

# 基于集合的高维多目标优化问题的进化算法

巩敦卫, 季新芳, 孙晓燕

(中国矿业大学信息与电气工程学院, 江苏徐州 221008)

**摘 要:** 由于高维多目标优化问题包含的目标很多, 已有的方法往往难以解决该问题. 本文提出一种有效解决该问题的基于集合的进化算法, 该方法以超体积、分布度, 以及延展度为新的目标, 将原优化问题转化为3目标优化问题; 定义基于集合的 Pareto 占优关系, 设计体现用户偏好的适应度函数; 此外, 还提出集合进化策略. 将所提方法应用于4个基准高维多目标优化问题, 并与其他2种方法比较, 实验结果表明了所提方法的优越性.

**关键词:** 进化算法; 高维多目标优化; 集合进化; 用户偏好

**中图分类号:** TP301      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2014)01-0077-07

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.01.012

## Solving Many-Objective Optimization Problems Using Set-Based Evolutionary Algorithms

GONG Dun-wei, JI Xin-fang, SUN Xiao-yan

(School of Information and Electrical Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou, Jiangsu 221008, China)

**Abstract:** Previous methods are difficult to tackle a many-objective optimization problem since it contains many objectives. A set-based evolutionary algorithm was proposed to effectively solve the above problem in this study. In the proposed method, the original optimization problem was first transformed into a tri-objective one by taking such indicators as hyper-volume, distribution and spread as three new objectives; thereafter, a set-based Pareto dominance relation was defined, and a fitness function reflecting a user's preference was designed; additionally, set-based evolutionary strategies were suggested. The proposed method was applied to four benchmark many-objective optimization problems and compared with the other two methods. The experimental results show its advantages.

**Key words:** evolutionary algorithm; many-objective optimization; set-based evolution; user preference

### 1 引言

现实生活中存在多种含多个目标的优化问题, 如传感器网络中节点部署<sup>[1]</sup>, 以及飞行控制系统设计<sup>[2]</sup>等. 该问题的目标往往相互冲突, 通常称为多目标优化问题. 当目标多于3个时, 称为高维多目标优化问题. 不失一般性, 本文考虑如下优化问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{x} \in S \subset R^n \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x}$  为  $n$  目标决策向量,  $S$  为  $\mathbf{x}$  的可行域;  $f_i(\mathbf{x})$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) 为第  $i$  个目标函数,  $m$  为目标函数的个数, 且  $m > 3$ .

解决高维多目标优化问题的困难在于<sup>[3]</sup>, 目标函数的增多: (1)使得不同解之间互不占优的概率增加, 即

Pareto 最优解的选择压力降低, 从而无法比较这些解的优劣, 因此, 传统基于 Pareto 占优关系的多目标进化算法生成的近似 Pareto 最优解集, 在目标空间中难以有效逼近问题的真实 Pareto 前沿; (2)使得逼近问题真实 Pareto 前沿所需的 Pareto 最优解指数增加, 从而提高了问题求解的空间和时间复杂度; (3)使得问题的 Pareto 前沿无法可视化.

采用新的占优关系<sup>[4]</sup>比较个体的优劣, 以提高 Pareto 最优解的选择压力, 或者通过合适的方法减少目标函数<sup>[5,6]</sup>, 成为解决高维多目标优化问题的可行途径. 但是, 前者需要付出昂贵的计算代价, 而后者降维后的目标函数(集)不能脱离原目标函数集, 这样一来, 当目标函数很多时, 降维后的目标函数(集)也可能很大.

传统多目标进化算法的个体是一个解, 而当个体

是由多个解构成的集合时,称为基于集合的进化算法<sup>[7]</sup>.该方法也是一种降维方法,适用于求解高维多目标优化问题.它的特点在于,种群进化后得到的最优个体,即是优化问题的近似 Pareto 最优解集.然而,集合进化也会产生一系列新的问题,如不同集合,即进化个体的比较,以及进化策略设计等.目前,这方面的研究成果还很少,Bader 等将种群中的解划分成多个规模相同的解集合,然后将多目标优化问题转化为以每个解集合的超体积测度为优化目标的单目标优化问题,并设计基于超体积的集合重组策略<sup>[8]</sup>.Zitzler 等给出了得到集合全序关系的很多不同性能指标的组合.基于此,提出一种基于集合的进化算法,所提方法将偏好描述、算法设计和性能评估统一在一个框架中,为进化多目标优化方法的研究开辟了新局面<sup>[7]</sup>.可以看出,这种降维方法脱离了原目标函数集,能够克服已有降维方法可能遇到的困难.因此,本文将设计集合进化方法,对高维多目标优化问题进行降维求解.

基于此,本文以超体积、分布度,以及延展度为新的目标,将原优化问题转化为以集合为决策变量的 3 目标优化问题;通过定义基于集合的 Pareto 占优关系,并设计体现用户偏好的适应度函数,得到进化种群中个体的全序关系;此外,提出集合交叉和变异策略,并在 NSGA-II 范式下,开发了一种解决高维多目标优化问题的集合进化算法(Set-based Evolutionary Algorithms for many-objective optimization problems,简称 SetEA).

## 2 高维多目标优化问题的集合进化算法

本节阐述解决高维多目标优化问题的集合进化算法,算法在达到终止条件时,第一个优势个体即为满足用户偏好的原优化问题的近似 Pareto 最优解集.所提算法具体步骤如下:

**步骤 1** 初始化规模为  $\mu$  的集合进化种群  $P(0)$ ,每个集合进化个体含有原优化问题的  $N$  个解,令进化代数  $t=0$ ;

**步骤 2** 询问是否需要输入或更新用户偏好,如果是,输入用户偏好,即定义 2 中的  $w$ ;否则,转步骤 3;

**步骤 3** 采用第 2.1 节式(2)计算集合进化个体的适应值,从而将原优化问题转化为 3 目标优化问题;

**步骤 4** 采用第 2.2 节的方法对种群  $P(t)$  中的进化个体进行排序;

**步骤 5** 采用第 2.3 节的集合进化策略,实施基于集合的联赛选择、交叉,以及变异操作,生成临时种群  $Q(t)$ ;

**步骤 6** 合并  $P(t)$  和  $Q(t)$ ,并选取前  $\mu$  个进化个体组成子代种群  $P(t+1)$ ;

**步骤 7** 判定进化终止条件是否满足,如果是,输

出种群的第一个优势个体;否则,令  $t=t+1$ ,转步骤 2.

下面将对上述步骤中提到的相关技术进行详细论述.

### 2.1 优化问题的降维转化

鉴于已有降维方法存在的缺陷,借鉴文献[8]的思想,本节将以合适的性能指标作为新的目标,将问题(1)转化为以集合为决策变量的多目标优化问题.

通常,多目标优化方法求得的 Pareto 前沿需满足如下 3 个特性<sup>[9]</sup>:(1)具有较好的逼近性;(2)具有好的分布性;(3)具有较大的延展性.其中,逼近性和分布性是解集性能评价中常用的两个基本指标<sup>[10,11]</sup>.这里,利用这两个性能指标与延展性一起,降维转化原优化问题.具体地,选择超体积<sup>[12]</sup>、分布度<sup>[13]</sup>,以及延展度<sup>[9]</sup>作为转化后优化问题的目标函数,如式(2)所示:

$$\begin{aligned} \max F_1(\mathbf{X}) &= \lambda \left( \bigcup_{\mathbf{x}_j \in X} \{h | f(\mathbf{x}_j) < h < f(\mathbf{x}_{\text{ref}})\} \right) \\ \max F_2(\mathbf{X}) &= -\sqrt{\sum_{j=1}^N (d^*(\mathbf{X}) - d(\mathbf{x}_j))^2} / (N-1) \\ \max F_3(\mathbf{X}) &= \sqrt{\sum_{i=1}^m (\max_{j=1}^N f_i(\mathbf{x}_j) - \min_{j=1}^N f_i(\mathbf{x}_j))^2} \\ \text{s. t. } & \mathbf{X} \in \mathcal{P}(S), \mathbf{x} \in X \end{aligned} \quad (2)$$

式中, $\mathcal{P}(S)$ 为  $S$  的幂集,由  $S$  的所有子集构成; $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ ,为问题(1)的  $N$  个解构成的集合; $\lambda$  表示勒贝格测度; $\mathbf{x}_{\text{ref}}$ 为参考点; $d(\mathbf{x}_j) = \min_{\substack{l \in \{1,2,\dots,N\} \\ l \neq j}} |f_i(\mathbf{x}_j) - f_i(\mathbf{x}_l)|$ , ( $j=1,2,\dots,N$ ) 为  $\mathbf{x}_j$  在目标空间的拥挤距离, $d^*(\mathbf{X}) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N d(\mathbf{x}_j)$  为  $\mathbf{X}$  的平均拥挤距离; $f_i(\mathbf{x}_j)$  为  $\mathbf{x}_j$  在第  $i$  个目标上的值.

由式(2)可以看出:(1)  $F_1(\mathbf{X})$  用于计算  $\mathbf{X}$  的逼近度,其值越大,说明越逼近原优化问题的真实 Pareto 前沿;(2)  $F_2(\mathbf{X})$  用于计算  $\mathbf{X}$  的分布度,对原分布性指标取负,把最小化问题变为最大化问题,且其值越大,说明  $\mathbf{X}$  中原优化问题解的分布越均匀;(3)  $F_3(\mathbf{X})$  用于计算  $\mathbf{X}$  的延展度,其值越大,说明  $\mathbf{X}$  中原优化问题解的分布越广.

可以看出,上述转化方法具有下述 2 个特点:(1)优化的目标不是原问题目标的一部分,也不是这些目标的加权,而是一组新的目标,且个数远少于原问题;(2)决策变量不是原优化问题的一个解,而是由其多个解构成的集合.由此可知,通过求取转化后优化问题的最优解,就能够得到原优化问题的最优解集,因此,与已有的方法有本质区别.

如果采用进化算法求解问题(2),那么,进化种群的个体将是一个集合,此时,传统的多目标进化算法不再适用.为了反映不同集合的性能,下面给出集合的比

较方法.

## 2.2 集合比较

文献[7]基于解的占优关系,定义了集合偏好关系,本质是比较属于不同集合解的质量.因此,随着目标函数的增多,互不占优的集合也将增多,使得 Pareto 最优解集的选择压力降低.为解决该问题,本节基于转化后的问题(2),定义了基于集合的 Pareto 占优关系.

**定义 1** 考虑问题(2)的 2 个解  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2 \in \mathcal{P}(S)$ , 且  $\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_2$ ,

(1)如果对于  $\forall k \in \{1, 2, 3\}$ , 有  $F_k(\mathbf{X}_1) \geq F_k(\mathbf{X}_2)$ , 且  $\exists k' \in \{1, 2, 3\}$ , 使得  $F_{k'}(\mathbf{X}_1) > F_{k'}(\mathbf{X}_2)$ , 则称  $\mathbf{X}_1$  占优  $\mathbf{X}_2$ , 记为  $\mathbf{X}_1 >_{\text{spar}} \mathbf{X}_2$ ;

(2)如果  $\exists k' \in \{1, 2, 3\}$ , 使得  $F_{k'}(\mathbf{X}_1) \geq F_{k'}(\mathbf{X}_2)$ , 且  $\exists k'' \in \{1, 2, 3\}$ , 使得  $F_{k''}(\mathbf{X}_1) \leq F_{k''}(\mathbf{X}_2)$ , 则称  $\mathbf{X}_1$  和  $\mathbf{X}_2$  互不占优, 记为  $\mathbf{X}_1 \parallel_{\text{spar}} \mathbf{X}_2$ .

利用定义 1, 可将进化种群的个体进行非被占优排序, 从而得到相应的 Pareto 序值. 为了使这些个体具有全序关系, 需进一步区分具有相同序值的个体. 为此, 这里设计体现用户偏好的适应度函数, 以反映用户对不同 Pareto 前沿特性的偏爱, 定义如下.

**定义 2** 对于进化种群的个体  $\mathbf{X}$ , 其适应值为:

$$\text{FIT}(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^3 w_k r_k(\mathbf{X}) \quad (3)$$

式中,  $r_k(\mathbf{X})$  为  $\mathbf{X}$  的第  $k$  个目标函数值的降序排列值;  $w_k$  为  $r_k(\mathbf{X})$  的权值, 由用户设定, 且  $\sum_{k=1}^3 w_k = 1$ . 记  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ .

式(3)是文献[14]给出的排序方法的改进, 通过  $w_k$  的取值, 体现用户对原优化问题 Pareto 前沿特性的偏好; 对于相同的  $w_k$ , 如果  $r_k(\mathbf{X})$  越小, 即  $\mathbf{X}$  的第  $k$  个目标函数值越大, 那么,  $\text{FIT}(\mathbf{X})$  的值越小, 从而  $\mathbf{X}$  的性能越好; 反之亦然.

## 2.3 集合进化策略

### 2.3.1 集合选择

采用规模为 2 的联赛选择策略, 方法如下: 对于个体  $\mathbf{X}_1$  和  $\mathbf{X}_2$ , 如果  $\mathbf{X}_1 >_{\text{spar}} \mathbf{X}_2$ , 选择  $\mathbf{X}_1$  作为优胜个体; 如果  $\mathbf{X}_2 >_{\text{spar}} \mathbf{X}_1$ , 选择  $\mathbf{X}_2$  作为优胜个体; 如果  $\mathbf{X}_1 \parallel_{\text{spar}} \mathbf{X}_2$ , 选择  $\mathbf{X} = \text{argmin}\{\text{FIT}(\mathbf{X}_1), \text{FIT}(\mathbf{X}_2)\}$  作为优胜个体.

### 2.3.2 集合交叉

鉴于个体编码的特殊性, 设计集合交叉策略时, 不仅要考虑不同个体之间的交叉, 还需考虑同一个体内部的交叉, 具体策略如下:

(1)不同个体之间的交叉. 该操作用于交换原问题属于不同集合的解, 类似于并行遗传算法中不同子种群间个体的交换. 假设每个个体的规模  $N = 6$ , 图 1(a) 所示为进化个体  $\mathbf{X}_1$  和  $\mathbf{X}_2$  之间的单点交叉.

(2)同一个体内部的交叉. 这是集合进化特有的, 对于选定实施交叉操作的个体, 其内部的交叉, 等价于原优化问题不同解的交叉, 类似于传统遗传算法中的交叉操作. 假设原优化问题的决策变量  $n = 8$ , 且选定进化个体  $\mathbf{X}$  中的两个决策变量, 也即原优化问题的两个解  $\mathbf{x}_1$  和  $\mathbf{x}_2$  进行单点交叉, 如图 1(b) 所示. 这里采用单点交叉是为了便于图示, 实际操作中可以采用任意一种交叉方式, 本文采用模拟二进制交叉.



图1 基于集合的交叉策略

### 2.3.3 集合变异

假设  $\mathbf{X}$  为选作执行变异操作的个体, 依照一定的概率, 选择待变异的元素, 即原问题的解, 记为  $\mathbf{x}_j$ . 由于进化种群的最优个体包含许多性能优越的原问题的解, 因此, 实施变异操作时, 应充分利用这些解提供的信息, 使得变异后个体的性能有不同程度的提高. 基于此, 给出如下的变异策略:

$$l_j^d = c_1 r_1 (p_1^d - \mathbf{x}_j^d) + \dots + c_P r_P (p_P^d - \mathbf{x}_j^d)$$

$$\mathbf{x}_j^{d'} = \mathbf{x}_j^d + l_j^d \quad (4)$$

式中,  $d = 1, 2, \dots, n$ ;  $l_j^d$  为变异步长;  $\mathbf{x}_j^d$  与  $\mathbf{x}_j^{d'}$  分别为  $\mathbf{x}_j$  变异前后的第  $d$  个分量;  $c_i$  为变异因子;  $r_i \in [0, 1]$  为随机数 ( $i = 1, 2, \dots, P$ ); 将当前种群最优个体包含的解排序<sup>[15]</sup>, 从前  $N/2$  个解中随机选择  $P$  个, 记为  $p_1, p_2, \dots, p_P$ , 这里  $P$  由用户根据需要设置, 本文取 2.

需要注意的是, 利用式(4)进行集合变异时, 如果某分量变异后的值超出该分量的范围, 那么, 取该分量的边界值作为变异后的值.

## 2.4 算法的时间复杂度

种群每进化一代, 涉及比较运算的操作及它们在最坏情况下的时间复杂度如下所示:

(1)目标函数值计算为  $O(\mu N^m + \mu m N \log N)$ <sup>[16]</sup>, 主要来源于超体积计算.

(2)问题(2)中非被占优解排序为  $O(3(2\mu)^2)$ .

(3)具有相同 Pareto 序值个体的适应值计算及其排序分别为  $O(6\mu \log(2\mu))$  和  $O(2\mu \log(2\mu))$ .

(4)最优个体中解的适应值计算及其排序分别为  $O(mN^2)$  和  $O(N \log N)$ .

基于上述分析, 到所提方法的时间复杂度为  $O(\mu N^m)$ . 当进化种群的规模为  $\mu N$  时, HypE<sup>[16]</sup> (An Algorithm for Fast Hypervolume-Based Many-Objective Optimiza-

tion)的时间复杂度为  $O(\mu^m N^m)^{[17]}$ . 由此得到如下结论:所提方法的时间复杂度小于 HypE;且随着目标函数的增多,所提方法的运行时间将明显小于 HypE.

### 3 在典型高维多目标优化问题的应用

本文方法,即 SetEA,通过解决 4 个基准优化问题,DTLZ1、DTLZ2、DTLZ3,以及 DTLZ7<sup>[18]</sup>,并与 HypE 进行比较,验证其有效性.其中,各优化问题目标数分别取 5、10、和 20.此外,为证实 2.3.3 节提出的集合变异策略的性能,将所提方法与另一种集合进化算法比较,后者与 SetEA 区别仅在于变异策略的不同,该方法简称 SetEAP.

HypE 的种群规模为 100,采用联赛选择、模拟二进制交叉,以及多项式变异;对于 SetEA 和 SetEAP,采用 2.3 节提出的集合选择和交叉策略,其中,个体之间的交叉采用单点交叉,个体内的交叉采用模拟二进制交叉,分别采用集合变异和多项式变异,2 种方法的种群规模和个体包含解的个数均为 10.每种方法的最大进化代数 100,交叉和变异概率分别为 0.9 和 0.1,交叉和变异操作的分布系数为 20.各方法均采用文献[17]提出的 Monte Carlo 模拟法近似计算超体积,采样次数取 10000;由于原优化问题目标函数经过归一化处理,超体积计算的参考点为  $r = [1, 1, \dots, 1]$ .每种方法采用 Matlab 7.0 编程实现,且均独立运行 20 次,并计算这些运行结果的平均值.

将第 2.2 节用到的超体积、分布度、延展度,与算法运行耗时一起,用于上述方法间的性能比较,并分别简称为 H 测度、D 测度、S 测度和 T 测度.

实验分为 2 组:第 1 组考察  $w$  对 SetEA 性能的影响;第 2 组比较 SetEA 与其他 2 种方法性能的差异.

#### 3.1 $w$ 对 SetEA 性能的影响

根据用户对逼近性、分布性,以及延展性的不同偏好,设置 3 组不同的  $w$  值,分别为  $[1/3, 1/3, 1/3]$ 、 $[1/4, 1/2, 1/4]$ ,以及  $[1/4, 1/4, 1/2]$ .表 1~3 分别列出不同的  $w$  值对应的 H、D,以及 S 测度值.为了检验不同的  $w$  值对应各测度值差异的显著性,对上述测度值进行 Kruskal-Wallis 检验,并采用 Conover-Inman 两两比较,显著性水平取 0.05.第 2 组实验同样采用该非参数检验方法.表中带“\*”的数据显著优于其他数据.鉴于 5、10,以及 20 目标的假设检验结果一致,这里仅列出 10 目标的实验结果.

由表 1 可以看出,对于所有优化问题:(1)用户对 3 个性能指标的偏好相同时,对应的 H 测度均显著优于另外 2 种  $w$  取值,这是由于  $w$  取  $[1/3, 1/3, 1/3]$  时,用户对逼近性的偏好大于后 2 种;(2) $w$  取  $[1/4, 1/2, 1/4]$  和  $[1/4, 1/4, 1/2]$  时,对应的 H 测度无显著差异,这是因

为,这 2 种  $w$  取值,用户对逼近性的偏好相同.

表 1 不同的  $w$  取值对应的 H 测度值

	DTLZ1	DTLZ2	DTLZ3	DTLZ7
$[1/3, 1/3, 1/3]$	0.9861 *	0.9183 *	0.9712 *	0.5983 *
$[1/4, 1/2, 1/4]$	0.9638	0.8114	0.8936	0.3290
$[1/4, 1/4, 1/2]$	0.9612	0.8046	0.8811	0.3420

由表 2 和 3 可以看出:(1)当用户偏好于 Pareto 前沿的分布性时,对应各优化问题 Pareto 前沿的 D 测度均显著优于另外 2 种  $w$  取值;(2) $w$  取  $[1/3, 1/3, 1/3]$  时,对应各优化问题 Pareto 前沿的 D 测度均显著优于  $[1/4, 1/4, 1/2]$ ,这是因为,此时用户对分布性的偏好较大;(3)当用户偏好于 Pareto 前沿的延展性时,也能得到类似的结论.

表 2 不同的  $w$  取值对应的 D 测度值

	DTLZ1	DTLZ2	DTLZ3	DTLZ7
$[1/3, 1/3, 1/3]$	0.0929	0.1583	0.1048	0.1176
$[1/4, 1/2, 1/4]$	0.0264 *	0.0165 *	0.0315 *	0.0432 *
$[1/4, 1/4, 1/2]$	0.5380	0.6538	0.5134	0.6367

表 3 不同的  $w$  取值对应的 S 测度值

	DTLZ1	DTLZ2	DTLZ3	DTLZ7
$[1/3, 1/3, 1/3]$	1.2392	1.6353	1.2803	2.8160
$[1/4, 1/2, 1/4]$	1.0121	1.3273	1.0890	2.7301
$[1/4, 1/4, 1/2]$	2.4542 *	2.6383 *	1.9854 *	3.0311 *

上述实验结果表明,用户可以根据对不同性能指标的偏好,设计  $w$  的不同取值,从而在种群进化后,能够得到具有期望特性的 Pareto 最优解集.从这个意义上讲,所提方法得到的结果在某些程度上可随用户主观意愿的改变而变化,具有一定的柔性.

#### 3.2 不同方法的性能比较

本组实验中,SetEA 与 SetEAP 的  $w$  取值均为  $[1/3, 1/3, 1/3]$ ,比较这 2 种方法在 H、D,以及 S 测度的差异;对于 SetEA 与 HypE,除了比较上述性能指标外,还比较这 2 种方法的 T 测度,以及非被占优个体与进化种群包含个体数的比值,记为 ND/P;此外,以最大化超体积为惟一的目标,即所提算法  $w$  的取值为  $[1, 0, 0]$ ,将其与 HypE 进行性能比较,并记此时的 SetEA 为 SetEA1.

图 2~4 分别给出不同方法优化问题 DTLZ2 和 DTLZ7 时,得到的 Pareto 前沿的 H、D,以及 S 测度的箱图.表 4 是 SetEA 与 HypE、SetEAP 所得各性能指标的非参数检验结果,其中“+”和“-”分别表示 SetEA 显著优于和劣于其他方法,“0”表示这 2 种方法之间没有显著差异;表 5 列出不同方法的运行时间;表 6 列出 SetEA1 与 HypE 所得各性能指标值的非参数检验结果.

图 5 给出优化 DTLZ1 和 DTLZ2 时,SetEA 与 HypE 的 ND/P 随种群进化的变化曲线.限于篇幅,优化 DTLZ3 和 DTLZ7 的曲线不再给出,因为它们分别与 DTLZ1 和 DTLZ2 类似.

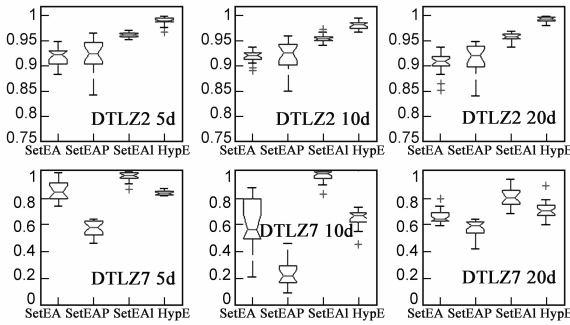


图2 不同方法得到的H测度箱图

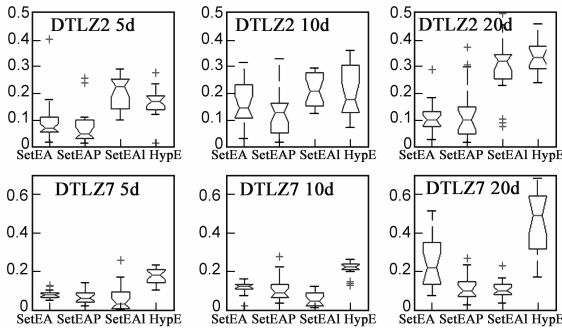


图3 不同方法得到的D测度箱图

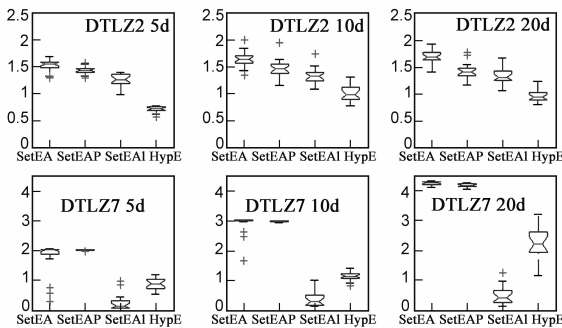


图4 不同方法得到的S测度箱图

(1)SetEA 与 SetEAP 的性能比较

由图 2~4 和表 4 可以看出:(1)SetEA 在优化 DTLZ3、DTLZ7,以及 5 目标 DTLZ1 时,得到的 H 测度显著优于 SetEAP,其余情况无明显差异,这表明,集合变异策略能够产生高性能的解,使得到的 Pareto 前沿更接近真实 Pareto 前沿;(2)除 20 目标 DTLZ7,SetEA 得到的 D 测度显著劣于 SetEAP 外,对于其他优化问题,SetEA 得到的 D 测度与 SetEAP 无显著差异,这表明,在多数情况下,集合变异策略与多项式变异一样,能够目标持种群的分布性;(3)对于 10 目标 DTLZ7,SetEA 得到的 S 测度显著劣于 SetEAP;对于 10 和 20 目标 DTLZ2,以及 20

目标 DTLZ7,SetEA 得到的 S 测度显著优于 SetEAP;对于其他优化问题,二者得到的 S 测度无明显差异,这表明,在维持种群的延展性方面,集合变异策略稍优于多项式变异.

表 4 SetEA 与 HypE、SetEAP 得到的 H、D 及 S 测度非参数检验结果

		DTLZ1			DTLZ2			DTLZ3			DTLZ7		
		H	D	S	H	D	S	H	D	S	H	D	S
HypE	5	0	+	+	-	+	+	-	0	+	0	+	+
	10	-	0	+	-	0	+	-	0	+	0	+	+
	20	-	0	+	-	+	+	-	0	+	-	+	+
SetEAP	5	+	0	0	0	0	0	+	0	0	+	0	0
	10	0	0	0	0	0	+	+	0	0	+	0	-
	20	0	0	0	0	0	+	+	0	0	+	-	+

综上所述,与传统的多项式变异相比,集合变异策略在目标持种群分布和延展性的同时,更有利于提高优化解的逼近性能,这与我们设计该策略的初衷完全一致.

(2)SetEA 与 HypE 的性能比较

由图 2~4 和表 4 可以发现:(1)除 5 目标 DTLZ1,以及 5 与 10 目标 DTLZ7,SetEA 得到的 H 测度与 HypE 无显著差异外,对于其他优化问题,HypE 得到的 H 测度显著优于 SetEA,这是因为,HypE 仅以最大化超体积为目标,而超体积只是 SetEA 的优化目标之一.如果用户希望 SetEA 在 H 测度上性能有所提高,可增加对 H 测度的偏好取值,第 3.2 节(3)将验证该结论;(2)对于 5 目标 DTLZ1、5 和 20 目标 DTLZ2,以及 DTLZ7,SetEA 得到的 D 测度显著优于 HypE;对于其他优化问题,二者得到的 D 测度无显著差异;总体而言,SetEA 得到的 D 测度优于 HypE,这是因为,D 测度是 SetEA 的优化目标之一,而对于 HypE 则不是;(3)对所有优化问题,SetEA 得到的 S 测度均显著优于 HypE,这说明,与 HypE 相比,SetEA 能够得到延展性更好的 Pareto 前沿,原因与(2)类似.

由表 5 可以看出,对于相同的优化问题,SetEA 的运行时间远少于 HypE.这是因为,HypE 不仅在种群规模为 100 的情况下计算 H 测度,而且在种群替代时,每删除一个个体,都需重新计算 H 测度.而在 SetEA 中,仅在利用式(2)计算个体适应值时,需要计算个体的 H 测度值,且由于每个个体包含 10 个原优化问题的解,因此,仅需在规模为 10 的情况下计算 H 测度.这与 2.4 节的时间复杂度分析结果是吻合的.

由图 5 可以看出,对于优化问题 DTLZ1 和 DTLZ2,SetEA 的 ND/P 分别略小于和明显小于 HypE,这说明,本文所提的基于集合的占优关系能够提高 Pareto 最优

解的选择压力,引导种群向真实 Pareto 前沿进化.

表 5 不同方法的 T 测度(单位: min)

		DTLZ1	DTLZ2	DTLZ3	DTLZ7
SetEA	5	0.57	0.58	0.63	0.58
	10	1.02	1.03	1.05	1.03
	20	1.90	1.90	1.97	1.93
HypE	5	19.43	52.53	16.73	59.80
	10	63.08	126.40	55.10	133.93
	20	128.87	245.90	114.13	249.80

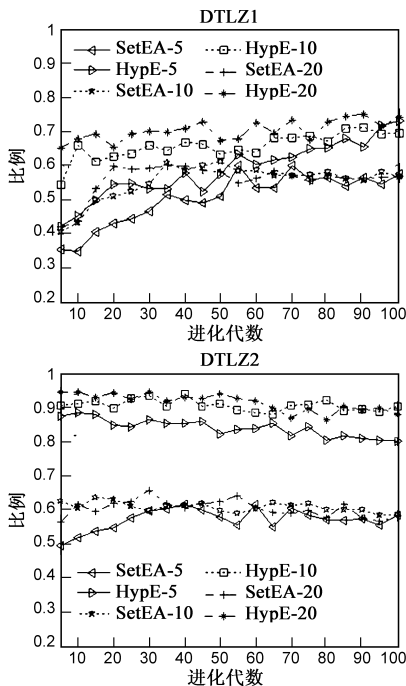


图5 SetEA与HypE的ND/P随种群进化的变化曲线

### (3) SetEA1 与 HypE 的性能比较

由图 2~4 与表 6 可以看出:(1)对于 DTLZ7 和 DTLZ2, SetEA1 的 H 测度分别优于和劣于 HypE; 而优化另外 2 个问题, 二者的 H 测度无明显差异;(2)优化问题 DTLZ7 时, SetEA1 的 D 测度优于 HypE; 但是, 对于 20 目标 DTLZ1, 以及 10 和 20 目标 DTLZ3, SetEA1 的 D 测度却劣于 HypE; 对于其他优化问题, 二者的 D 测度无显著差异;(3)除了优化问题 DTLZ7 时, SetEA1 的 S 测度劣于 HypE 外, 优化其他问题, SetEA1 的 S 测度均优于 HypE.

另外, 由于 SetEA 中  $w$  取值为  $[1, 0, 0]$  时, 即为 SetEA1, 所以从表 5 也可以得到, 对于相同的优化问题, HypE 的运行时间远多于 SetEA1.

综上所述, 当 SetEA 仅以最大化超体积为目标时, 其性能优于 HypE.

表 6 SetEA1 与 HypE 得到的 H、D 和 S 测度的非参数检验结果

	DTLZ1			DTLZ2			DTLZ3			DTLZ7		
	H	D	S	H	D	S	H	D	S	H	D	S
5	0	0	+	-	0	+	0	0	+	+	+	-
10	0	0	+	-	0	+	0	-	+	+	+	-
20	0	-	+	-	0	+	0	-	+	+	+	-

通过上述实验, 得到如下结论:(1)通过对不同的性能指标设置不同的偏好, 所提方法能够得到具有不同特性的近似 Pareto 最优解集;(2)集合变异策略在有效维持种群的分布和延展性的同时, 更有利于提高优化的逼近性能;(3)基于集合的 Pareto 占优关系, 能够提高 Pareto 最优解的选择压力, 引导种群向真实 Pareto 前沿进化;(4)不论以超体积、分布度, 以及延展度为优化目标, 还是仅以优化超体积为目标, SetEA 的综合性能优于 HypE, 且运行时间远少于 HypE. 这说明, 与已有方法相比, 所提方法在解决高维多目标优化问题是优越的.

## 4 结论

高维多目标优化问题是当前进化优化领域的研究热点之一, 虽然已有很多求解该问题的方法, 但是, 已有方法的性能尚需进一步提高.

本文提出一种用于解决上述问题的集合进化算法, 该算法的创新点主要体现在以下 4 个方面:(1)利用反映 Pareto 前沿特性的性能指标, 提出一种新的高维多目标优化问题的降维方法, 降低了问题求解的难度;(2)定义基于集合的 Pareto 占优关系, 提高了 Pareto 最优解集的选择压力;(3)设计体现用户偏好的适应度函数, 有利于得到满足不同用户期望特性的 Pareto 最优解集;(4)设计集合交叉和变异策略, 提高了个体的性能.

理论与实验结果表明, 利用性能指标将高维多目标优化问题转化为多目标优化问题, 是解决高维多目标优化问题的有效途径, 该方法不仅能够减少目标函数的个数, 而且通过求解转化后问题, 能够得到满足用户期望特性的近似 Pareto 最优解集.

容易理解, 采用不同的性能指标, 将得到不同的转化后问题, 而设计高性能的集合进化策略, 则有利于进一步提高问题求解的能力. 因此, 建立合适的转化后优化问题的数学模型, 以及设计有针对性的进化策略, 是需要进一步研究的课题.

## 参考文献

- [1] 南国芳, 陈忠楠. 基于进化优化的移动感知节点部署算法[J]. 电子学报, 2012, 40(5): 1017-1022.

- bile sensing nodes based on evolutionary optimization[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(5): 1017 – 1022. (in Chinese)
- [2] S F Adra, A Hamody, I Griffin, P J Fleming. A hybrid multi-objective evolutionary algorithm using an inverse neural network for aircraft control system design [A]. Proceedings of IEEE Congress on Evolutionary Computation [C]. Edinburgh: IEEE, 2005. 1 – 8.
- [3] Singh H K, Isaacs A, Ray T. A Pareto corner search evolutionary algorithm and dimensionality reduction in many-objective optimization problems [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2011, 15(4): 539 – 556.
- [4] Zou X F, Chen Y, Liu M Z, et al. A new evolutionary algorithm for solving many-objective optimization problems [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, 2008, 38(5): 1402 – 1412.
- [5] T Murata, A Taki. Examination of the performance of objective reduction using correlation-based weighted-sum for many objective knapsack problems [A]. Proceedings of 10th International Conference on Hybrid Intelligent Systems [C]. Atlanta: IEEE, 2010. 175 – 180.
- [6] J H Zheng, K Li, H Lv. Objective reduction based on the least square method for large-dimensional multi-objective optimization problem [A]. Proceedings of 5th International Conference on Natural Computation [C]. Tianjin: IEEE, 2009. 350 – 354.
- [7] Zitzler E, Thiele L, Bader J. On set-based multiobjective optimization [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2010, 14(1): 58 – 79.
- [8] J Bader, D Brockhoff, S Welten, E Zitzler. On using population of sets in multiobjective optimization [A]. Proceedings of 5th International Conference on Evolutionary Multi-objective Optimization [C]. Nantes: Springer, 2009. 5467: 140 – 154.
- [9] Zitzler E, Deb, K, Thiele, L. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: empirical results [J]. Evolutionary Computation, 2008, 8(2): 173 – 195.
- [10] 雷德明, 严新平, 吴智铭. 多目标混沌进化算法 [J]. 电子学报, 2006, 34(6): 1142 – 1145.  
Lei De-ming, Yan Xin-ping, Wu Zhi-ming. Multi-objective chaotic evolutionary algorithm [J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(6): 1142 – 1145. (in Chinese)
- [11] 李密青, 郑金华, 谢炯亮, 杨平, 李晶. 一种 MOEA 分布度的逐步评价方法 [J]. 电子学报, 2008, 36(10): 1986 – 1991.  
Li Mi-qing, Zheng Jin-hua, Xie Jiong-liang, Yang Ping, Li Jing. A stepwise diversity metric for MOEA [J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(10): 1986 – 1991. (in Chinese)
- [12] Zitzler E. Evolutionary Algorithms Multiobjective Optimization: Methods and Applications [D]. Zurich: Swiss Federal Institute of Technology, 1999.
- [13] Schoot J R. Fault Tolerant Design Using Single and Multicriteria Genetic Algorithms Optimization [D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1995.
- [14] Bentley P J, Wakefield J P. Finding acceptable solutions in the Pareto-optimal range using multiobjective genetic algorithms [A]. Soft Computing in Engineering Design and Manufacturing [C]. Springer, 1998, Part 5: 231 – 240.
- [15] M G Fabre, G T Pulido, C A C Coello. Ranking methods for many-objective optimization [A]. Proceedings of 8th Mexican International Conference on Artificial Intelligence [C]. Guanajuato: Springer, 2009. 5845: 633 – 645.
- [16] Bader J, Zitzler E. HypE: An algorithm for fast hypervolume-based many-objective optimization [J]. Evolutionary Computation, 2011, 19(1): 45 – 76.
- [17] Bader J, Zitzler E. A hypervolume-based optimizer for high-dimensional objective spaces [A]. New Developments in Multiple Objective and Goal Programming [C]. Springer, 2010, 638: 35 – 54.
- [18] Deb K, Thiele L, Laumanns M, Zitzler E. Scalable Test Problems for Evolutionary Multiobjective Optimization [R]. Institut für Technische Informatik und Kommunikationsentze (TIK) ETH Zurich, Technical Report: TIK-Report, No. 112, 2001.

#### 作者简介



巩敦卫 男, 1970年3月出生, 江苏铜山人. 博士, 教授, 博士生导师, 1992年、1995年和1999年分别在中国矿业大学、北京航空航天大学和中国矿业大学获理学学士、工学硕士和工学博士学位. 主要从事基于搜索的软件工程、智能优化与控制等方面的研究.

E-mail: dwgong@vip.163.com



季新芳 女, 1987年8月出生, 江苏泰州人. 2010获中国矿业大学工学学士学位. 现为中国矿业大学控制理论与控制工程硕士研究生, 主要从事多目标优化方面的研究.

E-mail: mimosa\_615615@126.com