 以消除间断点, 再进行边缘检测, 以得到较好的轮廓曲线。

为了叙述的方便和论文前后的连贯性, 我们先讨论 Helmholtz 方程本征值的求解以及曲线描述子的构造, 然后再讨论轮廓曲线的标准化过程。

### 3.2 Helmholtz 方程本征值求解

文献[14]用有限差分方法来计算 Helmholtz 方程的特征值. 该方法将求解域划分为差分网格, 用有限个网格节点代替连续的求解域. 文献[17]指出该方法适合处理规则区域(如矩形区域)的边值问题, 如果区域  $\Omega$  是一般的二维区域, 边界  $\Gamma$  是分段光滑曲线, 此时用差分法求解边值问题比矩形区域的情形复杂得多, 且解的精度不高。

有限元方法也常用于求解偏微分方程的数值解。

该方法的基础是变分原理和加权余量法, 其基本求解思想是把求解域划分为有限个互不重叠的单元, 然后再构造基函数形成有限元微分方程, 借助于变分原理和加权余量法, 将微分方程离散求解. 有限元方法适合处理复杂区域, 精度可选. 有限元方法在求解不规则区域的边值问题时与差分方法相比更有优势. 由于本文实验所处理的区域都是复杂区域(不规则区域), 所以经过权衡, 本文采用有限元三角形剖分的方法对复杂区域进行数值求解. 图 2 所示为区域的三角形剖分, 三角形的剖分越细, 求解的本征值就越精确, 具体的求解算法见文献[18].

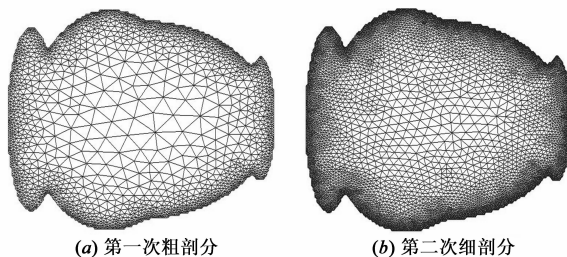


图2 区域的有限元三角形剖分

### 3.3 Helmholtz 描述子及其不变性

利用有限元方法求解式(4)会得到一系列的本征值  $\lambda$ , 它们都是正的实数值, 按从小到大的顺序排列为:  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ , 当  $k \rightarrow \infty, \lambda_k \rightarrow \infty$ . 对于一个薄膜来说, 不同的本征值  $\lambda$  对应于不同的振动模式(如图 3 所示). 本文利用本征值  $\lambda$  构造曲线  $\Gamma$  的仿射不变描述子, 实现曲线匹配. 薄膜振动模式与曲线描述子之间的映射关系正是由膜振动方程的本征值来决定的。

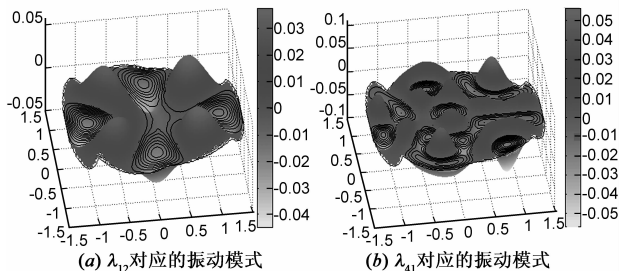


图3 不同本征值对应的振动模式

#### 3.3.1 Helmholtz 描述子

**定义 2** 若  $\Gamma$  是一条若尔当曲线,  $\Omega$  是由  $\Gamma$  所围成的封闭区域,  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1})$  为求解式(4)得到的前  $k+1$  个本征值, 则称  $D(\Gamma)$  为曲线  $\Gamma$  的 Helmholtz 描述子(Helmholtz Descriptor, HD):

$$D(\Gamma) = (\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_3}, \dots, \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}}) \in R^k \quad (5)$$

显然,  $D(\Gamma)$  的每一个元素都在  $(0, 1]$  的范围内. 由于不同的曲线对应不同的薄膜区域, 而每个区域都有

其特定的振动方程和边界条件,所以对每个区域求解的本征值向量都有其独特性.我们用有限元方法对每个区域进行三角形剖分时,利用了区域的内部点集,所以式(5)中构造的曲线描述子,既反映了轮廓曲线的形状特征,又反映了区域的内部信息,具有较好的可区分性.这样就得到了薄膜振动模式与曲线描述子之间的映射关系.

### 3.3.2 旋转、尺度和平移不变性

利用式(5)构造的描述子具有旋转、尺度和平移不变性,因为同一薄膜的旋转、平移并不会改变薄膜的振动频率,薄膜的尺度变换只会使薄膜的振动幅度发生变化.下面给出该描述子对旋转、尺度和平移(RST)不变性的理论说明.

**定理 2** 给定两条若尔当曲线  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$ ,它们满足 RST 变换

$$\Gamma_2 = \{y \in \mathcal{R}^2 : \exists x \in \Gamma_1, \text{使得 } y = sR\mathbf{x} + \mathbf{t}\},$$

$\Omega_1$  和  $\Omega_2$  分别是  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  对应的区域,则  $\mathbf{D}(\Gamma_1) = \mathbf{D}(\Gamma_2)$ .其中  $s \in \mathcal{R}$  是尺度因子,  $\mathbf{R} \in \mathbf{SO}(2)$  是正交旋转矩阵,  $\mathbf{t} \in \mathcal{R}^2$  是平移向量.

证明:在区域  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  中令  $\mathbf{x} = (x_1, y_1)$ ,  $\mathbf{y} = (x_2, y_2)$ ,则膜振动函数的空间部分  $\varphi_1(\mathbf{x})$  和  $\varphi_2(\mathbf{y})$  的拉普拉斯算子分别为

$$\Delta\varphi_1 = \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y_1^2}, \Delta\varphi_2 = \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y_2^2}$$

在区域  $\Omega_1$  中,对应的边界问题为

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1(\mathbf{x}) = \lambda\varphi_1(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega_1 \\ \varphi_1(\mathbf{x}) = 0 & \mathbf{x} \in \Gamma_1 \end{cases}$$

因为  $\Delta\varphi_2 = s^2(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y_1^2})$ ,所以  $\Delta\varphi_2 = s^2\Delta\varphi_1$ ,所以

$-\Delta\varphi_2(\mathbf{y}) = (s^2\lambda)\varphi_1(\mathbf{y}) = (s^2\lambda)\varphi_2(sR\mathbf{x} + \mathbf{t}) = (s^2\lambda)\varphi_2(\mathbf{y})$ .则在区域  $\Omega_2$  中,对应的边界问题为

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_2(\mathbf{y}) = (s^2\lambda)\varphi_2(\mathbf{y}) & \mathbf{y} \in \Omega_2 \\ \varphi_2(\mathbf{y}) = 0 & \mathbf{y} \in \Gamma_2 \end{cases}$$

由此可知,曲线  $\Gamma_2$  和  $\Gamma_1$  的本征值  $\lambda^*$  和  $\lambda$  满足  $\lambda^* = s^2\lambda$ .由于曲线  $\Gamma_2$  和  $\Gamma_1$  的描述子的分量为

$$d_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}}, d_i^* = \frac{\lambda_i^*}{\lambda_{i+1}^*} = \frac{s^2\lambda_i}{s^2\lambda_{i+1}} = d_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

所以对于  $\forall d_i \in \mathbf{D}(\Gamma_1)$ ,  $d_i^* \in \mathbf{D}(\Gamma_2)$  都有  $d_i^* = d_i$ ,从而  $\mathbf{D}(\Gamma_1) = \mathbf{D}(\Gamma_2)$ ,也即 Helmholtz 描述子具有旋转、尺度和平移不变性.

### 3.4 实现 Helmholtz 描述子的仿射不变性

由定理 2 可知,曲线  $\Gamma$  的 HD 描述子具有 RST 不变性.然而,在大多数情况下由同一相机在不同视点获取的图像不仅仅是简单的 RST 变换,而是存在着图像畸

变,如仿射变换等.这时构造仿射不变曲线描述子,对于曲线的匹配尤为重要.为了叙述方便,特给定下面一些符号的含义.

$$(1) C(\Gamma): C(\Gamma) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i, \text{曲线 } \Gamma \text{ 的形心};$$

$$(2) \Sigma(\Gamma): \Sigma(\Gamma) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [\mathbf{x}_i - C(\Gamma)][\mathbf{x}_i - C(\Gamma)]^T, \text{曲线 } \Gamma \text{ 的协方差矩阵};$$

(3) 丘拉斯基分解:  $\Sigma(\Gamma) = \mathbf{F}(\Gamma)\mathbf{F}^T(\Gamma)$ ,其中  $\mathbf{F}$  为下三角矩阵.

#### 3.4.1 曲线标准化

**定义 3** 给定一条若尔当曲线  $\Gamma$ ,  $\Omega$  是曲线  $\Gamma$  围成的有限封闭区域,则由  $\Gamma$  确定的新曲线

$$\Gamma' = \{\mathbf{x}' \in \mathcal{R}^2: \mathbf{x}' = \mathbf{F}^{-1}(\Gamma)[\mathbf{x} - C(\Gamma)], \mathbf{x} \in \Gamma\} \quad (6)$$

称为曲线  $\Gamma$  的标准化曲线.

**定理 3** 给定两条若尔当曲线  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$ ,它们满足仿射变换对应关系:

$$\Gamma_2 = \{y \in \mathcal{R}^2: \exists x \in \Gamma_1, \text{使得 } y = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{t}\},$$

那么,曲线  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  的标准化曲线的形状是几何全等的,即  $\Gamma'_2 = \mathcal{R} \cdot \Gamma'_1$ .式中  $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{2 \times 2}$  是非奇异矩阵,  $\mathbf{t} \in \mathcal{R}^2$  是平移向量,  $\mathbf{R} \in \mathcal{R}^{2 \times 2}$  是旋转矩阵.

证明:令若尔当曲线  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  形成的有限封闭区域分别为  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$ ,即  $\Gamma_1 = \partial\Omega_1$ ,  $\Gamma_2 = \partial\Omega_2$ .则由定义 3 可知,曲线  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  的标准化曲线为

$$\begin{cases} \Gamma'_1 = \{\mathbf{x}' \in \mathcal{R}^2: \mathbf{x}' = \mathbf{F}^{-1}(\Gamma_1)[\mathbf{x} - C(\Gamma_1)], \mathbf{x} \in \Gamma_1\} \\ \Gamma'_2 = \{\mathbf{y}' \in \mathcal{R}^2: \mathbf{y}' = \mathbf{F}^{-1}(\Gamma_2)[\mathbf{y} - C(\Gamma_2)], \mathbf{y} \in \Gamma_2\} \end{cases}$$

对于曲线  $\Gamma'_1$  和  $\Gamma'_2$ ,易知:

$$\mathbf{x} - C(\Gamma_1) = \mathbf{F}(\Gamma_1)\mathbf{x}', \mathbf{y}' = \mathbf{F}^{-1}(\Gamma_2)[\mathbf{y} - C(\Gamma_2)].$$

因为  $\mathbf{y} - C(\Gamma_2) = \mathbf{A}(\mathbf{x} - C(\Gamma_1))$ ,所以

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}^{-1}(\Gamma_2)\mathbf{A}\mathbf{F}(\Gamma_1)\mathbf{x}', \text{即}$$

$$\mathbf{F}(\Gamma_2)\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{F}(\Gamma_1)\mathbf{x}', \quad (7)$$

构造二次型:

$\mathbf{F}(\Gamma_2)\mathbf{y}'[\mathbf{F}(\Gamma_2)\mathbf{y}']^T = \mathbf{A}\mathbf{F}(\Gamma_1)\mathbf{x}'[\mathbf{A}\mathbf{F}(\Gamma_1)\mathbf{x}']^T$ ,显然  $\mathbf{y}'\mathbf{y}'^T = \mathbf{x}'\mathbf{x}'^T = \mathbf{I}$ ,所以二次型可以化为  $\mathbf{F}(\Gamma_2)\mathbf{F}^T(\Gamma_2) = \mathbf{A}\mathbf{F}(\Gamma_1)(\mathbf{A}\mathbf{F}(\Gamma_1))^T$ .由高等代数的知识可知,对于任意的方阵  $\mathbf{P}$  和  $\mathbf{Q}$ ,若  $\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$ ,则有结论  $\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$  成立,其中  $\mathbf{R}$  是一个正交旋转矩阵.于是我们有  $\mathbf{F}(\Gamma_2) = \mathbf{A}\mathbf{F}(\Gamma_1)\mathbf{R}$ ,所以

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}(\Gamma_2)\mathbf{R}\mathbf{F}^{-1}(\Gamma_1), \quad (8)$$

将式(8)代入到式(7)得  $\mathbf{y}' = \mathbf{R}\mathbf{x}'$ .所以,对于  $\forall \mathbf{x}' \in \Gamma'_1$  存在  $\mathbf{y}' \in \Gamma'_2$  使得  $\mathbf{y}' = \mathbf{R}\mathbf{x}'$  成立,所以  $\Gamma'_2 = \mathbf{R} \cdot \Gamma'_1$ ,即  $\Gamma'_1$  与  $\Gamma'_2$  是几何全等的.

#### 3.4.2 仿射不变描述子

由 3.3.2 节可知,曲线描述子 HD 具有 RST 不变

性.对于存在仿射变换关系的两条若尔当曲线  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  来说,它们的标准化曲线  $\Gamma'_1$  和  $\Gamma'_2$  只存在旋转变换关系.我们计算  $\Gamma'_1$  和  $\Gamma'_2$  的 HD 描述子即可得到曲线  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  的仿射不变描述子—CHD,从而达到曲线  $\Gamma_1$  和

$\Gamma_2$  匹配的目的.如图 4 所示,图 4(a)和 4(b)表示两条仿射对应的曲线  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$ ,图 4(c)表示  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  的标准化曲线,它们是几何全等的.

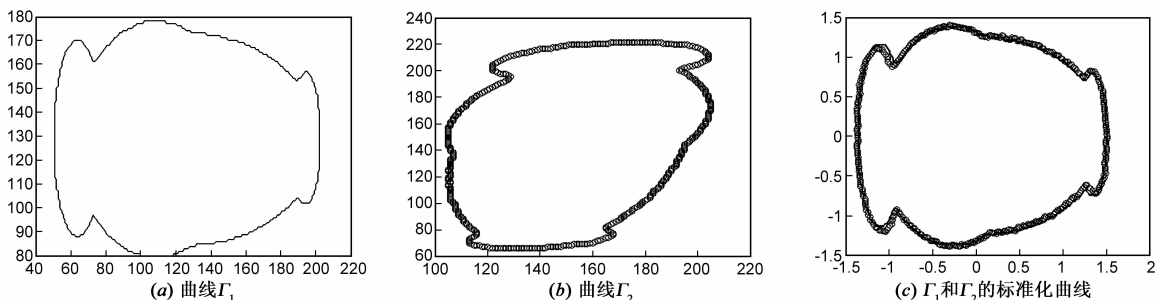


图4 仿射对应的曲线标准化

### 3.5 度量方法

本文采用加权欧氏距离对曲线描述子进行差异性度量,度量公式如下:

$$d(\mathbf{D}(\Gamma_1), \mathbf{D}(\Gamma_2)) = \|\mathbf{D}(\Gamma_1) - \mathbf{D}(\Gamma_2)\| \cdot \mathbf{W}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^k w_k \cdot [\mathbf{D}_i(\Gamma_1) - \mathbf{D}_i(\Gamma_2)]^2} \quad (9)$$

公式中的权值定义为  $w_i = \exp(\frac{i-1}{k} \log \rho)$ . 参数  $\rho$  表示描述子的第  $i$  个分量与第  $i-1$  个分量的权重比例.在实验中,我们选择  $\rho = 0.75$ .

## 4 开曲线匹配算法

### 4.1 窄带模型假设

由前面的讨论可知,若尔当曲线形成的区域可以看成是一个薄膜.然而对于一条开曲线来说,这种假设不成立.我们考虑能否找到某一封闭区域来表示开曲线,通过提取区域的特征近似地描述开曲线的特征.基于这种考虑,本文采用二维的窄带来表示开曲线,窄带形成的区域就是一个封闭的区域.用窄带描述开曲线时需要满足以下四个约束条件:

- (1)窄带的形状必须能充分刻画开曲线的几何形状,具有描述开曲线形状特征的独立性;
- (2)窄带的轮廓曲线符合若尔当曲线定理;
- (3)成仿射对应的两条开曲线,其对应的窄带也应满足相同的仿射对应关系;
- (4)窄带的宽度应保持在一定的范围区间内.

鉴于此,本文采用距离变换的方法建立窄带模型.获取开曲线的窄带区域后,利用若尔当曲线的匹配算法,提取窄带的仿射不变特征—CHD,实现开曲线匹配.

### 4.2 距离变换

自从 Rosenfeld 和 Pfaltz<sup>[18]</sup>于 1966 年首次提出距离

变换以来,该方法就被广泛地应用于图像处理和模式识别领域.距离变换可看作以区域  $S$  作为扩散源在区域的补集  $S^c$  中以相同速度向各个方向传播的距离波,距离波同一时刻到达的像素构成等值线,所有等值线构成距离变换图.如图 5 所示为一幅二值图像及其欧氏距离变换图,图 5(a)表示一幅二值图像,图 5(b)表示由各条不同的等值线构成的距离变换图.

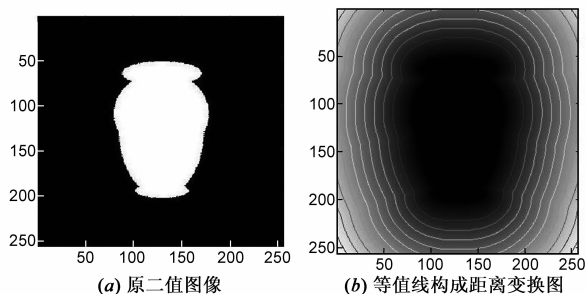


图5 二值图像及其欧氏距离变换图

### 4.3 建立窄带模型

本文对开曲线进行欧氏距离变换,形成一系列的等值线,这些等值线构成一系列封闭区域,且它们的形状依赖于开曲线的形状.这为开曲线的匹配做好了准备.如图 6 所示,(a)和(b)是两条仿射对应的开曲线,(c)和(d)是由等值线构成的距离变换图.显然,开曲线的距离变换图符合窄带模型的前两个条件.

假设  $l_1, l_2$  分别为两条开曲线  $\widehat{p_1 p_2}, \widehat{p'_1 p'_2}$  的弦长,  $h_1, h_2$  为开曲线  $\widehat{p_1 p_2}, \widehat{p'_1 p'_2}$  的最大弦高.当图像发生尺度变换时,图像的面积会发生变化.由于仿射变换后两个封闭区域的面积之比是仿射不变量,即  $S_{p'_1 p'_2} / S_{p_1 p_2} = l_2 h_2 / l_1 h_1 = \det(\mathbf{A})$ ,其中  $\det(\mathbf{A})$  表示仿射矩阵  $\mathbf{A}$  的行列式的绝对值,  $S_{p'_1 p'_2}, S_{p_1 p_2}$  分别为开曲线  $\widehat{p'_1 p'_2}, \widehat{p_1 p_2}$  对应的最大包络矩形的面积.若开曲线是一条直线段,则

可将直线的长度看成是直线的面积,即  $S = l$ . 根据用窄带描述开曲线时需满足 4.1 节约束条件(3)可知,两条成仿射对应的开曲线,其对应窄带的欧氏距离变换参数比例应为  $l_2 h_2 / l_1 h_1 = \det(\mathbf{A})$ . 对于一条开曲线,若其弦长为  $l$ ,最大弦高为  $h$ ,则其距离变换参数  $d = khl$ ,其中  $k$  为比例因子,其目的是使距离变换后的窄带宽度在合适的范围区间内,即满足用窄带描述开曲线需满足 4.1 节的约束条件(4).

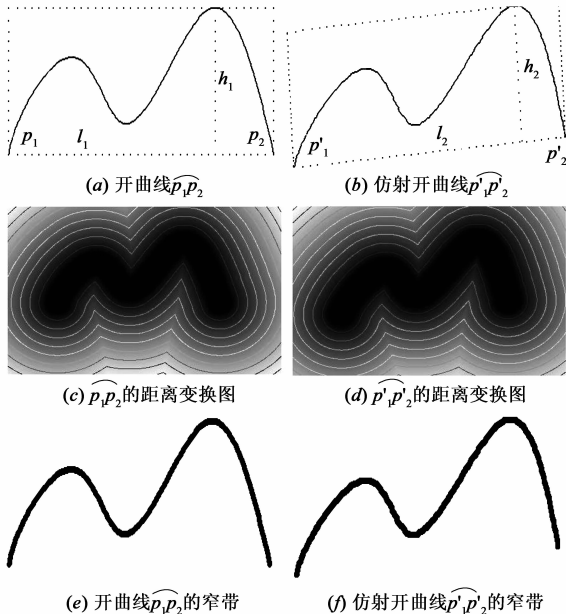


图6 仿射对应的曲线,距离变换图和窄带模型

据此可以得到建立窄带模型的算法步骤:

**步骤 1** 输入图像  $I$ , 计算开曲线的弦长  $l$ , 最大弦高  $h$ , 距离变换参数  $d = khl$ ;

**步骤 2** 对开曲线进行欧氏距离变换, 形成距离变换图像  $J$ ;

**步骤 3** 若距离图像  $J$  中像素点的灰度值  $J(i, j) \leq d$  则令  $J(i, j) = 0$ , 否则令  $J(i, j) = 1$ , 结束.

这样就得到一幅二值图像, 其中灰度值为 0 的像素点形成窄带模型.

以开曲线  $\widehat{p_1 p_2}$  和  $\widehat{p'_1 p'_2}$  为例, 分别以距离变换参数

$$\begin{cases} d_1 = kh_1 l_1 \\ d_2 = kh_2 l_2 \end{cases} \quad (0 < k < 1), \quad (10)$$

为阈值将距离图像转换为二值图像, 形成图 6(e) 和 6(f) 所示的窄带模型.

在建立窄带模型时, 我们先给定模型图像中开曲线的距离变换参数  $d_1$ , 由于每段模型开曲线的弦长  $l$  和最大弦高  $h$  是已知的, 所以由公式(10)可以计算出  $k$  的值, 进而得到目标开曲线的距离变换参数  $d_2$ . 简而言之, 就是参数  $d_2$  的取值由参数  $d_1$  来决定,  $k$  只是  $d_1$  与

$d_2$  之间的传递参数. 在实验中, 我们根据不同的开曲线选择参数  $d_1, d_2$  的取值, 其匹配程度只与参数  $d_1, d_2$  的取值有关. 大量实验表明, 当参数  $d_1, d_2 \in [5, 15]$  时, 由等值线形成的窄带区域可以近似满足仿射变换关系, 两条开曲线的匹配度最佳. 为了验证窄带模型的有效性, 我们做了多组实验. 下面给出一组实验说明用窄带模型表示开曲线的有效性.

图 7(a) 和 7(b) 表示两条仿射对应的开曲线, 曲线  $p$  的弦长  $l_1 = 159$ , 最大弦高  $h_1 = 90.8$ , 开曲线  $q$  的弦长  $l_2 = 137.8$ , 最大弦高  $h_2 = 81.8$ . 我们按照公式(10)计算的数值对开曲线  $p$  和  $q$  建立窄带模型, 每次都提取曲线的 47 个特征值. 图 7(c) - 7(f) 表示在不同的  $d_1, d_2$  取值下, 两条开曲线 47 个特征值绘成的曲线图. 当  $d_1, d_2 \in [5, 15]$  时, 两条曲线特征值差的绝对值始终保持在零附近, 而当  $d_1$  和  $d_2$  的取值超过 15 时, 两条曲线特征值差的绝对值偏差稍大. 这是由于当窄带的宽度超过最佳宽度范围时, 窄带模型丢失了开曲线的细节信息.

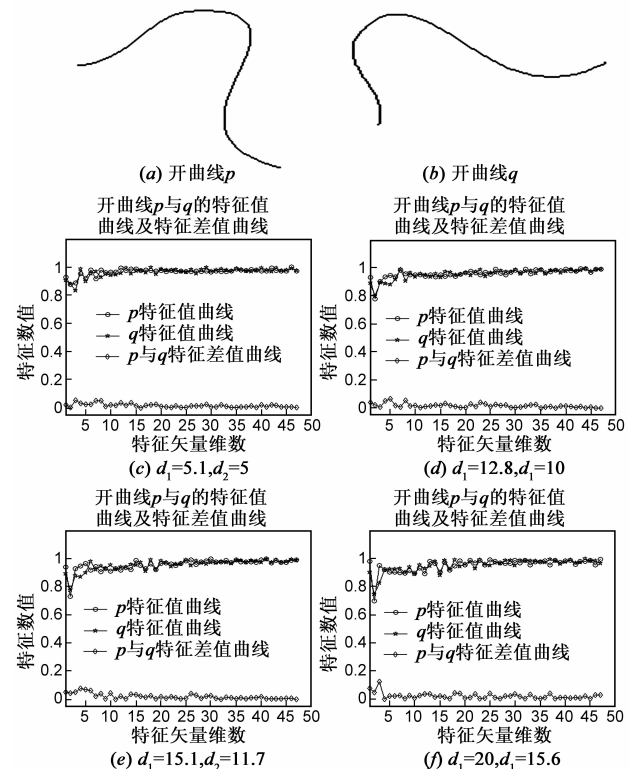


图7  $d_1, d_2$  在不同取值下, 两条开曲线特征值曲线图

## 5 实验结果与讨论

本文实验共分为三部分. 首先用标准图像库的图像生成测试集对本文的描述子进行性能评价; 然后用自然场景中的真实图像进行图像匹配实验; 最后将提出的窄带模型应用于部分遮挡目标的匹配.

### 5.1 描述子的性能评价

如图 8(a) 所示,在实验中本文选取 MPEG7\_CE-Shape-1\_Part\_B 标准图像库中的 50 种不同类型的图像作为模型图像.我们对每类模型图像进行随机的仿射变换形成 9 幅仿射图像,加上原图像每种类型共有 10 幅图像.50 种类型共 500 幅图像作为我们的测试集.在图 8(b)中,本文仅给出 5 种图像的仿射变形图像,它们分别是 bat(蝙蝠)、camel(骆驼)、bell(钟)、jar(罐子)和 children(儿童).



图8 MPEG7\_CE-Shape-1\_Part\_B图像库及 5种图像的仿射变形图像

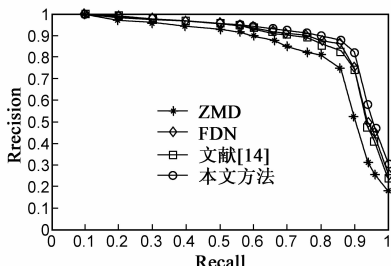


图9 四种描述子的查准率和查全率

本文采用文献[14]中计算查全率与查准率的方法评估曲线描述子的性能.我们将本文提出的 CHD 描述子与 Zernike 矩形状描述子<sup>[19]</sup>(Zernike Moment Descriptor, ZMD)、仿射傅里叶描述子<sup>[7]</sup>(Fourier Descriptor based on moment Normalization, FDN)和文献[14]中的描述子进行比较.图 9 给出了四种方法在测试集中的查全率和查准率曲线.从图 9 中可以看出,本文方法在各个查全率下的查准率,比其他三种方法都要高.实验结果表明本文方法比其他三种方法具有更强的形状描述能力.

### 5.2 真实图像实验

本组实验选取香港地区卫星图像进行实验.如图 10 所示为从不同视点获取的香港地区的卫星图像,我们对两幅图像标记了 10 对不同的区域.

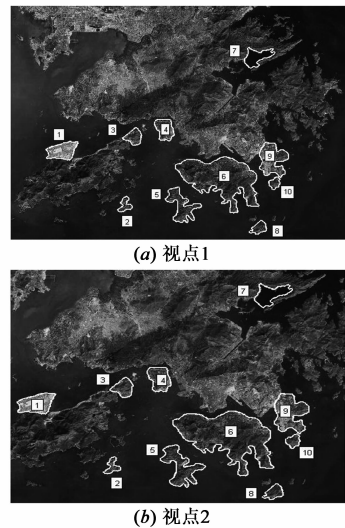


图10 香港地区卫星图像实验

表 1 给出了本文算法与其它三种算法对卫星图像的匹配结果,从该表中可以看出本文算法和 FDN 算法使得标记的 10 对区域全部匹配,并且没有出现误匹配.表 2 给出了四种算法对室内场景图像的匹配结果,FDN 算法在描述轮廓曲线时,仅利用了边界点和相邻两点与形心点的角度信息,并没有考虑区域的内部点集信息.文献[14]用差分方法提取曲线的描述子时会产生累积误差,从而影响形状匹配效果.Zernike 矩不具备完全的仿射不变性,因而对形变严重的图像,匹配效果较差.而本文算法在提取形状特征时,既利用了轮廓曲线的边界条件,又利用了区域内部点的信息.从整体来说,本文算法具有较强的形状匹配能力.

表 1 四种算法对卫星图实验的匹配结果

实验 & 算法	匹配	正确匹配	误匹配	未匹配	匹配率/%
	卫星图像实验	Zernike 矩	8	0	2
	文献[14]	9	1	0	90
	FDN 算法	10	0	0	100
	本文算法	10	0	0	100

### 5.3 局部遮挡图实验

为了验证窄带模型的有效性,我们选取局部遮挡图像进行实验.当目标图像存在局部遮挡时,其标准化后的形状与原图像标准化后的形状不存在几何全等关系.这时我们需要对轮廓曲线进行分段处理,利用提出的窄带模型实现开曲线的匹配.如图 11 所示,图 11(a)是模型图像,图 11(b)是模型图像提取角点后的轮廓曲线,图 11(c)是模型轮廓分段图,图 11(d)是模型图像在局部遮挡时,经过仿射变换得到的目标图像,图 11(e)是目标图像提取角点后的轮廓曲线,图 11(f)是目标轮廓曲线的分段图.我们对分段后形成的每一条开曲线按照第 4 节的方法形成封闭的窄带,然后提取每条窄带

的仿射不变特征量。

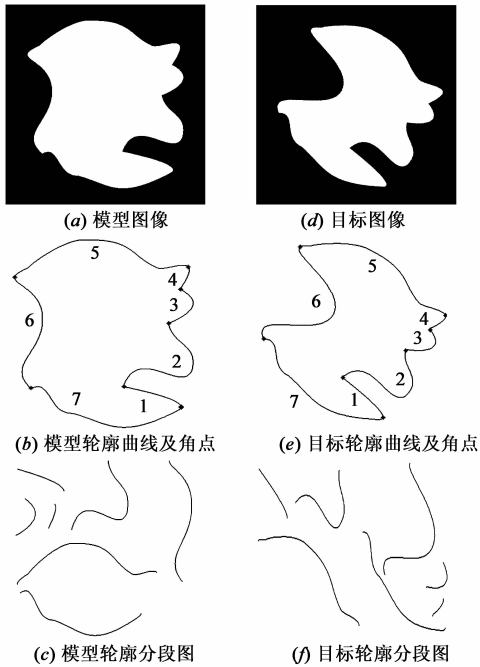


图11 遮挡图实验

表2 本文算法对模型图像与目标图像的差异度

	目 标 图 像							
	Dif	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7
模 型 图 像	S1	0.059	0.404	0.358	0.244	0.315	0.485	0.252
	S2	0.484	0.163	0.277	0.532	0.297	0.278	0.367
	S3	0.347	0.220	0.110	0.356	0.225	0.222	0.248
	S4	0.266	0.474	0.398	0.099	0.349	0.519	0.292
	S5	0.353	0.200	0.232	0.352	0.123	0.244	0.206
	S6	0.399	0.231	0.228	0.406	0.287	0.250	0.239
	S7	0.222	0.302	0.269	0.257	0.225	0.355	0.141

表3 四种算法对遮挡图实验的匹配结果

实验 & 算法	匹配	正确匹配	误匹配	未匹配	匹配率/%
	遮 挡 实 验	Zernike 矩	4	2	0
文献[14]		5	1	0	83.33
FDN 算法		5	0	1	83.33
本文算法		6	0	0	100

表2给出了本文算法对各条窄带计算的差异度数值.在理想情况下,总共有6对曲线段是匹配的,从表2中可知,除了第6段遮挡的曲线段没有匹配外,其余的曲线段全部匹配.我们对形成的每条窄带分别提取其它三种描述子,并与本文描述子进行实验对比,实验结果见表3.从该表中的数据可知,本文算法实现了6段开曲线的匹配,与其它算法相比,匹配效果最好.

## 6 结论

本文提出了一种新的基于薄膜振动模型的曲线描

述子—CHD.该描述子由膜振动方程的本征值来确定,既能描述轮廓曲线的形状特征,又能反映区域的内部信息.薄膜密度与图像灰度信息之间的对应关系,薄膜的振动模式与曲线特征向量之间的映射关系,使得该描述子具有深刻的物理意义.

我们将两条仿射对应的若尔当曲线进行标准化,使曲线的仿射变换问题降低为旋转变换问题,有利于若尔当曲线的匹配.引用欧氏距离变换思想对开曲线建立窄带模型,通过提取窄带轮廓曲线的不变特征来描述开曲线,使得局部遮挡目标的匹配问题得到了有效解决.用测试集中的图像做了多次实验,同时与Zernike矩描述子,仿射傅里叶描述子和文献[14]中的算法进行实验对比,结果表明本文的方法要优于这三种方法.真实图像实验也表明本文的算法取得了较好的匹配效果.

本文算法主要在以下两方面存在不足.首先,对于形状复杂的开曲线,本文算法匹配效果不够理想.其主要原因是:用欧氏距离变换形成的窄带与原开曲线相比会变得比较平滑,窄带模型会丢失复杂开曲线的细节信息.其次,本文算法尚不能应用于具有拓扑空洞的形状匹配.其原因在于,本文算法要求提取的轮廓曲线必须符合若尔当曲线定理,即要求形状区域是单连通区域.而拓扑空洞的形状区域至少具有内外两条轮廓曲线,它们不符合若尔当曲线定理.现阶段一种研究思路是对拓扑空洞进行填充,先处理形状的外轮廓,然后再匹配内轮廓,这正是我们下一步研究的方向.

## 参考文献

- [1] Belongie S, Malik J, Puzicha J. Shape matching and object recognition using shape contexts [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002, 24(4): 509 – 522.
- [2] 吕玉增,彭启民,黎湘.基于极值特征的不变性形状识别[J].电子学报,2008,36(4):679 – 684.  
Lu Yu-Zeng, Peng Qi-Min, Li Xiang. Shape recognition based on the invariant of extremum features [J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(4): 679 – 684. (in Chinese)
- [3] Zhang D S, Lu G. Review of shape representation and description techniques [J]. Pattern Recognition, 2004, 37(1): 1 – 19.
- [4] Abbasi S, Mokhtarian F, Kittler J. Curvature scale space image in shape similarity retrieval [J]. Multimedia Systems, 1999, 7(6): 467 – 476.
- [5] Persoon E, Fu K. Shape discrimination using fourier descriptors [J]. IEEE Transon SMC, 1977, 7(3): 170 – 179.
- [6] Zhang D, Lu G. A comparative study of curvature scale space and fourier descriptors for shape-based image retrieval [J]. Journal of Visual Communication and Image Representation,

2002, 14(1): 39 – 57.

- [7] Ekombo P L E, Ennahahi N, Oumsis M, Meknassi M. Application of affine invariant fourier descriptor to shape-based image retrieval[J]. International Journal of Computer Science and Network Security, 2009, 9(7): 240 – 247.
- [8] 王斌. 一种不变的基于傅里叶变换的区域形状描述子[J]. 电子学报, 2012, 40(1): 84 – 88.
- Wang Bin. An invariant region-shape descriptor based on fourier transform[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(1): 84 – 88. (in Chinese)
- [9] Flusser J, Suk T. Pattern recognition by affine moment invariants[J]. Pattern Recognition, 1993, 26(1): 167 – 174.
- [10] Teague M R. Image analysis via the general theory of moments[J]. Journal of the Optical Society of America, 1979, 70(8): 920 – 930.
- [11] Chen Z, Sun S K. A zernike moment phase-based descriptor for local image representation and matching[J]. IEEE Trans on Image Processing, 2010, 19(1): 205 – 219.
- [12] Gorelick L, Galun M, Sharon E, Basri R, Brandt A. Shape representation and recognition using the poisson equation[J]. IEEE Trans Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2006, 28(12): 1991 – 2005.
- [13] Kac M. Can one hear the shape of a drum? [J]. American Mathematical Monthly, 1966, 73(2): 1 – 23.
- [14] Zuliani M, Bertelli L, Kenney C S, Chandrasekaran S, Manjunath B S. Drums, curve descriptors and affine invariant region matching[J]. Image and Vision Computing, 2008, 26(3): 347 – 360.
- [15] 钟玉泉. 复变函数论 [M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2006. 22 – 27.
- [16] 谷超豪, 李大潜, 陈恕行, 郑宋穆, 谭永基. 数学物理方程 [M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2007, 23 – 26.
- [17] 胡建伟, 汤怀民. 微分方程数值方法 [M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2007, 217 – 296.

- [18] Rosenfeld A, Pfaltz J L. Sequential operations in digital picture processing[J]. Journal of Association for Computing Machinery, 1966, 13(4): 471 – 494.
- [19] Kim W Y, Kim Y S. A region-based shape descriptor using Zernike moments[J]. Signal Processing: Image Communication, 2000, 16(1 – 2): 95 – 102.

#### 作者简介



张桂梅 女, 1970 年生于江西临川, 2006 年获西北工业大学博士学位, 现为南昌航空大学航空制造工程学院教授. 主要研究方向为图像处理, 计算机视觉与模式识别等.

E-mail: guimei.zh@163.com



马珂 男, 1985 年生于河南许昌, 2009 年获河南科技大学学士学位, 现为南昌航空大学信息工程学院, 硕士研究生. 研究方向为图像处理与模式识别.

E-mail: make209@163.com



储 ■ 女, 1967 年生于江苏宜兴, 2005 年获西北工业大学博士学位, 现为南昌航空大学软件学院教授, 博士生导师. 主要研究方向为图像处理与计算机视觉.

E-mail: chujun99602@163.com