

基于后验概率熵的正则化 Otsu 阈值法

吴成茂

(西安邮电大学电子工程学院, 陕西西安 710121)

摘 要: Otsu 阈值法是一种广泛应用的图像分割方法,但它并不适合目标和背景类内方差相差较大的图像分割需要,于是本文提出了一种基于分割所得目标和背景后验概率信息熵约束的正则化 Otsu 分割改进方法.从图像分割本质是像素聚类问题的观点出发,首先将传统 Otsu 阈值法解释为一种加权硬 C-均值聚类;其次考虑到聚类问题具有典型的不适定性,利用图像分割所得目标和背景的后验概率所对应信息熵作为约束项,实现 Otsu 阈值化准则函数的正则化修改并得到了正则化 Otsu 阈值分割法;最后对该分割方法的合理性进行解释并给出其正则参数选取方法.实验结果表明,本文所建议的正则化 Otsu 阈值法是有效的,并将传统 Otsu 阈值法视为特例.

关键词: 图像分割; 阈值法; Otsu 法; 信息熵; 正则化方法

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2013) 12-2474-05

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.12.024

Regularization Otsu's Thresholding Method Based on Posterior Probability Entropy

WU Cheng-mao

(School of Electronic Engineering, Xi'an University of Posts and Telecommunications, Xi'an, Shaanxi 710121, China)

Abstract: Otsu's thresholding method is widely applied in image segmentation, but it is not suitable to segment the images that have large difference in intra-class variance of object and background, this paper presents a regularization Otsu's segmentation method based on the information entropy of posterior probability of object and background obtained by thresholding image. From the point of view that image segmentation is essentially pixel clustering problem, the classical Otsu's thresholding method is firstly interpreted as a kind of weighting hard C-means clustering algorithm. Secondly, considering that the clustering segmentation has typical ill-posedness, the object and background from raw image are obtained by segmentation and their posterior probability information entropy is taken as the constraint item, the regularized modification of Otsu's thresholding criteria function is realized, and regularization Otsu's thresholding method is obtained. In the end, the reasonability of the proposed thresholding method is explained by mathematical analysis, and the selection method of its regularization parameter is put forward. Experimental results show that the proposed regularization Otsu's thresholding method is effective, and the traditional Otsu's thresholding method can be viewed as a special case of the proposed method.

Key words: image segmentation; thresholding method; Otsu's method; information entropy; regularization method

1 引言

图像分割是图像分析及视觉系统的重要组成部分,也是成功进行图像分析、理解与描述的关键步骤,历来受到国内外有关学者的高度重视.从上世纪六十年代以来,国际上学者们提出了众多的图像分割方法^[1],其中 Otsu 分割法^[2]因简单、快速且性能稳定已成为至今仍广泛应用的分割方法之一. Kurita 等人^[3]指出了 Otsu 分割法适合图像直方图服从正态分布且二个子分布的方差相等,以及图像中目标和背景各自所占比例基本相当的情况.然而,图像来源千差万别,以及图像在传输中易受

到噪声干扰,导致其直方图分布具有多样性,采用经典的 Otsu 分割法获得的分割效果可能令人很难满意,甚至出现严重的错分现象,不利于后续图像理解和识别的需要.为了改善 Otsu 阈值法的分割性能,文献[4]提出了目标和背景类内方差加权的改进型 Otsu 分割法,文献[5]提出了 Otsu 方法和信息熵相结合的分割方法,文献[6]提出了灰度级概率加权 Otsu 法.从非监督聚类观点出发,文献[6]对经典 Otsu 阈值法进行加权硬 C-均值聚类解释.考虑到硬聚类本身是典型的不适定问题,本文采用正则化理论与方法为指导,利用图像分割所得目标和背景的后验概率信息熵作为约束项目,实现传统

Otsu 阈值法所对应的阈值准则函数正则化修改, 所获得新的准则函数能改善现有 Otsu 阈值法的分割性能, 并将传统 Otsu 阈值法视为本文方法的特例。

2 Otsu 阈值法

二维图像每一像素的信息可用灰度值表示. 所有灰度值的统计信息可以用一维直方图 $h(i)$ ($i=0, 1, \dots, L-1$) 来表示. 若将 $h(i)$ 看成是对目标和背景构造的混合概率密度函数 $p(i)$ ($i=0, 1, \dots, L-1$) 的一个估计, 则 $p(i) = \sum_{j=0}^1 P_j \cdot p(i|j)$ ($i=0, 1, \dots, L-1$). 对于图像分割阈值 t ($0 < t < L-1$), 记目标和背景的后验概率分别为 $P_0(t) = \sum_{i=0}^t h(i)$, $P_1(t) = \sum_{i=t+1}^{L-1} h(i)$. 目标和背景的平均灰度值记为 $m_0(t) = \frac{1}{P_0(t)} \sum_{i=0}^t h(i)i$, $m_1(t) = \frac{1}{P_1(t)} \sum_{i=t+1}^{L-1} h(i)i$. 则经典的 Otsu 阈值化分割准则可描述为

$$t^* = \arg \min_{0 < t < L-1} \left\{ \sum_{i=0}^t h(i)(i - m_0(t))^2 + \sum_{i=t+1}^{L-1} h(i)(i - m_1(t))^2 \right\} \quad (1)$$

针对 Otsu 阈值化分割准则式(1), 可将其改写为

$$t^* = \arg \min_{0 < t < L-1} \left\{ \sum_{i=0}^t \sum_{j=0}^1 h(i)u_j(i)(i - m_j(t))^2 \right\} \quad (2)$$

$$\text{其中 } u_0(i) = \begin{cases} 1, & i \leq t \\ 0, & t < i \end{cases}; u_1(i) = \begin{cases} 0, & i \leq t \\ 1, & t < i \end{cases} \quad (3)$$

从 Otsu 阈值法所对应的等价准则式(2)来看, 该阈值法是一种加权硬 C-均值聚类方法^[6]. 传统硬 C-均值聚类本身主要适合数据空间分布呈球状且各类样本数目相差不大的情况, 若类样本方差相差较大或样本数相差较悬殊时, 采用硬 C-均值聚类无法获得满意的聚类效果, 从而导致 Otsu 阈值法对于目标和背景方差相差较大的图像进行分割, 其最佳分割阈值会偏向方差较大的一边^[7]. 为了解决传统 Otsu 阈值法存在的上述问题, 文献[4]早已提出了加权 Otsu 阈值法, 但这种方法仅适合图像中目标和背景所对应的概率分布近似为高斯分布时, 才能获得相对较好的分割效果. 然而, 大多数图像中目标和背景很难满足高斯分布, 导致采用加权 Otsu 阈值法所获得分割结果难以令人满意. 针对传统硬 C-均值聚类对初始值较为敏感, 为了解决硬 C-均值聚类这一不适定问题, 文献[8]提出了信息熵作为正则约束项的极大熵聚类算法, 它是传统硬 C-均值聚类算法的一种软格式推广, 它具有良好的收敛性和鲁棒性, 其正则因子 T 的选取有坚实的理论基础. 模糊 C-均值聚类算法是硬 C-均值聚类算法的推广, 其解同样

存在不适定性, 也有大量学者探讨了模糊 C-均值聚类正则化处理方法^[9]. 在已有正则化 C-均值聚类算法构造思想的启发下, 本文将探讨图像阈值化分割所得目标和背景的后验概率信息熵作为正则约束项的正则化 Otsu 阈值法, 以便提高 Otsu 阈值法的普适性.

3 正则化 Otsu 阈值法

针对灰度图像 G , 其灰度直方图所对应的灰度级概率为 $h(i)$ ($i=0, 1, \dots, L-1$) 且 $\sum_{i=0}^{L-1} h(i) = 1$, 图像平均灰度值 $m = \sum_{i=0}^{L-1} i \cdot h(i)$. 给定图像分割阈值 t ($0 < t < L-1$), 将图像分割成目标和背景两部分, 目标和背景的后验概率分别为 $P_0(t)$ 和 $P_1(t)$, 以及目标和背景的平均灰度值分别为 $m_0(t)$ 和 $m_1(t)$, 于是可获得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{L-1} h(i)(i - m) \\ &= \sum_{i=0}^t h(i)(i - m_0(t))^2 + \sum_{i=t+1}^{L-1} h(i)(i - m_1(t))^2 \\ & \quad + \sum_{i=0}^t h(i)(m_0(t) - m)^2 + \sum_{i=t+1}^{L-1} h(i)(m_1(t) - m)^2 \\ &= \sum_{i=0}^t h(i)(i - m_0(t))^2 + \sum_{i=t+1}^{L-1} h(i)(i - m_1(t))^2 \\ & \quad + P_0(t)P_1(t)(m_0(t) - m_1(t))^2 \end{aligned} \quad (4)$$

利用上述等式, 构造归一化 Otsu 阈值分割准则函数为

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{\sum_{i=0}^t h(i)(i - m_0(t))^2 + \sum_{i=t+1}^{L-1} h(i)(i - m_1(t))^2}{\sum_{i=0}^{L-1} h(i)(i - m)^2} \\ &= 1 - \frac{P_0(t)P_1(t)(m_0(t) - m_1(t))^2}{\sum_{i=0}^{L-1} h(i)(i - m)^2} \end{aligned}$$

该表达式 $F(t)$ 具有 $0 < F(t) < 1$ 的性质.

给定图像分割阈值 t ($0 < t < L-1$), 所得目标和背景后验概率为 $P_0(t)$ 和 $P_1(t)$, 则后验概率所对应的 Tsallis 熵为

$$H_\alpha(P(t)) = \frac{1}{1 - \alpha} \left(\sum_{i=0}^1 (P_i(t))^\alpha - 1 \right)$$

若参数 $\alpha = 2$, 则获得二次型信息熵为

$$H_2(P(t)) = 1 - \sum_{i=0}^1 (P_i(t))^2.$$

进一步考虑到 $P_0(t) + P_1(t) = 1$, 于是可得 $H_2(P(t)) = 2P_0(t)P_1(t)$, 该表达式具有 $0 \leq H_2(P(t)) \leq 0.5$ 的性质.

将二次型熵 $H_2(P(t))$ 归一化处理并作为 Otsu 阈值准则函数的约束条件, 于是获得正则化 Otsu 阈值分割准则为

$$t^*(\lambda) = \arg \min_{0 < t < L-1} \{F(t) + 2\lambda H_2(P, t)\} \quad (5)$$

该分割准则所获得最佳阈值与正则化参数 λ 有关,若参数 $\lambda = 0$,则退化为传统 Otsu 阈值法.如何最佳选择参数 λ 是本文探讨正则化 Otsu 阈值法的关键之所在.

4 正则化 Otsu 阈值法解释

为了解释方便,将分割准则(5)转化为等价形式为

$$t^* = \arg \min_{0 < t < L-1} \left\{ \sum_{i=0}^t h(i)(i - m_0(t))^2 + \sum_{i=t+1}^{L-1} h(i)(i - m_1(t))^2 + 4\lambda P_0(t)P_1(t) \sum_{i=0}^{L-1} h(i)(i - m)^2 \right\}$$

假设图像直方图所对应灰度级概率是连续函数 $h(x)$,其正则化 Otsu 阈值化所涉及的目标函数可定义为

$$f(t) = \int_0^t h(x)(x - m_0(t))^2 dx + \int_t^{L-1} h(x)(x - m_1(t))^2 dx + 4\lambda P_0(t)P_1(t) \int_0^{L-1} h(x)(x - m)^2 dx$$

其中

$$m_0(t) = \frac{\int_0^t h(x)x dx}{\int_0^t h(x) dx}, m_1(t) = \frac{\int_t^{L-1} h(x)x dx}{\int_t^{L-1} h(x) dx}, m = \frac{\int_0^{L-1} h(x)x dx}{\int_0^{L-1} h(x) dx}$$

利用文献[4]获取迭代公式的方法,对目标函数 $f(t)$ 关于变量 t 求导数并令其等于零,于是有

$$t = \frac{m_1(t) + m_0(t)}{2} + \frac{2\lambda(P_0(t) - P_1(t))}{m_1(t) - m_0(t)} \cdot \int_0^{+\infty} h(x)(x - m)^2 dx \quad (6)$$

从上述表达式(6)来看,传统 Otsu 阈值法所得最佳分割阈值仅是目标和背景两平均灰度值所对应的算术平均,且其二者权重系数相等,对于目标和背景的方差相差较大图像所获得的分割阈值向方差较大一方靠近,不能获得相对满意的分割效果^[7].为了解决传统 Otsu 阈值法所存在的此问题,文献[4]提出了的加权最小偏差准则,其本质是目标和背景所对应的平均灰度值实行非等权加权算术平均,即给方差较大的一方选取较小的权值,而另一方选取较大的权值,避免分割阈值向方差较大一方靠近,从而可获得相对满意的分割阈值.本文解决该问题的方式与文献[4]截然不同,其本质是传统 Otsu 阈值法所获得阈值加上纠偏量

$$\frac{2\lambda(P_0(t) - P_1(t))}{m_1(t) - m_0(t)} \sum_{i=0}^{L-1} h(i)(i - m)^2$$

从而,避免分割阈值向方差较大一方靠近.因此,本文方法和文献[4]方法具有异途同工之妙,其纠偏效果受

到正则化参数 λ 的控制,特别是正则化参数 λ 符号的合理选取就明显体现了纠偏修正的思想.

5 正则化 Otsu 阈值法的参数选取

一般而言,正则化阈值准则式(5)中的正则因子 λ 要满足约束条件 $|\lambda| \leq 1$.若 $\lambda = 0$ 时,则退化为传统 Otsu 阈值法;若 λ 的绝对值过大,则分割阈值可能接近图像最大灰度值或最小灰度值,导致图像分割获取目标失败.一般情况,正则化参数 λ 的绝对值选取为 0.25、0.5 和 1 三个典型值可获得满意分割结果.另外,有关参数 λ 的正负符号选择可采用本文如下建议的方法确定.

给定分割阈值 t_1^* 所对应的目标与背景的偏差分别记为 $V_0(t^*) = \sum_{i=0}^{t^*} h(i)(i - m_0(t^*))^2$ 、 $V_1(t^*) = \sum_{i=t^*+1}^{L-1} h(i)(i - m_1(t^*))^2$,若 $V_0(t^*) - V_1(t^*)$ 大于零,则参数 λ 选取为正号;若 $V_0(t^*) - V_1(t^*)$ 小于零,则参数 λ 选取为负号;若 $V_0(t^*) - V_1(t^*)$ 等于零,则参数 λ 取值为零.这里参数 t^* 选取准则为

$$t^* = \arg \max_{0 < t < L-1} \{P_0(t)P_1(t)\}$$

为了叙述方便,将该方法简称为后验概率积最大法.

6 实验及结果分析

为了验证本文所建议的正则化阈值法的有效性,选取典型灰度图像将经典 Otsu 阈值法与本文所建议的正则化阈值法进行了测试、比较和分析.

正则化参数 λ 是正则化阈值法中至关重要参数,参数选取不当后续处理造成不可估量损失.为了研究正则化 Otsu 阈值法中正则化参数 λ (其符号采用后验概率积法确定)对分割阈值的影响,本文采用标准灰度 Lena、摄影师、杯子和细胞四幅图片(如图 1 所示)进行测试,其实验结果如表 1.

表 1 正则化参数 λ 对分割阈值的影响

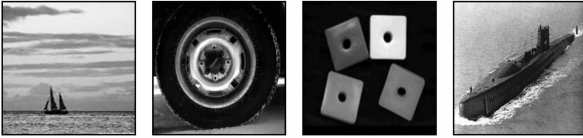
λ	分割阈值			
	Lena 图片	摄影师图片	杯子图片	细胞图片
0.00	115	88	119	106
0.10	113	85	112	106
0.25	109	80	92	101
0.50	87	71	79	96
0.75	71	62	70	90
1.00	217	51	62	73
1.25	229	251	54	239
1.50	233	251	45	246
1.75	233	251	38	246
2.00	233	251	31	246
2.25	233	251	24	246
2.50	233	251	16	246

从图 1 所示的四幅图片测试结果(见表 1)来看,一

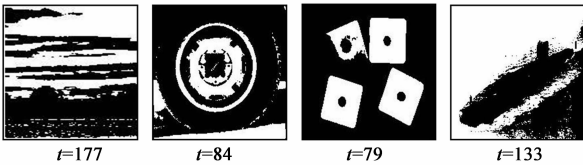


图1 原始图片

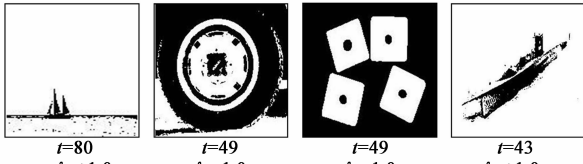
一般而言,大多数图像选取正则化参数 λ 的绝对值小于等于 1 就能获得满意的分割结果。



(a) 原始图像



(b) 传统Otsu阈值法



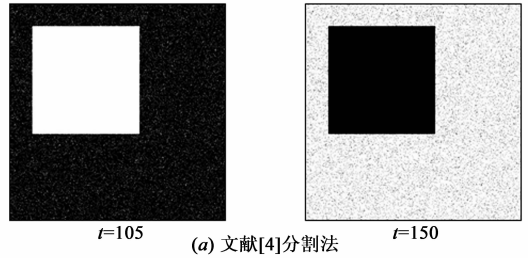
(c) 正则Otsu阈值法

图2 Otsu 阈值法及其正则阈值法比较测试

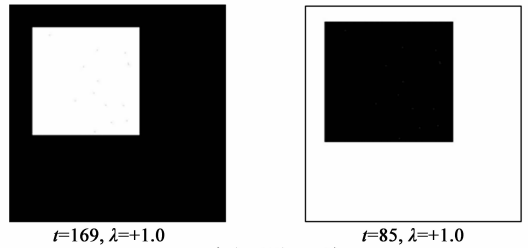
为了验证本文方法的有效性,采用典型图像进行分割测试(如图 2 所示),并与传统 Otsu 阈值法分割结果进行了比较.从图 2 所示的分割结果来看,本文所示的正则化 Otsu 阈值法(参数 λ 符号采用后验概率积最大法确定)相比经典 Otsu 阈值法更准确且完整地提取到图像中目标信息。

另外,为了验证本文正则化 Otsu 阈值法相比文献[4]加权 Otsu 阈值法更有效,下面采用目标和背景都呈正态分布的两幅人工合成图像(如图 3 所示,其中第 1 幅图的理想阈值为 156 至 165,采用 Otsu 法获得阈值为 139. 第 2 图的理想阈值为 93 至 101,采用 Otsu 法获得阈值为 115)进行测试,其结果如图 4 所示。

从图 4 所示的分割结果来看,文献[4]方法所获得分割阈值相对本文方法所获得阈值更严重偏离理想分割阈值范围,其像素误分率极大高于本文方法.因此,本文所建议的正则化 Otsu 阈值法相比文献[4]方法具有更好的分割性能。



(a) 文献[4]分割法



(b) 本文正则Otsu法

图4 本文方法与文献[4]方法的比较测试

7 结论

本文提出了正则化 Otsu 阈值法,对传统 Otsu 阈值法所获得的阈值偏向目标和背景中方差较大一方进行恰当纠正,改善了传统 Otsu 阈值法的分割性能,并比文献[4]的加权 Otsu 有更好的分割性能,对于探讨正则化理论在图像阈值化分割中的广泛应用将会产生深远的意义.另外,可将本文单阈值正则化的 Otsu 阈值法推广至多阈值情况,限于篇幅有限而省略其讨论。

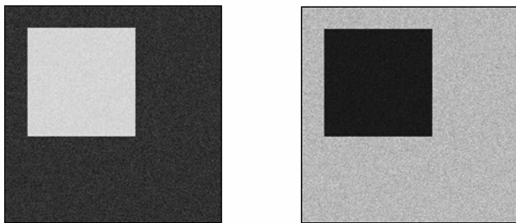
致谢 感谢审稿人给本文提出的参考意见。

参考文献

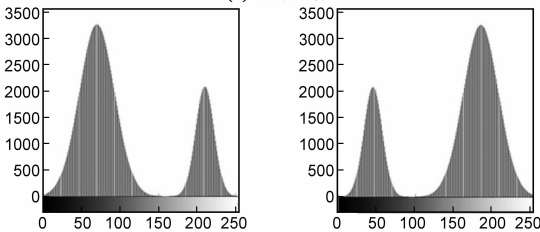
[1] Sezgin M, Sankur B. Survey over image thresholding techniques and quantitative performance evaluation[J]. Journal of Electronic Imaging, 2004, 13(1): 145 - 165.

[2] Otsu N. A threshold selection method from gray - level histogram[J]. IEEE Trans on System, Man and Cybernetics, 1979, 9(1): 62 - 66.

[3] Kurita T, Otsu N, Abdelmalek N. Maximum likelihood thresh-



(a) 原始图像



(b) 直方图

图3 人工合成图像及直方图

- olding based on population mixture models[J]. Pattern Recognition, 1992, 25(10): 1231 – 1240.
- [4] Morii F. An image thresholding method using a minimum weighted squared-distortion criterion[J]. Pattern Recognition, 1995, 28(7): 1063 – 1071.
- [5] 肖超云, 朱伟兴. 基于 Otsu 准则及图像熵的阈值分割算法[J]. 计算机工程, 2007, 33(14): 188 – 189, 209.
Xiao Chao-yun, Zhu Wei-xing. Threshold selection algorithm for image segmentation based on Otsu rule and image entropy [J]. Computer Engineering, 2007, 33(14): 188 – 189, 209. (in Chinese)
- [6] 范九伦. 新模糊聚类算法和聚类有效性问题的研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 1998.
Fan Jiu-lun. Studies on New Fuzzy Clustering Algorithms and Clustering Questions[D]. Xi'an: Xidian University, 1998. (in Chinese)
- [7] 许向阳, 宋恩民, 金海良. Otsu 准则的阈值性质分析[J]. 电子学报, 2009, 37(12): 2716 – 2719.
- Xu Xiang-yang, Song En-min, Jin Liang-hai. Characteristic analysis of threshold based on Otsu criterion[J]. Acta Electronica Sinica, 2003, 31(9): 1281 – 1285. (in Chinese)
- [8] 张志华, 郑南宁, 史罡. 极大熵聚类算法及其全局收敛性分析[J]. 中国科学(E辑), 2001, 31(1): 59 – 70.
- [9] Yu J, Yang M S. A generalized fuzzy clustering regularization model with Optimality tests and model complexity analysis[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2007, 15(5): 904 – 915.

作者简介



吴成茂 男, 1968 年 10 月出生于四川省仪陇县. 现为西安邮电大学电子工程学院高级工程师、硕士生导师. 在国内外发表学术论文 80 余篇.

E-mail: wuchengmao123@sohu.com