

抑制校正源方位估计偏差的阵元位置 误差鲁棒估计算法

王 鼎, 姚 晖, 吴 瑛

(解放军信息工程大学信息工程学院, 河南郑州 450002)

摘 要: 针对校正源方位估计偏差会影响阵元位置误差校正精度这一问题, 该文在假设校正源方位估计偏差的概率分布先验已知的条件下, 根据信号子空间拟合理论和贝叶斯估计理论框架, 提出一种能够抑制校正源方位估计偏差的阵元位置误差鲁棒估计算法. 该算法以 Newton 迭代的形式给出, 并不需要对校正源方位进行数值优化. 理论分析和仿真实验均表明: 在一定条件下, 文中的新算法对校正源方位估计偏差具有较好的鲁棒性, 并且其渐近性能可逼近相应的克拉美罗界.

关键词: 有源校正; 阵元位置误差; 信号子空间拟合; 贝叶斯估计; Newton 迭代; 克拉美罗界

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2013) 09-1694-09

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.09.005

Robust Algorithm for Sensor Position Estimation Against the Direction Deviations of the Calibration Sources

WANG Ding, YAO Hui, WU Ying

(Institute of Information System Engineering, PLA Information Engineering University, Zhengzhou, Henan 450002, China)

Abstract: The direction deviations of the calibration sources would seriously degrade the calibration precision of the sensor positions. Aiming to this problem, the robust calibration algorithm for estimating the sensor shape against the location deviations is presented under the condition that the prior probability distribution of the direction deviations is available. The robust algorithm is derived based on the signal subspace fitting (SSF) technique and the Bayesian estimation theory frame, and it is numerically implemented via the Newton iteration without optimizing the locations of the calibration sources. Both the theory analysis and simulation experiments validate that the novel algorithm has preferable robustness against the location deviations of the calibration sources and its asymptotic performance can reach the Cramér-Rao bound (CRB) under some moderate conditions.

Key words: active calibration; sensor position error; signal subspace fitting; Bayesian estimation; Newton iteration; Cramér-Rao bound

1 引言

阵列误差校正方法分为两大类: 第一类是自校正方法^[1~5], 即依据某准则将信源方位和阵列误差参数进行联合优化, 在估计信源方位同时完成阵列误差参数在线估计; 第二类是有源校正方法^[6~16], 即利用方位已知或近似已知的校正源对阵列误差参数进行离线估计. 两种校正体制各有优势, 本文讨论有源校正方法.

阵元位置误差是常见的阵列误差形式, 由于阵列安装偏差或载体变形等因素会导致阵列的实际位置与标称位置之间存在一定扰动, 此时需要对阵元位置进行校

正. 文献[6]提出基于最大似然准则的阵元位置误差有源校正算法, 该算法假设校正源时域波形已知, 通过 Gauss-Newton 迭代实现阵元位置误差校正, 性能可逼近相应克拉美罗界 (Cramér-Rao Bound, CRB). 文献[7]提出基于信号子空间拟合 (Signal Subspace Fitting, SSF) 的阵元位置误差有源校正算法, 该算法通过 Newton 迭代实现阵元位置误差估计, 其性能也逼近相应 CRB. 文献[8]同样基于 SSF 技术, 提出一种针对近场校正源的阵元位置误差有源校正算法. 文献[9]根据子空间原理, 提出一种无需迭代的阵元位置误差校正算法, 该算法通过一阶 Taylor 级数展开获得阵元位置误差闭式解, 但至少需要

三个校正源并且要求阵元位置误差较小.文献[10]基于三个分时工作校正源,实现阵元位置和阵元幅相误差联合校正.

上述几种有源校正算法都需要校正源方位精确已知,但在实际应用中,校正源方位估计偏差往往难以避免.显然,该偏差必会对误差校正精度产生较大影响,尤其是对阵元位置误差的校正,因为阵元位置与信源方位之间的“耦合”较为严重.为了消除校正源方位估计偏差影响,一种最直接处理方式是利用估计的阵列误差参数修正阵列流形向量,并通过超分辨率算法重新估计校正源方位,然后再利用方位估计值更新阵列误差参数,按照此过程反复迭代直至收敛为止^[11,12];另一种处理方式是直接将阵列误差参数和校正源方位进行联合估计,从而求解更高维非线性优化问题^[13~15].这两种处理方式都趋于将有源校正问题转化为自校正问题,因此难免出现自校正方法中的缺点.为避免上述问题,文献[16]基于两个方位未知的分时校正源,提出一种对阵列流形向量的绝对相位进行最小二乘线性拟合,进而估计阵元位置误差的有源校正算法,尽管该算法计算简单并且行之有效,但需要校正源分时工作,并且其校正精度也存在进一步提升空间^[16].需要指出的是,由于校正源是人们主动放置,因此校正源方位估计偏差尽管难以避免但却可以得到控制,因此不妨假设校正源方位估计偏差概率分布先验已知,基于此本文根据 SSF 技术^[17]和贝叶斯(Bayesian)估计的理论框架^[1,2],提出一种能够直接抑制校正源方位估计偏差的阵元位置误差鲁棒估计算法,该算法不需要对校正源方位进行数值优化,能够在一定程度上抑制校正源方位估计偏差的影响.理论分析和仿真实验均表明:新算法对校正源方位估计偏差具有较好鲁棒性,其渐近性能可逼近相应 CRB.

2 阵列信号模型和问题描述

考虑某任意 M 元阵列,该阵列中的阵元实际位置与标称位置之间存在一定扰动误差,现有 D 个远场窄带校正源同时到达该阵列,则阵列的输出响应为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{k=1}^D s_k(t) \Phi_{0k} \mathbf{a}(\theta_{0k}) + \mathbf{n}(t) \\ &= \sum_{k=1}^D s_k(t) \mathbf{b}(\theta_{0k}) + \mathbf{n}(t) = \mathbf{B}_0 \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

式中 $\mathbf{n}(t)$ 表示复圆空时白的高斯噪声向量, $\mathbf{s}(t) = [s_1(t) s_2(t) \cdots s_D(t)]^T$ 为校正源复包络向量,其中 $s_k(t)$ 表示第 k 个校正源的复包络,假设它服从时域白的复圆高斯分布,并且与 $\mathbf{n}(t)$ 统计独立. $\mathbf{B}_0 = [\mathbf{b}(\theta_{01}) \mathbf{b}(\theta_{02}) \cdots \mathbf{b}(\theta_{0D})]$ 表示存在阵元位置误差情况下的阵列方向矩阵,其中 $\mathbf{b}(\theta_{0k}) = \Phi_{0k} \mathbf{a}(\theta_{0k})$ 为存在阵元位置误差情况下的阵列流形向量, $\mathbf{A}_0 =$

$[\mathbf{a}(\theta_{01}) \mathbf{a}(\theta_{02}) \cdots \mathbf{a}(\theta_{0D})]$ 表示理想条件下的阵列方向矩阵,其中 $\mathbf{a}(\theta_{0k})$ 为理想条件下的阵列流形向量,其表达式为

$$\mathbf{a}(\theta_{0k}) = [e^{j\kappa(x_1 \cos(\theta_{0k}) + y_1 \sin(\theta_{0k}))} e^{j\kappa(x_2 \cos(\theta_{0k}) + y_2 \sin(\theta_{0k}))} \cdots e^{j\kappa(x_M \cos(\theta_{0k}) + y_M \sin(\theta_{0k}))}]^T \quad (2)$$

其中 $\kappa = 2\pi/\lambda$, θ_{0k} 表示第 k 个校正源的方位标称值(即人们主观认定的信源方位值), x_m 和 y_m 分别表示第 m 个阵元在 X 轴方向和 Y 轴方向上的标称坐标.另一方面,式(1)中的 Φ_{0k} 表示由阵元位置误差引起的对角矩阵,其表达式为 $\Phi_{0k} = \text{diag}[\phi_{01}^{(k)} \phi_{02}^{(k)} \cdots \phi_{0M}^{(k)}]$, 式中 $\phi_{0m}^{(k)} = e^{j\kappa(\tilde{x}_m \cos(\theta_{0k}) + \tilde{y}_m \sin(\theta_{0k}))}$, 其中 \tilde{x}_m 和 \tilde{y}_m 分别表示第 m 个阵元在 X 轴方向和 Y 轴方向上的位置误差.实际中并非所有的阵元都需要考虑位置误差,例如,若以第一个阵元的位置为参考,则该阵元的位置误差可假设为零,即有 $\tilde{x}_1 = \tilde{y}_1 = 0$.为了便于后续的讨论,这里不妨定义 $0-1$ 选择矩阵 $\tilde{\mathbf{I}}_M$, 该矩阵可将需要考虑位置误差的阵元全部提取出来(若有 N 个阵元存在位置误差,则矩阵 $\tilde{\mathbf{I}}_M$ 的阶数为 $N \times M$), 此时的阵元位置误差向量可定义为 $\boldsymbol{\eta} = [(\tilde{\mathbf{I}}_M \tilde{\mathbf{x}})^T (\tilde{\mathbf{I}}_M \tilde{\mathbf{y}})^T]^T$, 其中 $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \cdots \tilde{x}_M]^T$ 和 $\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \cdots \tilde{y}_M]^T$.

根据式(1)可知阵列协方差阵为

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{E}[\mathbf{x}(t) \mathbf{x}^H(t)] = \mathbf{B}_0 \mathbf{R}_{ss} \mathbf{B}_0^H + \sigma^2 \mathbf{I}_M \quad (3)$$

式中 $\mathbf{R}_{ss} = \mathbf{E}[\mathbf{s}(t) \mathbf{s}^H(t)]$ 表示信源协方差阵, σ^2 为噪声功率. 现对 \mathbf{R}_{xx} 进行特征分解, 则其特征值按照由大到小的顺序可假设为

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_D > \lambda_{D+1} = \lambda_{D+2} = \cdots = \lambda_M = \sigma^2 \quad (4)$$

若令上述 D 个大特征值对应的单位特征向量分别为 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_D$, $M-D$ 个小特征值对应的单位特征向量分别为 $\mathbf{u}_{D+1}, \mathbf{u}_{D+2}, \cdots, \mathbf{u}_M$, 并分别记

$$\mathbf{U}_S = [\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_D], \mathbf{U}_N = [\mathbf{u}_{D+1} \mathbf{u}_{D+2} \cdots \mathbf{u}_M] \quad (5)$$

则它们张成的子空间分别称为信号子空间和噪声子空间,相应的正交投影矩阵分别为

$$\begin{cases} \mathbf{\Pi}_{U_S} = \mathbf{U}_S \mathbf{U}_S^H = \mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0^\dagger = \mathbf{\Pi}_{B_0} \\ \mathbf{\Pi}_{U_N} = \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H = \mathbf{\Pi}_{U_S}^\perp = \mathbf{I}_M - \mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0^\dagger = \mathbf{\Pi}_{B_0}^\perp \end{cases} \quad (6)$$

在实际计算中,由式(3)确定的理想协方差阵是无法获知的,其误差来源通常有两方面:第一个方面是有限样本的影响;第二个方面是校正源方位的真实值 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \theta_2 \cdots \theta_D]^T$ 与标称值 $\boldsymbol{\theta}_0 = [\theta_{01} \theta_{02} \cdots \theta_{0D}]^T$ 之间存在一定偏差,而在这两种误差背景条件下的阵列协方差阵可表示为

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx} = \frac{1}{L} \sum_{p=1}^L \mathbf{x}(t_p) \mathbf{x}^H(t_p) = \mathbf{B} \hat{\mathbf{R}}_{ss} \mathbf{B}^H + \hat{\mathbf{R}}_{sn} + \hat{\mathbf{R}}_{sn}^H + \hat{\mathbf{R}}_{nn} \quad (7)$$

式中 L 表示样本点数, \mathbf{B} 是将 \mathbf{B}_0 中的方位标称值 $\boldsymbol{\theta}_0$ 替

换为真实值 θ 所得到的阵列方向矩阵, 而其余三个协方差阵分别为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{R}}_{ss} = \frac{1}{L} \sum_{p=1}^L \mathbf{s}(t_p) \mathbf{s}^H(t_p), \hat{\mathbf{R}}_{sn} = \frac{1}{L} \sum_{p=1}^L \mathbf{s}(t_p) \mathbf{n}^H(t_p) \\ \hat{\mathbf{R}}_{nn} = \frac{1}{L} \sum_{p=1}^L \mathbf{n}(t_p) \mathbf{n}^H(t_p) \end{cases} \quad (8)$$

若对 $\hat{\mathbf{R}}_{xx}$ 进行特征分解, 则仍可得到 D 个大特征值和 $M-D$ 个小特征值, 相应的单位特征向量分别记为 $\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \dots, \hat{\mathbf{u}}_D$ 和 $\hat{\mathbf{u}}_{D+1}, \hat{\mathbf{u}}_{D+2}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_M$, 若分别令

$$\hat{\mathbf{U}}_S = [\hat{\mathbf{u}}_1 \hat{\mathbf{u}}_2 \dots \hat{\mathbf{u}}_D], \hat{\mathbf{U}}_N = [\hat{\mathbf{u}}_{D+1} \hat{\mathbf{u}}_{D+2} \dots \hat{\mathbf{u}}_M] \quad (9)$$

则相应的正交投影矩阵分别为

$$\mathbf{\Pi}_{\hat{\mathbf{U}}_S} = \hat{\mathbf{U}}_S \hat{\mathbf{U}}_S^H, \mathbf{\Pi}_{\hat{\mathbf{U}}_N} = \hat{\mathbf{U}}_N \hat{\mathbf{U}}_N^H = \mathbf{I}_M - \mathbf{\Pi}_{\hat{\mathbf{U}}_S} \quad (10)$$

有限样本和校正源方位估计偏差都会影响阵列误差校正精度, 在一阶误差分析理论框架下, 有限样本导致的参数估计均方误差为 $O(1/L)$ ^[17], 校正源方位估计偏差导致的参数估计误差为 $O(\theta - \theta_0)$. 这里将真实校正源方位 θ 看成是未知的随机变量, 并且它是在标称值 θ_0 的基础上发生随机扰动. 由于校正源是人们主观放置, 所以可假设该随机扰动的概率分布先验已知, 并服从零均值, 方差阵为 $\mathbf{\Omega}$ 的高斯分布, 此时由校正源方位估计偏差所导致的参数估计均方误差为 $O(\mathbf{\Omega})$.

需要指出, 由于本文的目的是能够给出抑制校正源方位估计偏差的鲁棒估计算法, 从而避免对校正源方位和阵元位置误差的联合优化, 因此这里不妨假设校正源方位估计偏差的方差阵 ($\mathbf{\Omega}$) 与 $1/L$ 是可比较的, 或同一量级, 即有 $\mathbf{\Omega} = O(1/L)$ 或者 $\mathbf{\Omega} = \bar{\mathbf{\Omega}}/L$, 其中 $\bar{\mathbf{\Omega}}$ 与 L 无关. 尽管实际情况与该假设条件未必完全吻合, 但研究这种条件下鲁棒估计算法具有一定理论意义. 事实上, 对于有源校正而言, 往往可考虑大样本或高信噪比的情况, 因此若校正源方位偏差足够小使得 $\mathbf{\Omega} = o(1/L)$, 即相比有限样本的影响, 校正源方位估计偏差可近似忽略, 此时的问题在渐近意义下可近似为校正源方位精确已知时的阵元位置误差有源校正问题; 若校正源方位偏差较大使得 $\mathbf{\Omega}^{-1} = o(1/L)$, 即相比有限样本的影响, 校正源方位估计偏差的影响占据主导, 此时可将阵元位置误差和信源方位进行联合优化, 即将问题直接转化为阵列误差自校正问题. 综上所述可知, 文中的理论分析仅考虑 $\mathbf{\Omega} = O(1/L)$ 的情况.

3 鲁棒的阵元位置误差估计算法

3.1 校正源方位无偏差时的阵元位置误差估计算法

3.1.1 目标函数的构造

在高斯随机信源条件下, 阵元位置误差的渐近最优估计可通过求解如下“嵌入式”最大似然函数获得^[17]

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{UML}} &= \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} f_{\text{UML}}(\boldsymbol{\eta}) \\ &= \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} \ln(\det[\mathbf{\Pi}_{\hat{\mathbf{B}}_0} \hat{\mathbf{R}}_{xx} \mathbf{\Pi}_{\hat{\mathbf{B}}_0} + \hat{\sigma}^2 \mathbf{\Pi}_{\hat{\mathbf{B}}_0}]) \end{aligned} \quad (11)$$

式中 $\hat{\sigma}^2 = (M-D)^{-1} \text{tr}[\mathbf{\Pi}_{\hat{\mathbf{B}}_0}^{\perp} \hat{\mathbf{R}}_{xx}]$. 式(11)给出的目标函数关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的形式很复杂, 非线性程度较高, 为此可通过 SSF 技术构造与其渐近等价的目标函数^[7,17]

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{SSF}} = \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} f_{\text{SSF}}(\boldsymbol{\eta}) = \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} \hat{\sigma}^{-2} \text{tr}[\mathbf{\Pi}_{\hat{\mathbf{B}}_0}^{\perp} \hat{\mathbf{M}}] \quad (12)$$

式中 $\hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{U}}_S \hat{\mathbf{W}}_{\text{SSF}} \hat{\mathbf{U}}_S^H$, $\hat{\mathbf{W}}_{\text{SSF}}$ 表示最优加权矩阵 $\mathbf{W}_{\text{SSF}} = \bar{\mathbf{\Lambda}}_S^2 \mathbf{\Lambda}_S^{-1}$ 的一致估计, 其中 $\mathbf{\Lambda}_S = \text{diag}[\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_D]$ 和 $\bar{\mathbf{\Lambda}}_S = \mathbf{\Lambda}_S - \sigma^2 \mathbf{I}_D$.

3.1.2 Newton 迭代公式和初值选取

式(12)可通过 Newton 迭代的方式进行优化求解, 这里直接给出其迭代公式^[7]

$$\boldsymbol{\eta}_{k+1} = \boldsymbol{\eta}_k - \gamma^k \boldsymbol{\Psi}^{-1}(\boldsymbol{\eta}_k) \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta}_k) \quad (13)$$

式中 $0 < \gamma < 1$ 表示步长因子, $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta})$ 和 $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\eta})$ 分别表示目标函数的梯度向量和 Hessian 矩阵, 其表达式分别为^[7]

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\eta}) = -2 \cdot \text{Re} \left\{ \begin{bmatrix} \text{vecd}[\bar{\mathbf{I}}_M \mathbf{H}_x \bar{\mathbf{I}}_M^T] \\ \text{vecd}[\bar{\mathbf{I}}_M \mathbf{H}_y \bar{\mathbf{I}}_M^T] \end{bmatrix} \right\} \\ \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{\eta}) = 2 \cdot \text{Re} \left\{ \bar{\mathbf{I}}_M \left(\begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_{\hat{\mathbf{B}}_0}^{\perp} \mathbf{\Pi}_{\hat{\mathbf{B}}_0}^{\perp} \\ \mathbf{\Pi}_{\hat{\mathbf{B}}_0}^{\perp} \mathbf{\Pi}_{\hat{\mathbf{B}}_0}^{\perp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{xx} \mathbf{P}_{xy} \\ \mathbf{P}_{xy}^H \mathbf{P}_{yy} \end{bmatrix}^T \right) \bar{\mathbf{I}}_M^T \right\} \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$\begin{cases} \mathbf{H}_x = \mathbf{B}_{0x} \mathbf{B}_0^{\dagger} \hat{\mathbf{M}} \mathbf{\Pi} \mathbf{\Pi}_{\hat{\mathbf{B}}_0}^{\perp}, \mathbf{H}_y = \mathbf{B}_{0y} \mathbf{B}_0^{\dagger} \hat{\mathbf{M}} \mathbf{\Pi} \mathbf{\Pi}_{\hat{\mathbf{B}}_0}^{\perp} \\ \mathbf{P}_{xx} = \mathbf{B}_{0x} \mathbf{B}_0^{\dagger} \hat{\mathbf{M}} \mathbf{B}_0^{\dagger H} \mathbf{B}_{0x}^H, \mathbf{P}_{xy} = \mathbf{B}_{0x} \mathbf{B}_0^{\dagger} \hat{\mathbf{M}} \mathbf{B}_0^{\dagger H} \mathbf{B}_{0y}^H \\ \mathbf{P}_{yy} = \mathbf{B}_{0y} \mathbf{B}_0^{\dagger} \hat{\mathbf{M}} \mathbf{B}_0^{\dagger H} \mathbf{B}_{0y}^H, \bar{\mathbf{I}}_M = \text{blkdiag}[\bar{\mathbf{I}}_M, \bar{\mathbf{I}}_M] \\ \mathbf{B}_0^{\dagger} = (\mathbf{B}_0^H \mathbf{B}_0)^{-1} \mathbf{B}_0^H, \mathbf{B}_{0x} = \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\Sigma}_{\cos}, \mathbf{B}_{0y} = \mathbf{B}_0 \boldsymbol{\Sigma}_{\sin} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\sin} = i\kappa \cdot \text{diag}[\sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \dots \sin(\theta_D)] \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\cos} = i\kappa \cdot \text{diag}[\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) \dots \cos(\theta_D)] \end{cases} \quad (15)$$

式(13)至式(15)给出的 Newton 迭代公式即为文献[7]中的算法, 在高斯随机信源条件下其渐近性能可逼近相应的 CRB. 另一方面, 为了保证 Newton 迭代的性能, 需要给出一个好的迭代初值, 这里不妨通过多维 MUSIC (MD-MUSIC) 算法的目标函数给出一个初值解. 根据 MD-MUSIC 算法的目标函数可得

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{MD-MUSIC}} &= \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} f_{\text{MD-MUSIC}}(\boldsymbol{\eta}) \\ &= \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} \text{tr}[\mathbf{B}_0^H \mathbf{\Pi}_{\hat{\mathbf{U}}_N} \mathbf{B}_0] = \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} \mathbf{b}_0^H (\mathbf{I}_D \otimes \mathbf{\Pi}_{\hat{\mathbf{U}}_N}) \mathbf{b}_0 \end{aligned} \quad (16)$$

式中 $\mathbf{b}_0 = \text{vec}[\mathbf{B}_0]$. 对向量 \mathbf{b}_0 关于 $\boldsymbol{\eta}$ 在零点做一阶 Taylor 级数展开可得

$$\mathbf{b}_0 \approx \bar{\mathbf{b}}_0 + \mathbf{D}_{\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\eta} \quad (17)$$

式中

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{b}}_0 = \mathbf{b}_0 \Big|_{\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}} \\ \mathbf{D}_\eta = \left[\frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_1} \Big|_{\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}} \quad \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_2} \Big|_{\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}} \quad \cdots \quad \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_{\dim \boldsymbol{\eta}}} \Big|_{\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}} \right] \end{cases} \quad (18)$$

将式(17)代入式(16)可建立如下二次优化问题用以获得迭代初值

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\eta}}_0 &= \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} f_0(\boldsymbol{\eta}) \\ &= \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} (\boldsymbol{\eta}^T \cdot \text{Re}\{\mathbf{D}_\eta^H (\mathbf{I}_D \otimes \mathbf{I}_{\hat{U}_N}) \mathbf{D}_\eta\} \cdot \boldsymbol{\eta} + \\ &\quad 2\boldsymbol{\eta}^T \cdot \text{Re}\{\mathbf{D}_\eta^H (\mathbf{I}_D \otimes \mathbf{I}_{\hat{U}_N}) \bar{\mathbf{b}}_0\}) \end{aligned} \quad (19)$$

根据式(19)可知迭代初值为

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_0 = -\text{Re}^{-1}\{\mathbf{D}_\eta^H (\mathbf{I}_D \otimes \mathbf{I}_{\hat{U}_N}) \mathbf{D}_\eta\} \cdot \text{Re}\{\mathbf{D}_\eta^H (\mathbf{I}_D \otimes \mathbf{I}_{\hat{U}_N}) \bar{\mathbf{b}}_0\} \quad (20)$$

基于上述分析可给出用于阵元位置误差校正的两步估计算法(本文称为算法 I):

步骤 1 利用式(20)计算迭代初值 $\hat{\boldsymbol{\eta}}_0$;

步骤 2 利用式(13)至式(15)进行迭代计算,从而获得阵元位置误差向量的估计值 $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{SSF}}$.

3.2 校正源方位存在偏差时的阵元位置误差估计算法

3.2.1 目标函数的构造

根据 Bayesian 估计理论框架^[1,2]和第 2 节中的假设可构造关于 $\boldsymbol{\eta}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 的“嵌入式”最大后验估计器

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{MD-MUSIC}} &= \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} f_{\text{MD-MUSIC}}(\boldsymbol{\eta}) \\ &= \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} \text{tr}[\mathbf{B}_0^H \mathbf{I}_{\hat{U}_N} \mathbf{B}_0] \\ &= \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} \mathbf{b}_0^H (\mathbf{I}_D \otimes \mathbf{I}_{\hat{U}_N}) \mathbf{b}_0 \end{aligned} \quad (21)$$

式(21)给出的目标函数关于 $\boldsymbol{\eta}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 的形式非常复杂,类似于第 3.1 小节中的处理方式,上述最大后验估计器可由下式替代而不影响其渐近性能

$$\begin{aligned} &\{\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{MAP-SSF}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{MAP-SSF}}\} \\ &= \arg \min_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\theta}} \bar{f}_{\text{SSF}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\theta}) + \frac{(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)^T \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)}{2} \\ &= \arg \min_{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\theta}} \hat{\sigma}^{-2} \text{tr}[\mathbf{I}_B^\perp \hat{\mathbf{M}}] + \frac{(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)^T \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)}{2} \end{aligned} \quad (22)$$

3.2.2 阵元位置误差和校正源方位的“去耦合”估计

本小节将致力于实现 $\boldsymbol{\eta}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 的“去耦合”估计,为此首先给出关于 $\boldsymbol{\theta}$ 的闭式解.为此,不妨通过 Taylor 级数展开的方法将式(22)转化为关于 $\boldsymbol{\theta}$ 的二次函数,此时即可获得关于 $\boldsymbol{\theta}$ 的闭式解,再将该闭式解代入式(22)中即可获得仅关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的“嵌入式”目标函数.

首先对 $f_{\text{MAP-SSF}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\theta})$ 关于 $\boldsymbol{\theta}$ 在 $\boldsymbol{\theta}_0$ 处进行二阶 Taylor 级数展开可得

$$\begin{aligned} f_{\text{MAP-SSF}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\theta}) &= f_{\text{SSF}}(\boldsymbol{\eta}) + (\mathbf{f}_0(\boldsymbol{\eta}))^T (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) \\ &\quad + (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)^T (\mathbf{F}_0(\boldsymbol{\eta}) + \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}) (\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0) / 2 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \text{式中 } [\mathbf{F}_0(\boldsymbol{\eta})]_{mn} &= \frac{\partial^2 \bar{f}_{\text{SSF}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial [\boldsymbol{\theta}]_m \partial [\boldsymbol{\theta}]_n} \Big|_{\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0} \quad \text{和 } [\mathbf{f}_0(\boldsymbol{\eta})]_m = \\ &= \frac{\partial \bar{f}_{\text{SSF}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial [\boldsymbol{\theta}]_m} \Big|_{\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0}. \end{aligned}$$

根据式(23)不难获得 $\boldsymbol{\theta}$ 的近似最优闭式解为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{opt}} \approx \boldsymbol{\theta}_0 - (\mathbf{F}_0(\boldsymbol{\eta}) + \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1})^{-1} \mathbf{f}_0(\boldsymbol{\eta}) \quad (24)$$

将式(24)代入式(23)可得到仅关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的优化问题

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{MAP-SSF}} &= \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} g_{\text{MAP-SSF}}(\boldsymbol{\eta}) \\ &= \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} f_{\text{SSF}}(\boldsymbol{\eta}) - \frac{(\mathbf{f}_0(\boldsymbol{\eta}))^T (\mathbf{F}_0(\boldsymbol{\eta}) + \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1})^{-1} \mathbf{f}_0(\boldsymbol{\eta})}{2} \end{aligned} \quad (25)$$

3.2.3 目标函数的简化

矩阵 $\mathbf{F}_0(\boldsymbol{\eta})$ 中的变量 $\boldsymbol{\eta}$ 可由其一致估计值 $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{consist}}$ 代替而不影响式(25)的渐近性能,即有如下命题

命题 1 若令 $\bar{g}_{\text{MAP-SSF}}(\boldsymbol{\eta}) = f_{\text{SSF}}(\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{f}_0^T(\boldsymbol{\eta}) (\hat{\mathbf{F}} + \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1})^{-1} \mathbf{f}_0(\boldsymbol{\eta}) / 2$, 式中 $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_0(\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{consist}})$, $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{consist}}$ 是 $\boldsymbol{\eta}$ 的一致估计值,记 $\hat{\boldsymbol{\eta}}_1 = \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} g_{\text{MAP-SSF}}(\boldsymbol{\eta})$ 和 $\hat{\boldsymbol{\eta}}_2 = \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} \bar{g}_{\text{MAP-SSF}}(\boldsymbol{\eta})$, 则

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \sqrt{L} (\hat{\boldsymbol{\eta}}_1 - \hat{\boldsymbol{\eta}}_2) = \mathbf{0} \quad \text{或者} \quad \hat{\boldsymbol{\eta}}_1 = \hat{\boldsymbol{\eta}}_2 + o_P\left(\frac{1}{\sqrt{L}}\right) \quad (26)$$

证明:根据文献[17]中的结论可知这里需要证明

$$\begin{cases} \text{(I)} \quad \frac{\partial g_{\text{MAP-SSF}}(\boldsymbol{\eta})}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_m} - \frac{\partial \bar{g}_{\text{MAP-SSF}}(\boldsymbol{\eta})}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_m} = o_P\left(\frac{1}{\sqrt{L}}\right) \\ \text{(II)} \quad \lim_{L \rightarrow +\infty} \left(\frac{\partial^2 g_{\text{MAP-SSF}}(\boldsymbol{\eta})}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_m \partial [\boldsymbol{\eta}]_n} - \frac{\partial^2 \bar{g}_{\text{MAP-SSF}}(\boldsymbol{\eta})}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_m \partial [\boldsymbol{\eta}]_n} \right) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

首先

$$\begin{aligned} [\mathbf{f}_0(\boldsymbol{\eta})]_m &= \frac{\partial \bar{f}_{\text{SSF}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\theta})}{\partial [\boldsymbol{\theta}]_m} \Big|_{\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0} = \frac{1}{\hat{\sigma}^2} \text{tr} \left[\frac{\partial \mathbf{I}_{\hat{B}_0}^\perp \hat{\mathbf{M}}}{\partial \theta_{0m}} \right] \\ &= -\frac{2}{\hat{\sigma}^2} \text{Re} \left\{ \text{tr} \left[\frac{\partial \mathbf{B}_0^H}{\partial \theta_{0m}} \mathbf{I}_{\hat{B}_0}^\perp \hat{\mathbf{M}} \mathbf{B}_0^{\text{TH}} \right] \right\} = o_P\left(\frac{1}{\sqrt{L}}\right) \end{aligned} \quad (28)$$

于是有

$$\mathbf{f}_0(\boldsymbol{\eta}) = -2\hat{\sigma}^{-2} \cdot \text{Re} \left\{ \mathbf{D}_0^H \cdot \text{vec} \left[\mathbf{I}_{\hat{B}_0}^\perp \hat{\mathbf{M}} \mathbf{B}_0^{\text{TH}} \right] \right\} = o_P\left(\frac{1}{\sqrt{L}}\right) \quad (29)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_0 &= \left[\frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \theta_{01}} \quad \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \theta_{02}} \quad \cdots \quad \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \theta_{0D}} \right] \\ &= \text{blkdiag}[\dot{\mathbf{b}}(\theta_{01}) \quad \dot{\mathbf{b}}(\theta_{02}) \quad \cdots \quad \dot{\mathbf{b}}(\theta_{0D})] \end{aligned} \quad (30)$$

其中 $\dot{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\theta}) = \partial \mathbf{b}(\boldsymbol{\theta}) / \partial \boldsymbol{\theta}$. 根据式(29)可进一步得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}_0(\boldsymbol{\eta})}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_m} &= -\frac{2}{\hat{\sigma}^2} \text{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{D}_0^H}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_m} \cdot \text{vec} \left[\mathbf{I}_{\hat{B}_0}^\perp \hat{\mathbf{M}} \mathbf{B}_0^{\text{TH}} \right] \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{D}_0^H \cdot \text{vec} \left[\mathbf{I}_{\hat{B}_0}^\perp \hat{\mathbf{M}} \frac{\partial \mathbf{B}_0^{\text{TH}}}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_m} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{\sigma^2} \cdot \text{Re} \left\{ \mathbf{D}_{\theta_0}^H \cdot \text{vec} \left[\mathbf{B}_0^{\text{IH}} \frac{\partial \mathbf{B}_0^H}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_m} \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{B}_0}^\perp \hat{\mathbf{M}} \mathbf{B}_0^{\text{IH}} \right] \right. \\
 & \left. + \mathbf{D}_{\theta_0}^H \text{vec} \left[\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{B}_0}^\perp \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_m} \mathbf{B}_0^\dagger \hat{\mathbf{M}} \mathbf{B}_0^{\text{IH}} \right] \right\} = O_p(1) \quad (31)
 \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}
 & [\mathbf{F}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta})]_{mn} = - \frac{2}{\sigma^2} \\
 & \cdot \text{Re} \left\{ \text{tr} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{B}_0^H}{\partial \theta_{0m} \partial \theta_{0n}} \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{B}_0}^\perp \hat{\mathbf{M}} \mathbf{B}_0^{\text{IH}} + \frac{\partial \mathbf{B}_0^H}{\partial \theta_{0m}} \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{B}_0}^\perp \hat{\mathbf{M}} \frac{\partial \mathbf{B}_0^{\text{IH}}}{\partial \theta_{0n}} \right] \right\} + \\
 & \frac{2}{\sigma^2} \cdot \text{Re} \left\{ \text{tr} \left[\frac{\partial \mathbf{B}_0^H}{\partial \theta_{0m}} \mathbf{B}_0^{\text{IH}} \frac{\partial \mathbf{B}_0^H}{\partial \theta_{0n}} \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{B}_0}^\perp \hat{\mathbf{M}} \mathbf{B}_0^{\text{IH}} + \frac{\partial \mathbf{B}_0^H}{\partial \theta_{0m}} \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{B}_0}^\perp \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial \theta_{0n}} \mathbf{B}_0^\dagger \hat{\mathbf{M}} \mathbf{B}_0^{\text{IH}} \right] \right\} = O_p(1) \quad (32)
 \end{aligned}$$

进一步可推得 $\frac{\partial \mathbf{F}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta})}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_m} = O_p(1)$. 又由于 $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_{\theta_0}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{consist}})$, 于是根据式(29)和式(31)可得

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \mathbf{f}_{\theta_0}^T(\boldsymbol{\eta})}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_m} \left((\hat{\mathbf{F}} + \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1})^{-1} - (\mathbf{F}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta}) + \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1})^{-1} \right) \mathbf{f}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta}) \\
 & = o_p(1/\sqrt{L}) \quad (33)
 \end{aligned}$$

基于上述分析可知

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \bar{g}_{\text{MAP-SSF}}(\boldsymbol{\eta})}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_m} - \frac{\partial \bar{g}_{\text{MAP-SSF}}(\boldsymbol{\eta})}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_m} \\
 & = \frac{\partial \mathbf{f}_{\theta_0}^T(\boldsymbol{\eta})}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_m} \left((\hat{\mathbf{F}} + \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1})^{-1} - (\mathbf{F}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta}) + \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1})^{-1} \right) \mathbf{f}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta}) \\
 & + \frac{1}{2} \mathbf{f}_{\theta_0}^T(\boldsymbol{\eta}) (\mathbf{F}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta}) + \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1})^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta})}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_m} (\mathbf{F}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta}) + \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1})^{-1} \mathbf{f}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta}) \\
 & = o_p\left(\frac{1}{\sqrt{L}}\right) \quad (34)
 \end{aligned}$$

另一方面, 由于 $\lim_{L \rightarrow +\infty} \mathbf{f}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{O}_{D \times 1}$ 和 $\lim_{L \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{F}} = \lim_{L \rightarrow +\infty} \mathbf{F}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta})$, 于是有

$$\begin{aligned}
 & \lim_{L \rightarrow +\infty} \left(\frac{\partial^2 \bar{g}_{\text{MAP-SSF}}(\boldsymbol{\eta})}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_m \partial [\boldsymbol{\eta}]_n} - \frac{\partial^2 \bar{g}_{\text{MAP-SSF}}(\boldsymbol{\eta})}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_m \partial [\boldsymbol{\eta}]_n} \right) = \lim_{L \rightarrow +\infty} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_{\theta_0}^T(\boldsymbol{\eta})}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_m} \right. \\
 & \left. \left((\hat{\mathbf{F}} + \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1})^{-1} - (\mathbf{F}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta}) + \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1})^{-1} \right) \frac{\partial \mathbf{f}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta})}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_n} \right) = 0 \quad (35)
 \end{aligned}$$

结合式(34)和式(35)可知式(27)成立, 于是命题 1 成立.

根据式(32)可知 $\mathbf{F}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta})$ 中含有的项数较多(共四项), 因此 $\mathbf{F}_{\theta_0}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{consist}})$ 的运算仍较为复杂. 然而, 进一步分析可知, 若忽略 $\mathbf{F}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta})$ 中的 $O_p(1/\sqrt{L})$ 项(前三项)而仅保留 $O_p(1)$ 项(最后一项), 仍不影响式(25)的渐近性能, 可见如下命题.

命题 2 若令 $\bar{g}_{\text{MAP-SSF}}(\boldsymbol{\eta}) = f_{\text{SSF}}(\boldsymbol{\eta}) - \mathbf{f}_{\theta_0}^T(\boldsymbol{\eta}) (\bar{\mathbf{F}}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta}) + \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1})^{-1} \mathbf{f}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta}) / 2$, 式中 $\bar{\mathbf{F}}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta})$ 是由矩阵 $\mathbf{F}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta})$ 中的 $O_p(1)$ 项构成的矩阵(即式(32)中的第四项), 并记 $\hat{\boldsymbol{\eta}}_1 = \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} \bar{g}_{\text{MAP-SSF}}(\boldsymbol{\eta})$ 和

$$\begin{aligned}
 & \hat{\boldsymbol{\eta}}_3 = \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} \bar{g}_{\text{MAP-SSF}}(\boldsymbol{\eta}), \text{ 则有} \\
 & \lim_{L \rightarrow +\infty} \sqrt{L}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_1 - \hat{\boldsymbol{\eta}}_3) = \mathbf{O} \text{ 或者 } \hat{\boldsymbol{\eta}}_1 = \hat{\boldsymbol{\eta}}_3 + o_p(1/\sqrt{L}) \quad (36)
 \end{aligned}$$

命题 2 和命题 1 的证明过程相类似, 鉴于有限的篇幅, 这里将不再叙述. 结合命题 1 和命题 2 可知, 式(25)中的矩阵 $\mathbf{F}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta})$ 可用 $\bar{\mathbf{F}}_{\theta_0}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{consist}})$ 代替而不影响式(25)的渐近性能, 从而进一步简化式(25)的优化计算复杂度. 为了便于计算, 这里不妨给出 $\bar{\mathbf{F}}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta})$ 的闭式形式, 根据式(32)可知

$$\begin{aligned}
 & [\bar{\mathbf{F}}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta})]_{mn} = \frac{2}{\sigma^2} \cdot \text{Re} \left\{ \text{tr} \left[\frac{\partial \mathbf{B}_0^H}{\partial \theta_{0m}} \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{B}_0}^\perp \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial \theta_{0n}} \mathbf{B}_0^\dagger \hat{\mathbf{M}} \mathbf{B}_0^{\text{IH}} \right] \right\} \\
 & = 2 \cdot \text{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{b}_0^H}{\partial \theta_{0m}} \hat{\mathbf{V}} \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \theta_{0n}} \right\} \quad (37)
 \end{aligned}$$

式中 $\hat{\mathbf{V}} = (\hat{\sigma}^{-2} \mathbf{B}_0^\dagger \hat{\mathbf{M}} \mathbf{B}_0^{\text{IH}})^T \otimes \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{B}_0}^\perp$, 于是可得 $\bar{\mathbf{F}}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta}) = 2 \cdot \text{Re} \{ \mathbf{D}_{\theta_0}^H \hat{\mathbf{V}} \mathbf{D}_{\theta_0} \}$.

结合前面的讨论可以给出抑制校正源方位估计偏差的阵元位置误差鲁棒估计器

$$\begin{aligned}
 & \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{MAP-SSF}} = \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} \bar{g}_{\text{MAP-SSF}}(\boldsymbol{\eta}) \\
 & = \arg \min_{\boldsymbol{\eta}} f_{\text{SSF}}(\boldsymbol{\eta}) - (\mathbf{f}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta}))^T \hat{\mathbf{W}}^{-1} \mathbf{f}_{\theta_0}(\boldsymbol{\eta}) \quad (38)
 \end{aligned}$$

式中 $\hat{\mathbf{W}} = 4 \cdot \text{Re} \{ \hat{\mathbf{D}}_{\theta_0}^H \hat{\mathbf{V}} \mathbf{D}_{\theta_0} \} + 2\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}$, 其中 $\hat{\mathbf{D}}_{\theta_0}$ 和 $\hat{\mathbf{V}}$ 分别表示 \mathbf{D}_{θ_0} 和 $\hat{\mathbf{V}}$ 中的参量 $\boldsymbol{\eta}$ 用其一致估计值 $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{consist}}$ 代替

3.2.4 Newton 迭代公式

类似于式(12)的求解, 式(38)也可通过 Newton 迭代的方法进行优化求解, 其迭代公式为

$$\boldsymbol{\eta}_{k+1} = \boldsymbol{\eta}_k - \gamma^k \bar{\boldsymbol{\Psi}}^{-1}(\boldsymbol{\eta}_k) \bar{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\eta}_k) \quad (39)$$

式中 $0 < \gamma < 1$ 表示步长因子, $\bar{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\eta})$ 和 $\bar{\boldsymbol{\Psi}}(\boldsymbol{\eta})$ 分别表示目标函数的梯度向量和 Hessian 矩阵, 其表达式分别为

$$\begin{cases}
 \bar{\boldsymbol{\varphi}}(\boldsymbol{\eta}) = - \frac{2}{\sigma^2} \text{Re} \left\{ \begin{aligned} & \left[\text{vecd} \left[\bar{\mathbf{I}}_M \mathbf{H}_M \bar{\mathbf{I}}_M^T \right] \right] \right\} + \\ & \frac{8}{\sigma^4} \sum_{m=1}^D \sum_{n=1}^D \left([\hat{\mathbf{W}}^{-1}]_{mn} \text{Re} \left\{ \left[\mathbf{B}_{0\theta_0}^H \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{B}_0}^\perp \hat{\mathbf{M}} \mathbf{B}_0^{\text{IH}} \right]_{mn} \right\} \right. \\ & \left. \times \text{Re} \left\{ \bar{\mathbf{I}}_M \left[\begin{aligned} & (\mathbf{B}_{0x} \mathbf{B}_0^\dagger \hat{\mathbf{M}} \mathbf{B}_0^{\text{IH}}; \mathbf{i}_D^{(m)}) \cdot (\boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{B}_0}^\perp \mathbf{B}_{0\theta_0}^* \mathbf{i}_D^{(m)}) \right] \right\} \right\} \end{aligned} \right\} \\
 \bar{\boldsymbol{\Psi}}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{2}{\sigma^2} \cdot \text{Re} \left\{ \bar{\mathbf{I}}_M \left[\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{B}_0}^\perp \quad \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{B}_0}^\perp \\ & \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{B}_0} \quad \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{B}_0} \end{aligned} \right] \cdot \left[\begin{aligned} & \mathbf{P}_{xx} \quad \mathbf{P}_{xy} \\ & \mathbf{P}_{xy}^H \quad \mathbf{P}_{yy} \end{aligned} \right]^T \end{aligned} \right] \bar{\mathbf{I}}_M^T \right\} - \\ & \frac{8}{\sigma^4} \sum_{m=1}^D \sum_{n=1}^D \left[\hat{\mathbf{W}}^{-1} \right]_{mn} \cdot \mathbf{Q}^{(mn)} \end{cases} \quad (40)$$

其中

$$\begin{cases}
 \mathbf{B}_{0\theta_0} = [\dot{\mathbf{b}}(\theta_{01}) \dot{\mathbf{b}}(\theta_{02}) \cdots \dot{\mathbf{b}}(\theta_{0D})], \\
 \mathbf{Q}^{(mn)} = \bar{\mathbf{I}}_M \left[\begin{aligned} & \mathbf{Q}_{11}^{(mn)} \quad \mathbf{Q}_{12}^{(mn)} \\ & \mathbf{Q}_{21}^{(mn)} \quad \mathbf{Q}_{22}^{(mn)} \end{aligned} \right] \bar{\mathbf{I}}_M^T \end{cases} \quad (41)$$

式中

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{Q}_{11}^{(mm)} &= \text{Re}\{(\mathbf{B}_{0x}\mathbf{B}_0^\dagger\hat{\mathbf{M}}\mathbf{B}_0^{\text{H}}\mathbf{i}_D^{(m)}) \cdot (\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{B}}_0}^\perp \mathbf{B}_{0\theta_0}^* \mathbf{i}_D^{(m)})\} \times \\ &\quad \text{Re}^T\{(\mathbf{B}_{0x}\mathbf{B}_0^\dagger\hat{\mathbf{M}}\mathbf{B}_0^{\text{H}}\mathbf{i}_D^{(n)}) \cdot (\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{B}}_0}^\perp \mathbf{B}_{0\theta_0}^* \mathbf{i}_D^{(n)})\} \\ \mathbf{Q}_{12}^{(mm)} &= \text{Re}\{(\mathbf{B}_{0x}\mathbf{B}_0^\dagger\hat{\mathbf{M}}\mathbf{B}_0^{\text{H}}\mathbf{i}_D^{(m)}) \cdot (\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{B}}_0}^\perp \mathbf{B}_{0\theta_0}^* \mathbf{i}_D^{(m)})\} \times \\ &\quad \text{Re}^T\{(\mathbf{B}_{0y}\mathbf{B}_0^\dagger\hat{\mathbf{M}}\mathbf{B}_0^{\text{H}}\mathbf{i}_D^{(n)}) \cdot (\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{B}}_0}^\perp \mathbf{B}_{0\theta_0}^* \mathbf{i}_D^{(n)})\} \\ \mathbf{Q}_{21}^{(mm)} &= \text{Re}\{(\mathbf{B}_{0y}\mathbf{B}_0^\dagger\hat{\mathbf{M}}\mathbf{B}_0^{\text{H}}\mathbf{i}_D^{(m)}) \cdot (\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{B}}_0}^\perp \mathbf{B}_{0\theta_0}^* \mathbf{i}_D^{(m)})\} \times \\ &\quad \text{Re}^T\{(\mathbf{B}_{0x}\mathbf{B}_0^\dagger\hat{\mathbf{M}}\mathbf{B}_0^{\text{H}}\mathbf{i}_D^{(n)}) \cdot (\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{B}}_0}^\perp \mathbf{B}_{0\theta_0}^* \mathbf{i}_D^{(n)})\} \\ \mathbf{Q}_{22}^{(mm)} &= \text{Re}\{(\mathbf{B}_{0y}\mathbf{B}_0^\dagger\hat{\mathbf{M}}\mathbf{B}_0^{\text{H}}\mathbf{i}_D^{(m)}) \cdot (\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{B}}_0}^\perp \mathbf{B}_{0\theta_0}^* \mathbf{i}_D^{(m)})\} \times \\ &\quad \text{Re}^T\{(\mathbf{B}_{0y}\mathbf{B}_0^\dagger\hat{\mathbf{M}}\mathbf{B}_0^{\text{H}}\mathbf{i}_D^{(n)}) \cdot (\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{B}}_0}^\perp \mathbf{B}_{0\theta_0}^* \mathbf{i}_D^{(n)})\} \end{aligned} \right. \quad (42)$$

式(39)至式(42)给出的 Newton 迭代公式可直接通过算法 I 给出初值. 另一方面, 为了提高算法的局部收敛性能, 这里利用式(39)进行多轮迭代, 每轮迭代后重新更新矩阵 $\hat{\mathbf{W}}$. 基于上述分析可给出校正源方位存在偏差时的阵元位置误差鲁棒估计算法(本文称为算法 II):

步骤 1 利用算法 I 计算迭代初值 $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{SSF}}$, 并基于此计算矩阵 $\hat{\mathbf{W}}$;

步骤 2 利用式(39)至式(42)进行迭代, 从而获得阵元位置误差向量的估计值 $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{MAP-SSF}}$, 并更新矩阵 $\hat{\mathbf{W}}$;

步骤 3 若满足收敛条件则停止, 否则转至步骤 2.

4 阵元位置误差估计方差的克拉美罗界和校正算法的渐近性能分析

为了便于叙述, 平常中用符号 \mathbf{F}'_x 和 \mathbf{C}'_x 分别表示未知参量 \mathbf{x} 的 Fisher 信息矩阵和 CRB 矩阵.

4.1 阵元位置误差估计方差的克拉美罗界

4.1.1 校正源方位无偏差

在高斯随机信源条件下, 所有的未知参量包括阵元位置误差向量 $\boldsymbol{\eta}$, 信源协方差阵 \mathbf{R}_{ss} 和噪声功率 σ^2 , 它们都是未知而确定的参数, 若将所有的实参数包含在向量 $\boldsymbol{\xi}$ 中, 则有

$$\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\eta}^T \quad [\mathbf{R}_{\text{ss}}]_{11} \quad \cdots \quad [\mathbf{R}_{\text{ss}}]_{DD} \quad \text{Re}\{[\mathbf{R}_{\text{ss}}]_{21}\} \quad \text{Im}\{[\mathbf{R}_{\text{ss}}]_{21}\} \quad \cdots \quad \text{Re}\{[\mathbf{R}_{\text{ss}}]_{D,D-1}\} \quad \text{Im}\{[\mathbf{R}_{\text{ss}}]_{D,D-1}\} \quad \sigma^2]^T \quad (43)$$

根据文献[17]中的结论可知关于 $\boldsymbol{\xi}$ 的单样本 Fisher 信息矩阵中的元素为

$$[\mathbf{F}'_{\boldsymbol{\xi}}]_{mm} = \frac{1}{L} \cdot [\mathbf{C}'_{\boldsymbol{\xi}}]_{mm} = \text{tr}\left[\mathbf{R}_{\text{xx}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_{\text{xx}}}{\partial [\boldsymbol{\xi}]_m} \mathbf{R}_{\text{xx}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_{\text{xx}}}{\partial [\boldsymbol{\xi}]_n}\right] \quad (44)$$

由于这里重点关心向量 $\boldsymbol{\eta}$ 的 CRB, 而 $\boldsymbol{\eta}$ 又是阵列方向矩阵 \mathbf{B}_0 中的未知参数, 于是根据文献[3]的结论可进一步推得仅关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的单样本 Fisher 信息矩阵中的元素为

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}'_{\boldsymbol{\eta}}]_{mn} &= 2\text{Re}\left\{\text{tr}\left[\frac{\partial \mathbf{B}_0^{\text{H}}}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_m} \mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{B}}_0}^\perp \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_n} \bar{\mathbf{W}}_{\text{NSF}}\right]\right\} \\ &= 2\text{Re}\left\{\frac{\partial \mathbf{b}_0^{\text{H}}}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_m} \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial [\boldsymbol{\eta}]_n}\right\} \end{aligned} \quad (45)$$

式中 $\bar{\mathbf{W}}_{\text{NSF}} = \sigma_2^{-1} \mathbf{W}_{\text{NSF}}$, $\mathbf{W}_{\text{NSF}} = \mathbf{B}_0^\dagger \mathbf{U}_S \mathbf{W}_{\text{SSF}} \mathbf{U}_S^{\text{H}} \mathbf{B}_0^{\text{H}}$ 和 $\mathbf{V} = \lim_{L \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{W}}_{\text{NSF}}^\dagger \mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{B}}_0}^\perp$. 根据式(45)可进一步推得 $\mathbf{F}'_{\boldsymbol{\eta}}$ 的闭式表达式为

$$\mathbf{F}'_{\boldsymbol{\eta}} = 2 \begin{bmatrix} \text{Re}\{\bar{\mathbf{I}}_M(\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{B}}_0}^\perp \cdot \mathbf{E}'_{xx})\} \text{Re}\{\bar{\mathbf{I}}_M(\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{B}}_0}^\perp \cdot \mathbf{E}'_{xy})\bar{\mathbf{I}}_M^T\} \\ \text{Re}\{\bar{\mathbf{I}}_M(\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{B}}_0}^\perp \cdot \mathbf{E}'_{xy})\bar{\mathbf{I}}_M^T\} \text{Re}\{\bar{\mathbf{I}}_M(\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{B}}_0}^\perp \cdot \mathbf{E}'_{xy})\bar{\mathbf{I}}_M^T\} \end{bmatrix} \quad (46)$$

式中 $\mathbf{E}'_{xx} = \mathbf{B}_{0x} \bar{\mathbf{W}}_{\text{NSE}} \mathbf{B}_{0x}^{\text{H}}$, $\mathbf{E}'_{xy} = \mathbf{B}_{0y} \bar{\mathbf{W}}_{\text{NSE}} \mathbf{B}_{0x}^{\text{H}}$ 和 $\mathbf{E}'_{yy} = \mathbf{B}_{0y} \bar{\mathbf{W}}_{\text{NSE}} \mathbf{B}_{0y}^{\text{H}}$. 于是关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 CRB 的闭式表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{C}'_{\boldsymbol{\eta}} &= \frac{1}{L} \mathbf{F}'_{\boldsymbol{\eta}}^{-1} \\ &= \frac{1}{2L} \begin{bmatrix} \text{Re}\{\bar{\mathbf{I}}_M(\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{B}}_0}^\perp \cdot \mathbf{E}'_{xx})\bar{\mathbf{I}}_M^T\} \text{Re}\{\bar{\mathbf{I}}_M(\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{B}}_0}^\perp \cdot \mathbf{E}'_{xy})\bar{\mathbf{I}}_M^T\} \\ \text{Re}\{\bar{\mathbf{I}}_M(\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{B}}_0}^\perp \cdot \mathbf{E}'_{xy})\bar{\mathbf{I}}_M^T\} \text{Re}\{\bar{\mathbf{I}}_M(\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{B}}_0}^\perp \cdot \mathbf{E}'_{yy})\bar{\mathbf{I}}_M^T\} \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (47)$$

4.1.2 校正源方位存在偏差

相比第 4.1.1 小节, 这里需要增加考虑实随机参量 $\boldsymbol{\theta}$. 若令 $\boldsymbol{\rho} = [\boldsymbol{\eta}^T \quad \boldsymbol{\theta}^T]^T$, 由于 $\boldsymbol{\eta}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 都是阵列方向矩阵 \mathbf{B} 中的未知参数, 根据文献[1]和文献[2]中的结论可知关于 $\boldsymbol{\rho}$ 的单样本 Fisher 信息矩阵中的元素为

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}'_{\boldsymbol{\rho}}]_{mn} &= \frac{1}{L} [\mathbf{C}'_{\boldsymbol{\rho}}]_{mn} \\ &= 2\text{Re}\left\{\text{tr}\left[\frac{\partial \mathbf{B}_0^{\text{H}}}{\partial [\boldsymbol{\rho}]_m} \mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{B}}_0}^\perp \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial [\boldsymbol{\rho}]_n} \bar{\mathbf{W}}_{\text{NSF}}\right]\right\} + [\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}]_{mn} [\boldsymbol{\Delta}]_{mn} \\ &= 2 \cdot \text{Re}\left\{\frac{\partial \mathbf{b}_0^{\text{H}}}{\partial [\boldsymbol{\rho}]_m} \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial [\boldsymbol{\rho}]_n}\right\} + [\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}]_{mn} [\boldsymbol{\Delta}]_{mn} \end{aligned} \quad (48)$$

式中 $\boldsymbol{\Delta}$ 是 0-1 矩阵, 并且仅在位于右下角的 $D \times D$ 阶子矩阵中的元素全为 1, 其余元素全为 0. 根据式(45)和式(48)可知 Fisher 信息矩阵中关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的子矩阵块 $\mathbf{F}'_{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}}$ 仍由式(46)表示, 但关于 $\boldsymbol{\theta}$ 的子矩阵块 $\mathbf{F}'_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}}$ 可表示为

$$\mathbf{F}'_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}} = 2 \cdot \text{Re}\{(\mathbf{B}_{0\theta}^{\text{H}} \mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{B}}_0}^\perp \mathbf{B}_{0\theta_0}) \cdot \bar{\mathbf{W}}_{\text{NSF}}^T\} + \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} = \mathbf{W}/2 \quad (49)$$

式中

$$\mathbf{W} = \lim_{L \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{W}} = 4 \cdot \text{Re}\{\mathbf{D}_0^{\text{H}} \mathbf{V} \mathbf{D}_0\} + 2\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \quad (50)$$

而 $\boldsymbol{\eta}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 的互矩阵块为

$$\mathbf{F}'_{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{F}'_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\eta}} = 2 \begin{bmatrix} \text{Re}\{\bar{\mathbf{I}}_M((\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{B}}_0}^\perp \mathbf{B}_{0\theta_0}) \cdot (\bar{\mathbf{W}}_{\text{NSF}} \mathbf{B}_{0x}^{\text{H}})^T)\} \\ \text{Re}\{\bar{\mathbf{I}}_M((\mathbf{\Pi}_{\bar{\mathbf{B}}_0}^\perp \mathbf{B}_{0\theta_0}) \cdot (\bar{\mathbf{W}}_{\text{NSF}} \mathbf{B}_{0y}^{\text{H}})^T)\} \end{bmatrix} \quad (51)$$

于是在校正源方位存在偏差的情况下, 关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的 CRB 可表示为

$$\bar{\mathbf{C}}_{\boldsymbol{\eta}} = (\mathbf{F}'_{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}} - \mathbf{F}'_{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{F}'_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}}^{-1} \cdot \mathbf{F}'_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\eta}})^{-1} / L \quad (52)$$

由 $\mathbf{F}'_{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\theta}} \cdot \mathbf{F}'_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}}^{-1} \cdot \mathbf{F}'_{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\eta}} \geq \mathbf{O}$ 可知 $\bar{\mathbf{C}}_{\boldsymbol{\eta}} \geq \mathbf{C}'_{\boldsymbol{\eta}}$, 即未知参量 $\boldsymbol{\theta}$ 的引入导致了阵元位置误差估计方差的 CRB 的增加.

4.2 校正算法的渐近性能分析

当校正源方位无偏差时, 根据 SSF 理论^[17]知算法 I 渐近有效, 即在大样本条件下, 其渐近性能逼近相应的

CRB,因此式(47)即为算法 I 的渐近性能预测值。

当校正源方位存在偏差时,这里需要讨论三个问题:(1)(鲁棒)算法 II 的渐近性能预测值;(2)算法 I 的渐近性能预测值;(3)两种算法的性能比较.这三个问题的相关结论将以下面各命题的形式给出。

命题 3 若将算法 II 的结果记为 $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{MAP-SSF}}$,则它在大样本条件下满足

$$\sqrt{L}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{MAP-SSF}} - \boldsymbol{\eta}) \in \text{AsN}(\mathbf{0}, \mathbf{C}_{\text{MAP-SSF}}) \quad (53)$$

式中 $\mathbf{C}_{\text{MAP-SSF}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}_{\boldsymbol{\eta}}$ 。

命题 3 表明文中(鲁棒)算法 II 的渐近性能可逼近相应 CRB.需要指出的,命题 3 的证明与分析方法与文献[1]和文献[2]中针对 Bayesian 鲁棒阵列误差自校正的性能分析方法相似,鉴于篇幅这里无法展开讨论,第 5 节中仿真实验将验证文中鲁棒算法渐近最优性。

命题 4 若将算法 I 的结果记为 $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{SSF}}$,则在大样本条件下满足

$$\sqrt{L}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{SSF}} - \boldsymbol{\eta}) \in \text{AsN}(\mathbf{0}, \mathbf{C}_{\text{SSF}}) \quad (54)$$

式中

$$\mathbf{C}_{\text{SSF}} = \mathbf{F}'_{\boldsymbol{\eta}}^{-1} + \mathbf{F}'_{\boldsymbol{\eta}}^{-1} \cdot \mathbf{F}'_{\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\rho}} \cdot \bar{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \mathbf{F}'_{\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\eta}} \cdot \mathbf{F}'_{\boldsymbol{\rho}}^{-1} \quad (55)$$

命题 5 基于命题 3 和命题 4 的定义可得关系式

$$\mathbf{C}_{\text{MAP-SSF}} \leq \mathbf{C}_{\text{SSF}}.$$

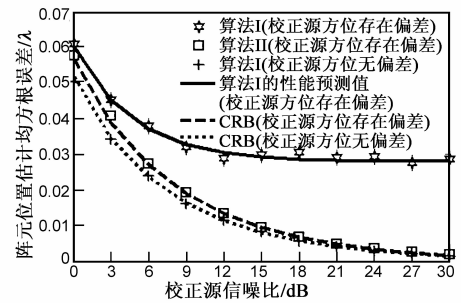
根据命题 3 至命题 5 可知,当校正源方位存在偏差时,算法 II 在大样本条件下是渐近最优的,并且其性能优于算法 I。

5 仿真实验

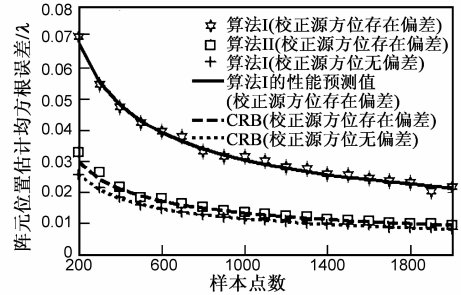
5.1 验证校正算法参数估计性能的仿真实验

假设标称阵列流形为 8 元均匀线阵,相邻阵元间距为半波长,而实际阵元位置与标称位置之间存在一定扰动误差,该阵列的标称阵元为第 1 个阵元,该直线阵的标称直线方向为第 1 个阵元与第 8 个阵元之间的所在连线,其余阵元会由于位置扰动而偏离该直线,它们在 X 轴方向上的位置误差分别为 0.012, -0.017, 0.023, -0.014, 0.025 和 -0.020(单位为 λ),在 Y 轴方向上的位置误差分别为 -0.015, 0.013, -0.018, 0.011, -0.009 和 0.013(单位为 λ)。现有两个等功率校正源同时到达该阵列,其方位(指与线阵夹角)标称值分别为 70° 和 100° ,校正源方位扰动方差阵为 $\boldsymbol{\Omega} = \text{diag}[0.01 \ 0.01]/L$ (单位为 rad^2),于是有 $\bar{\boldsymbol{\Omega}} = \text{diag}[0.01 \ 0.01]$ 。首先固定样本点数为 1000,校正源时域相关系数为 0.8,图 1(a)给出阵元位置估计均方根误差随着校正源信噪比的变化曲线;接着固定校正源信噪比为 12dB,校正源时域相关系数为 0.8,图 1(b)给出阵元位置估计均方根误差随着样本点数的变化曲线;最后固定校正源信噪比为 12dB,样本点数为 1000,

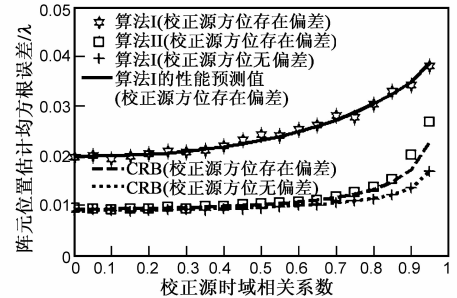
图 1(c)给出阵元位置估计均方根误差随着校正源时域相关系数的变化曲线。



(a) 阵元位置估计均方根误差随校正源信噪比的变化曲线



(b) 阵元位置估计均方根误差随样本点数的变化曲线



(c) 阵元位置估计均方根误差随校正源时域相关系数的变化曲线

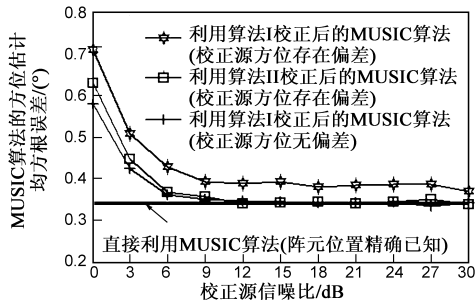
图 1 阵元位置估计均方根误差变化曲线

从图 1 中可以看出:(1)当校正源方位没有偏差时,算法 I(即文献[7]中的 SSF 算法)的数值统计性能与相应的 CRB(由式(47)确定)吻合地较好;(2)当校正源方位存在偏差时,算法 I 的性能会受到较大的影响,相对而言,算法 II 的性能会始终优于算法 I,并且在性能上比算法 I 有较大幅度的提高,从而验证算法 II 能够对校正源方位估计偏差起到很好的抑制作用(亦即鲁棒性);(3)算法 II 在校正源方位存在偏差时的性能接近算法 I 在校正源方位没有偏差时的性能,这进一步说明算法 II 的优势;(4)当校正源方位存在偏差时,算法 I 的数值统计性能与其理论曲线(由式(55)确定)吻合地较好,而算法 II 的数值统计性能则与相应的 CRB(由式(52)确定)较为吻合,从而说明算法 II 的渐近最优性。

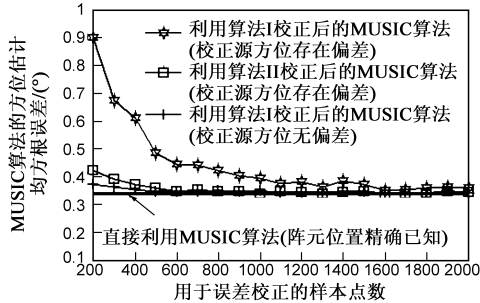
5.2 验证校正算法对阵列测向性能改善的仿真实验

这里以上述均匀线阵为例进行实验,其中阵列流形参数设置同图 1。现有两个统计独立等功率且方位未

知的待测信源到达该阵列,其方位(指与线阵夹角)分别为 20° 和 30° ,信噪比均为 12dB ,这里采用 MUSIC 算法进行方位估计,并且用于测向的样本点数为 300.在进行方位估计前,首先利用文中的校正算法进行位置误差校正.这里的校正源个数设为两个并且是等功率统计独立信源,其方位标称值分别为 70° 和 100° ,校正源方位扰动方差阵仍为 $\mathbf{\Omega} = \text{diag}[0.01 \ 0.01]/L$ (单位为 rad^2),即 $\mathbf{\Omega} = \text{diag}[0.01 \ 0.01]$.首先将用于误差校正的样本点数固定为 1000,图 2(a)给出 MUSIC 算法的方位估计均方根误差随着校正源信噪比的变化曲线;接着固定校正源信噪比为 12dB ,图 2(b)给出 MUSIC 算法的方位估计均方根误差随着用于误差校正的样本点数的变化曲线.此外,图中还给出了阵元位置精确已知条件下的 MUSIC 算法的方位估计均方根误差(由于未经过校正处理,它与校正源的参数设置无关,因此在图中显示的是一条横线).



(a) 方位估计均方根误差随校正源信噪比的变化曲线



(b) 方位估计均方根误差随(误差校正)样本点数的变化曲线

图 2 MUSIC 算法的方位估计均方根误差变化曲线

从图 2 中可以看出:当校正源方位存在偏差时,经算法 II 校正后的 MUSIC 算法方位估计精度高于经算法 I 校正后的 MUSIC 算法方位估计精度,从而再次说明算法 II 对校正源方位估计偏差起到的抑制作用.此外,随着校正源信噪比和用于误差校正的样本点数的增加,经算法 II 校正后的 MUSIC 算法方位估计性能会逐渐逼近阵元位置精确已知条件下的 MUSIC 算法性能(均方根误差为 0.34°).进一步仿真还会发现,若阵列不经过校正,直接利用 MUSIC 算法进行方位估计所得到的均方根误差为 1.87° ,因此在校正源方位有较小偏差的情况下,算法 I 也可以在一定程度上改善阵列的测向精

度.

6 结束语

本文在假设校正源方位估计偏差较小并且其概率分布先验已知的条件下,依据 SSF 技术^[17]和 Bayesian 估计理论框架^[1,2],提出一种能够抑制校正源方位估计偏差的阵元位置误差鲁棒估计算法.鲁棒算法是以 Newton 迭代的形式给出,不需要对校正源方位进行数值优化,并且具有较高的数值稳健性.理论分析和仿真实验均表明,文中的鲁棒算法可以很好的抑制校正源方位估计偏差带来的影响,其渐近性能在一定条件下可逼近相应的 CRB.

参考文献

- [1] Viberg M, Swindlehurst A L. A Bayesian approach to auto-calibration for parametric array signal processing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(12): 3495 - 3507.
- [2] Jansson M, Swindlehurst A L, Ottersten B. Weighted subspace fitting for general array error models[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, 46(9): 2484 - 2498.
- [3] See C M S, Gershman A B. Direction-of-arrival estimation in partly calibrated subarray-based sensor arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 52(2): 329 - 338.
- [4] Wijnholds S J, Veen A J. Multisource self-calibration for sensor arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(9): 3512 - 3522.
- [5] 王鼎,姚晖,吴瑛.基于协方差匹配技术的互耦和幅相误差联合校正算法[J].电子学报,2012,40(3):580 - 586. Wang Ding, Yao Hui, Wu Ying. The joint calibration algorithm of mutual coupling and gain-and-phase errors based on covariance matching technique[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(3): 580 - 586. (in Chinese)
- [6] Ng B C, Nehorai A. Active array sensor localization[J]. Signal Processing, 1995, 44(3): 309 - 327.
- [7] Ng B C, Ser W. Array shape calibration using sources in known locations[A]. Proceedings of the ICCS/ISITA Communications on the Moveapos[C]. Singapore: IEEE Press, 1992. 836 - 840.
- [8] Park H Y, Lee C Y, Kang H G, Youn D H. Generalization of subspace-based array shape estimations[J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 2004, 29(3): 847 - 856.
- [9] Zhang M, Zhu Z D. Array shape calibration using sources in known locations [A]. Proceedings of the IEEE National Aerospace and Electronics Conference[C]. Dayton, USA: IEEE Press, 1993, 70 - 73.
- [10] 贾永康, 保铮, 吴涸. 一种阵列天线阵元位置, 幅度及相位误差的有源校正方法[J]. 电子学报, 1996, 24(3): 47 - 52. Jia Yong-kang, Bao Zheng, Wu Huan. A new calibration tech-

- nique with signal sources for position, gain and phase uncertainty of sensor array[J]. Acta Electronica Sinica, 1996, 24(3): 47–52. (in Chinese)
- [11] Weiss A J, Friedlander B. Array shape calibration using eigenstructure methods[J]. Signal Processing, 1991, 22(3): 251–258.
- [12] 熊立志, 漆兰芬, 张元培. 一种新的天线阵列位置误差校正算法[J]. 电波科学学报, 2004, 19(2): 192–194.
Xiong Li-zhi, QI Lan-fen, Zhang Yuan-pei. A new algorithm for antenna array position correction[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2004, 19(2): 192–194. (in Chinese)
- [13] Weiss A J, Friedlander B. Array shape calibration using sources in unknown locations—A maximum likelihood approach[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1989, 37(12): 1958–1966.
- [14] See C M S, Poth B K. Parametric sensor array calibration using measured steering vectors of uncertain locations[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47(4): 1133–1137.
- [15] 万明坚, 肖先赐. 用信号子空间法对测向阵元位置进行校准[J]. 电子科学学刊, 1991, 13(5): 461–467.
Wan Ming-jian, Xiao Xian-ci. Sensor location calibration using signal subspace methods for direction finding technique[J]. Journal of Electronic, 1991, 13(5): 461–467. (in Chinese)
- [16] 杨志伟, 廖桂生. 基于最小二乘的阵元位置误差校正及性能分析[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(2): 167–169.
- Yang Zhi-wei, Liao Gui-sheng. Linear array position calibration based on least squares fitting and performance analysis[J]. Systems Engineering and Electronics, 2007, 29(2): 167–169. (in Chinese)
- [17] Ottersten B, Viberg M, Stoica P, Nehorai A. Exact and large sample ML techniques for parameter estimation and detection in array processing[A]. Radar Array Processing[C]. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 99–151.

作者简介



王 鼎 男, 1982 年生于安徽芜湖, 博士, 信息工程大学讲师, 感兴趣的研究方向: 现代信号处理.

E-mail: wang_ding814@aliyun.com



姚 晖 男, 1985 年生于江西上饶, 现为信息工程大学博士研究生, 感兴趣的研究方向: 阵列信号处理.

E-mail: yaohui56@sina.com

吴 瑛 女, 1960 年生于河南郑州, 信息工程大学教授, 博士生导师, 感兴趣的研究方向: 现代信号处理.

E-mail: hnwuying22@163.com