

变分框架下的多尺度图像恢复与重建

唐利明^{1,2}, 黄大荣³

(1. 重庆科技学院数理学院, 重庆 401331; 2. 重庆大学数学与统计学院, 重庆 401331;
3. 重庆交通大学山区桥梁与隧道工程国家重点实验室培育基地, 重庆 400074)

摘 要: 变分图像分解, 通过极小化能量泛函将图像分解为不同的特征分量, 可以被应用到图像的恢复和重建. 提出了变分框架下的多尺度图像恢复和重建的思想. 基于这种思想, 首先提出了一个单参数的 (BV, G, E) 三元变分分解模型, 并且理论分析了参数与不同特征分量的尺度的关系. 然后将此模型的参数选为一个二进制序列, 得到多尺度的 (BV, G, E) 变分分解. 该多尺度变分分解可以将图像分解为一序列图像结构、纹理和噪声. 证明了此多尺度分解的收敛性并且基于对偶理论和交替迭代算法给出了其数值求解方法. 最后将提出的多尺度的 (BV, G, E) 变分分解应用到图像恢复和重建, 实验结果证实了理论分析的正确性, 显示了将此模型进行图像多尺度恢复和重建的有效性, 和与一些其他分解模型相比较的优越性.

关键词: 变分图像分解; 图像恢复; 图像重建; 对偶; 多尺度

中图分类号: TN911.73 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2013) 12-2353-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.12.006

Multiscale Image Restoration and Reconstruction in the Framework of Variation

TANG Li-ming^{1,2}, HUANG Da-rong³

(1. College of Mathematics and Physics, Chongqing University of Science and Technology, Chongqing 401331, China;

2. College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China;

3. National Key Laboratory Incubation Base of Mountain Bridge and Tunnel Engineering, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: By minimizing the energy functional, we can obtain the variational image decomposition which decomposes image into different characteristic components, and can be used for image restoration and reconstruction. An idea of multiscale image restoration and reconstruction in the framework of variation is proposed. Based on this idea, firstly, a single-parameter (BV, G, E) trituple decomposition model is proposed, and the relationship between the parameter and the scale of each component is studied theoretically. And then, by replacing the parameter with a binary sequence, we achieve a multiscale (BV, G, E) decomposition which can decompose an image into a sequence of image structure, texture and noise. The convergence of this multiscale decomposition is proved, and an efficient numerical method based on the duality theory and alternate iteration algorithm is introduced to solve it. At last, the proposed multiscale (BV, G, E) decomposition is applied for image restoration and reconstruction. Numerical results support the theoretical results and show that the proposed model is efficient for multiscale image restoration and reconstruction, and is superior to some other decomposition models.

Key words: variational image decomposition; image restoration; image reconstruction; duality; multiscale

1 引言

从噪声图像中恢复重建真实图像是图像处理研究的一个重要研究内容. 它可以看成是对图像 f 的一个分解^[1-5], $f = u + v$, 其中 u 表示图像的结构分量; v 表示图像的震荡分量. 图像分解是一个逆问题, 可以通过泛

函极小化和正则化来实现, 本文称这种方法为变分图像分解. 其一般形式为^[6,7]:

$$\inf_{(u,v) \in X_1 \times X_2} \{K(u,v) = F_1(u) + \lambda F_2(v); f = u + v\} \quad (1)$$

其中 X_1, X_2 是函数或者分布空间, F_1, F_2 是非负泛函, $\lambda > 0$ 是调节参数. 现在大部分变分图像分解工作都集中在对空间 X_1, X_2 和泛函 F_1, F_2 的选取上.

Rudin 等^[8]提出了 ROF 模型. 该模型用有界变分空间 BV 刻画图像的结构分量, 用 L^2 空间刻画震荡分量, 它因此也被称为 (BV, L^2) 分解. ROF 模型允许解函数 $u \in BV$ 沿曲线出现间断, 所以图像的边缘可以在恢复图像中得到较好的保持. 但是由于震荡函数具有较大的 L^2 范数, 所以 ROF 模型会将一部分结构分解到震荡分量 v 中^[6]. Meyer^[6]对 ROF 模型进行了研究, 提出了三个赋范空间来刻画图像的震荡分量, 分别采用符号 G, F, E 来表示, 其中 $G = \text{div}(L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2))$, $F = \text{div}(\text{BMO})$ (BMO 是有界平均震荡函数空间), $E = \dot{B}_{-1, \infty}^s$ (Besov 空间 $B_{1,1}^s$ 的对偶空间). 这三个空间的范数都比 L^2 范数弱, 可以很好的刻画图像的震荡分量. 当模型(1)中的泛函 F_2 选用 $\|\cdot\|_G, \|\cdot\|_F$ 和 $\|\cdot\|_E$ 时, 模型分别称为 $(BV, G), (BV, F), (BV, E)$ 分解模型. 这三个模型在实际中求解都比较困难, 后续有大量工作集中在对这三个模型的近似计算上.

Vese 等^[9]利用 L^p 范数近似 L^∞ 范数, 率先提出了 (BV, G) 分解的近似模型; Osher 等^[10]利用负 Hilbert-Sobolev 空间 H^{-1} 近似 G 空间; Lieu 等^[11]采用更一般的负 Hilbert-Sobolev 空间 H^{-s} 近似 G 空间; Aujol 等^[12]利用对偶理论, 将 v 的计算转换成求解 G 空间内闭球上的投影; Le 等在文献[13]中给出了 (BV, F) 分解的近似模型; Aujol 等^[14]利用小波分解, 近似的求解了 (BV, E) 分解. 如果将上述变分分解模型直接用于图像恢复和重建, 将存在以下两个不足: (1) 这些模型都是固定尺度下的分解, 因为其中的参数都是定值, 所以只能得到固定尺度下的恢复和重建图像. (2) 上述模型都是二元分解, 不能很好的区分图像的纹理和噪声. 在进行多尺度图像重建时, 噪声会随着纹理出现在重建图像中而降低重建图像的质量.

Tadmor 等^[15]为了进行多尺度图像描述, 将 (BV, L^2) 分解模型中的固定参数替换为一个二进制序列, 提出了分层 (BV, L^2) 变分分解模型; Osher 等^[16]针对 (BV, L^2) 分解中最优参数 λ 难以进行估计的问题, 提出了基于 (BV, L^2) 的迭代正则化图像恢复模型. 这两个模型实际上都能进行多尺度图像修复和重建. 但是 (BV, L^2) 分解容易将图像的结构分到图像的震荡分量中而导致恢复图像中结构的损失; Tang 等^[17]为了进行多尺度纹理提取, 提出了分层 (BV, G) 分解模型. 将其应用到多尺度图像修复和重建, 可以避免 (BV, L^2) 分解中出现的缺点. 但是 (BV, G) 是一个二元分解, 不能很好的区分图像的纹理和噪声, 所以在进行图像重建时, 噪声将很快的出现在重建图像中而降低重建图像的质量; Aujol 等在文献[14]提出了一个 (BV, G, E) 三元分解模型, 此模型能较好的区分图像的纹理和噪声. 但是此模型是固定参

数的分解, 不能用来进行多尺度图像恢复和重建.

针对上述变分分解模型进行图像恢复和重建所存在的不足, 本文提出了一个单参数的多尺度 (BV, G, E) 三元变分分解模型. 采用此模型进行多尺度图像恢复和重建, 具有以下优势: (1) 它将图像分解成一序列不同尺度的结构, 纹理和噪声, 能很方便的进行多尺度图像恢复和重建. (2) 该分解是一个三元分解, 能分开地提取图像在不同尺度下的结构, 纹理和噪声. 这样在重建图像时, 可以较好的重建图像的纹理, 而剔除噪声.

2 多尺度变分分解

文本提出的单参数 (BV, G, E) 三元变分分解模型定义如下:

$$\inf_{u \in BV, v \in G, \omega \in E} \{ \|u\|_{BV} + \lambda \|f - u - v - \omega\|_{L^2}^2 + \|v\|_G + \|\omega\|_E \} \quad (2)$$

其中 $\lambda > 0$ 是调节参数. 通过求解问题(2), 图像 f 被分解成四个部分 $f = u + v + \omega + r$, 其中 $u \in BV$ 表示图像的结构; $v \in G$ 表示图像的纹理; $\omega \in E$ 表示图像的噪声; $r = f - u - v - \omega$ 表示分解后的剩余.

2.1 尺度参数 λ 的分析

模型(2)中的参数 λ 可以看成尺度参数. 下面理论研究 λ 分别与提取的结构, 纹理和噪声尺度的关系. 求解极小化问题(2)可以转化成连续求解以下耦合问题:

- 固定 v 和 ω , 通过下面的极小化问题求解 u

$$\inf_{u \in BV} \{ \|u\|_{BV} + \lambda \|f - u - v - \omega\|_{L^2}^2 \} \quad (3)$$

- 固定 u 和 ω , 通过下面的极小化问题求解 v

$$\inf_{v \in G} \{ \lambda \|f - u - v - \omega\|_{L^2}^2 + \|v\|_G \} \quad (4)$$

- 固定 u 和 v , 通过下面的极小化问题求解 ω

$$\inf_{\omega \in E} \{ \lambda \|f - u - v - \omega\|_{L^2}^2 + \|\omega\|_E \} \quad (5)$$

(1) 参数 λ 与结构尺度的关系

极小化问题(3)实际上是 ROF 模型. Strong 等^[18]假设输入图像为黑色背景上的白色圆盘, 理论研究参数 λ 和保持在 u 中结构尺度之间的关系. 他们推导出问题(3)的解为:

$$u = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{\lambda R}\right)(f - v - \omega), & \lambda > \frac{1}{R} \\ 0, & \lambda \leq \frac{1}{R} \end{cases} \quad (6)$$

式(6)说明图像中半径小于 $1/\lambda$ 的圆盘将被去除. 对于半径大于 $1/\lambda$ 的圆盘, 其对比值将有部分损失, 其损失量反比于 λR . 换句话说, 尺度大于 $1/\lambda$ 的结构将被保持在结构分量中 u 中, 而小于 $1/\lambda$ 的将被模糊掉.

(2) 参数 λ 与纹理尺度的关系

泛函式(4)的 Euler-Lagrange 方程为:

$$0 \in 2\lambda(\omega + u + v - f) + \partial L(v) \quad (7)$$

其中 $L(v) = \|v\|_C$, $\partial L(v)$ 是泛函 L 在点 v 的次微分. 方程式(7)可以改写为

$$2\lambda(f - u - v - \omega) \in \partial L(v) \quad (8)$$

式(8)等价于

$$v \in \partial L^*(2\lambda(f - u - v - \omega)) \quad (9)$$

其中, L^* 是泛函 L 的 Legendre-Fenchel 变换. 因为 $L(v) = \|v\|_C$ 是一阶齐次的, 所以 L^* 是定义在闭凸集 $K = \{\theta: |\theta|_{BV} \leq 1\}$ 上的指示函数. 式(9)可以改写为

$$0 \in f - u - v - \omega - f + u + \omega + \partial L^*(2\lambda(f - u - v - \omega)) \quad (10)$$

式(10)说明 $r = f - u - v - \omega$ 是极小化问题

$$\inf_{r \in BV} \left\{ \frac{1}{2} \|f - u - \omega - r\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\lambda} L^*(2\lambda r) \right\} \quad (11)$$

的解. 通过 L^* 的定义, 极小化问题(11)等价于下面的约束极值问题:

$$\inf_{r \in BV} \frac{1}{2} \|f - u - \omega - r\|_{L^2}^2 \text{ s.t. } 2\lambda |r|_{BV} \leq 1 \quad (12)$$

极小化问题(12)的等价 Lagrangian 形式为

$$\inf_{r \in BV} \left\{ \frac{1}{2} \|f - u - \omega - r\|_{L^2}^2 + 2\lambda\gamma_1 |r|_{BV} \right\} \quad (13)$$

其中 γ_1 是 Lagrangian 参数. 极小化问题(13)是问题(4)的对偶问题, r 为对偶变量. 利用结论(6), 它的解为

$$r = \begin{cases} \left(1 - \frac{4\lambda\gamma_1}{R}\right)(f - u - \omega), & 4\lambda\gamma_1 < R \\ 0, & 4\lambda\gamma_1 \geq R \end{cases}$$

则纹理分量 v 可以表示为

$$v = f - u - \omega - r = \begin{cases} \frac{4\lambda\gamma_1}{R}(f - u - \omega), & 4\lambda\gamma_1 < R \\ f - u - \omega, & 4\lambda\gamma_1 \geq R \end{cases} \quad (14)$$

式(14)说明半径小于 $4\lambda\gamma_1$ 的圆盘将被保持在 v 中, 而半径大于 $4\lambda\gamma_1$ 的圆盘有不同程度的对比度损失. 换句话说, 尺度小于 $4\lambda\gamma_1$ 的纹理将被保持在纹理分量 v 中, 而大于 $4\lambda\gamma_1$ 的纹理将被模糊掉.

(3) 参数 λ 与噪声尺度之间的关系

泛函(5)的 Euler-Lagrange 方程为

$$2\lambda(f - u - v - \omega) \in \partial S(\omega) \quad (15)$$

其中 $S(\omega) = \|\omega\|_E$. 式(15)等价于

$$\omega \in \partial S^*(2\lambda(f - u - v - \omega)) \quad (16)$$

由于 $E = \dot{B}_{-1, \infty}^z$ (Besov 空间 $B_{1,1}^z$ 的对偶空间), 则 S^* 是定义在闭凸集 $\{\theta: \|\theta\|_{B_{1,1}^z} \leq 1\}$ 上的指示函数. 式(16)可以改写为

$$0 \in f - u - v - \omega - f + u + v + \partial S^*(2\lambda(f - u - v - \omega))$$

上式说明 $r = f - u - v - \omega$ 是极小化问题

$$\inf_{r \in B_{1,1}^z} \left\{ \frac{1}{2} \|f - u - v - r\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\lambda} S^*(2\lambda r) \right\} \quad (17)$$

的解. 通过 S^* 的定义, 极小化问题(17)等价于下面的约束极值问题:

$$\inf_{r \in B_{1,1}^z} \frac{1}{2} \|f - u - v - r\|_{L^2}^2 \text{ s.t. } 2\lambda \|r\|_{B_{1,1}^z} \leq 1 \quad (18)$$

极小化问题(18)的等价 Lagrangian 形式为:

$$\inf_{r \in B_{1,1}^z} \left\{ \frac{1}{2} \|f - u - v - r\|_{L^2}^2 + 2\lambda\gamma_2 \|r\|_{B_{1,1}^z} \right\} \quad (19)$$

其中 γ_2 是 Lagrangian 参数. 极小化问题(19)是问题(5)的对偶问题. 采用小波软阈值(阈值为 $4\lambda\gamma_2$)算法^[14], 极小化问题(19)的解近似为:

$$r \approx \text{WST}(g, 4\lambda\gamma_2) = \sum_{|\hat{g}_{i,j}| \geq 4\lambda\gamma_2} \hat{g}_{i,j} \varphi_{i,j}$$

其中 $g = \sum \hat{g}_{i,j} \varphi_{i,j}$ 是 $g = f - u - v$ 的小波分解. 则噪声分量 ω 可以表示为:

$$\omega = f - u - v - r \approx f - u - v - \text{WST}(f - u - v, 4\lambda\gamma_2)$$

上式说明在噪声分量 ω 中, 小波系数小于 $4\lambda\gamma_2$ 的分量将被保持, 而大于 $4\lambda\gamma_2$ 的分量将被去除.

2.2 多尺度变分分解模型

求解极小化问题(2), 图像 f 被分解为 $u_\lambda + v_\lambda + \omega_\lambda + r_\lambda$. 由 2.1 节的讨论, u_λ 抓取了尺度大于 $1/\lambda$ 的图像结构, v_λ 抓取了尺度小于 $4\lambda\gamma_1$ 的纹理, ω_λ 抓取了尺度小于 $4\lambda\gamma_2$ 的噪声. 在这种情况下, 尺度小于 $1/\lambda$ 的结构, 尺度大于 $4\lambda\gamma_1$ 的纹理和尺度大于 $4\lambda\gamma_2$ 的噪声仍然保留在剩余 r_λ 中. 可以通过增加尺度参数的值提取保留在剩余分量 r_λ 中的结构, 纹理和噪声, 例如 2λ .

$$r_\lambda = u_{2\lambda} + v_{2\lambda} + \omega_{2\lambda} + r_{2\lambda} \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} & (u_{2\lambda}, v_{2\lambda}, \omega_{2\lambda}) \\ & = \arg \inf \{ \|u\|_{BV} + 2\lambda \|r_\lambda - u - v - \omega\|_{L^2}^2 \\ & \quad + \|v\|_C + \|\omega\|_E \} \end{aligned}$$

类似地, $u_{2\lambda}$ 抓取了尺度大于 $1/2\lambda$ 的图像结构, $v_{2\lambda}$ 抓取了尺度小于 $8\lambda\gamma_1$ 的纹理, $\omega_{2\lambda}$ 抓取了尺度小于 $8\lambda\gamma_2$ 的噪声. 而尺度小于 $1/2\lambda$ 的结构, 尺度大于 $8\lambda\gamma_1$ 的纹理和尺度大于 $8\lambda\gamma_2$ 的噪声仍然保留在剩余 $r_{2\lambda}$ 中. 则式(20)的过程可以继续以提取保留在剩余分量 $r_{2\lambda}$ 中的结构, 纹理和噪声. 最终的多尺度变分分解模型叙述如下:

设初始尺度参数 $\lambda = \lambda_0$, 通过求解极小化问题(2), f 图像被分解为:

$$f = u_0 + v_0 + \omega_0 + r_0$$

其中

$$\begin{aligned} & (u_0, v_0, \omega_0) \\ & = \arg \inf \{ \|u\|_{BV} + \lambda_0 \|f - u - v - \omega\|_{L^2}^2 \\ & \quad + \|v\|_C + \|\omega\|_E \} \end{aligned}$$

连续采用二进制分解式(20),

$$r_i = u_{i+1} + v_{i+1} + \omega_{i+1} + r_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} & (u_{i+1}, v_{i+1}, \omega_{i+1}) \\ &= \arg \inf \{ \|u\|_{BV} + \lambda_0 2^{i+1} \|r_i - u - v - \omega\|_{L^2}^2 \\ &+ \|v\|_G + \|\omega\|_E \} \end{aligned}$$

通过分解式(21), k 步之后,可以得到图像 f 的多尺度分解:

$$\begin{aligned} f &= u_0 + v_0 + \omega_0 + r_0 \\ &= u_0 + u_1 + v_0 + v_1 + \omega_0 + \omega_1 + r_1 \\ &= \dots \\ &= u_0 + u_1 + \dots + u_k + v_0 + v_1 + \dots + v_k + \omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_k + r_k \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $\sum_{i=0}^k u_i$ 表示图像 f 的多尺度结构; $\sum_{i=0}^k v_i$ 表示图像的多尺度纹理. 如果将多尺度分解式(22)应用到图像的多尺度恢复和重建, $\sum_{i=0}^k u_i$ 表示多尺度恢复图像; $\sum_{i=0}^k (u_i + v_i)$ 表示多尺度重建图像.

2.3 多尺度变分分解的收敛性

图像 f 的多尺度分解(22)可以通过连续地求解下面的极小化问题得到,

$$\inf_{u,v,\omega} \{ \|u\|_{BV} + \lambda_0 2^{i+1} \|r_i - u - v - \omega\|_{L^2}^2 + \|v\|_G + \|\omega\|_E \}, i = -1, 0, 1, \dots \quad (23)$$

其中 $r_{-1} := f$. 本文定义一个新的范数 $\|\cdot\|_*$ 度量 L^2 函数.

定义 1 设 $\xi \in L^2$, $\|u\|_X = \|u\|_{BV}$, $\|v\|_Y = \|v\|_G$, $\|\omega\|_Z = \|\omega\|_E$, 则空间 $X + Y + Z$ 的插值范数为:

$$\|h\|_{X+Y+Z} = \inf \{ \|u\|_X + \|v\|_Y + \|\omega\|_Z : h = u + v + \omega, u \in X, v \in Y, \omega \in Z \}$$

则 $\|\xi\|_*$ 定义为:

$$\|\xi\|_* = \sup_h \frac{\langle \xi, h \rangle}{\|h\|_{X+Y+Z}} = \sup_{\|h\|_{X+Y+Z} \leq 1} \langle \xi, h \rangle$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 L^2 内积.

范数 $\|\cdot\|_*$ 实际上是 $\|\cdot\|_{X+Y+Z}$ 的对偶范数. 利用 $\|\cdot\|_*$, 对于极小化问题(23), 有以下结论.

引理 1 设 $(u_{i+1}, v_{i+1}, \omega_{i+1})$ 是极小化问题(23)的解, 则 $r_{i+1} = r_i - u_{i+1} - v_{i+1} - \omega_{i+1}$ 是极小化问题

$$\inf_r \|r_i - r\|_{L^2}^2 \text{ s.t. } \|r\|_* \leq \frac{1}{\lambda_0 2^{i+2}}$$

的解.

证明 利用定义 1 中的符号, 极小化问题(23)可以改写为:

$$\inf_{h \in X+Y+Z} \{ F(h) + \lambda_0 2^{i+1} \|r_i - h\|_{L^2}^2 \} \quad (24)$$

其中 $F(h) = \|h\|_{X+Y+Z}$. 因为 $(u_{i+1}, v_{i+1}, \omega_{i+1})$ 是极小化问题(23)的解, 所以 $h_{i+1} = u_{i+1} + v_{i+1} + \omega_{i+1}$ 是极小化问题(24)的解. 则

$$\begin{aligned} 0 \in \partial F(h_{i+1}) + \lambda_0 2^{i+2} (h_{i+1} - r_i) &\Rightarrow \lambda_0 2^{i+2} (r_i - h_{i+1}) \\ &\in \partial F(h_{i+1}) \end{aligned} \quad (25)$$

式(25)等价于

$$h_{i+1} \in \partial F^*(\lambda_0 2^{i+2} (r_i - h_{i+1})) \quad (26)$$

其中 F^* 是 F 的 Legendre-Fenchel 变换, 它是定义在闭凸集 $\{\theta : \|\theta\|_* \leq 1\}$ 上的指示函数. 式(26)可以改写为:

$$0 \in r_i - h_{i+1} - r_i + \partial F^*(\lambda_0 2^{i+2} (r_i - h_{i+1}))$$

这说明 $r_{i+1} = r_i - u_{i+1} - v_{i+1} - \omega_{i+1} = r_i - h_{i+1}$ 是极小化问题

$$\inf_r \left\{ \frac{1}{2} \|r_i - r\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\lambda_0 2^{i+2}} F^*(\lambda_0 2^{i+2} r) \right\} \quad (27)$$

的解. 根据 F^* 的定义, 极小化问题(27)可以改写成

$$\inf_r \|r_i - r\|_{L^2}^2 \text{ s.t. } \|r\|_* \leq \frac{1}{\lambda_0 2^{i+2}} \text{ 结论得证.}$$

定理 1 设 $f \in L^2$, 则多尺度变分分解(22)的剩余分量 r_k 满足 $\|r_k\|_* \rightarrow 0 (k \rightarrow +\infty)$.

证明 通过引理 1, 有 $\|r_k\|_* \leq \frac{1}{\lambda_0 2^{k+1}}$, 则可得当 $k \rightarrow +\infty$ 时, $\|r_k\|_* \rightarrow 0$.

3 模型求解

本文采用交替迭代算法求解极小化问题(23).

• v 和 ω 固定, 通过下面的极小化问题求解 u

$$\inf_{u \in BV} \{ \|u\|_{BV} + \lambda_0 2^{k+1} \|r_k - u - v - \omega\|_{L^2}^2 \} \quad (28)$$

• u 和 ω 固定, 通过下面的极小化问题求解 v

$$\inf_{v \in G} \{ \lambda_0 2^{k+1} \|r_k - u - v - \omega\|_{L^2}^2 + \|v\|_G \} \quad (29)$$

• u 和 v 固定, 通过下面的极小化问题求解 ω

$$\inf_{\omega \in E} \{ \lambda_0 2^{k+1} \|r_k - u - v - \omega\|_{L^2}^2 + \|\omega\|_E \} \quad (30)$$

注意为了在后续的叙述中不引起角标的混淆, 对于问题(23)中的角标 i , 在耦合问题(28)~(30)中, 本文将其换为 k . 并且为了简化符号, 记 $\lambda_k = \lambda_0 2^{k+1}$.

首先求解极小化问题(28). 采用 Chambolle 提出的对偶框架下的投影算法^[19], 极小化问题(28)的解为

$$u_{k+1} = r_k - v - \omega - \text{Proj}_{G_{1/2\lambda_k}}(r_k - v - \omega)$$

其中 $\text{Proj}_{G_{1/2\lambda_k}}(r_k - v - \omega)$ 表示 $r_k - v - \omega$ 在闭凸集 $\{\theta : \|\theta\|_G \leq 1/2\lambda_k\}$ 上的投影. 在离散条件下, 计算 $\text{Proj}_{G_{1/2\lambda_k}}(r_k - v - \omega)$ 等价于求解以下极小化问题:

$$\begin{aligned} \min_{\xi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)} \{ & \text{div}(\xi) - 2\lambda_k(r_k - v - \omega) \Big|_{L^2}^2, |\xi_{i,j}| \leq 1, i, j = 1, \\ & \dots, N \} \end{aligned} \quad (31)$$

其中 $N \times N$ 表示图像大小, $\xi = (\xi^1, \xi^2)$, $|\xi_{i,j}| = \sqrt{(\xi_{i,j}^1)^2 + (\xi_{i,j}^2)^2}$. 泛函(31)的 Euler-Lagrange 方程为

$$-\nabla(\text{div}(\xi) - 2\lambda_k(r_k - v - \omega))_{i,j} + a_{i,j} \xi_{i,j} = 0 \quad (32)$$

其中 $a_{i,j}$ 是 Lagrange 乘子. 根据互补松弛定理可得 $a_{i,j} > 0, |\xi_{i,j}| = 1$; 或者 $|\xi_{i,j}| < 1, a_{i,j} = 0$. 所以对于任意情况, $a_{i,j}$ 满足:

$$a_{i,j} = \left| \nabla (\operatorname{div}(\xi) - 2\lambda_k(r_k - v - \omega)) \right|_{i,j}$$

采用半隐式的固定点迭代算法求解式(32), 可得迭代格式

$$\xi^0 = \mathbf{0}, \xi_{i,j}^{n+1} = \frac{\xi_{i,j}^n + \tau (\nabla (\operatorname{div}(\xi^n) - 2\lambda_k(r_k - v - \omega)))_{i,j}}{1 + \tau \left| \nabla (\operatorname{div}(\xi^n) - 2\lambda_k(r_k - v - \omega)) \right|_{i,j}}$$

则 $\operatorname{Proj}_{G_{1,2\lambda_k}}(r_k - v - \omega) = \frac{1}{2\lambda_k} \operatorname{div}(\xi_{i,j}^{n+1})$.

接着求解极小化问题(29). 本文利用 $\|v\|_{H^{-1}}$ 近似 $\|v\|_G^{[10]}$, 极小化问题(29)可以近似为

$$\inf_v \{ \lambda_k \|r_k - u - v - \omega\|_L^2 + \|\nabla(\Delta^{-1}v)\|_L^2 \} \quad (33)$$

泛函式(33)的 Euler-Lagrange 方程为

$$\Delta^{-1}v = \lambda_k(u + v + \omega - r_k) \Rightarrow v = \Delta(\lambda_k(u + v + \omega - r_k)) \quad (34)$$

采用梯度下降法, 方程(34)的解等价于下面发展方程的稳态解,

$$\begin{cases} v_i = \Delta(\lambda_k(u + v + \omega - r_k)) - v \\ v(x, y, 0) = 0, \frac{\partial(u + v + \omega - r_k)}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (35)$$

采用半隐式有限差分格式求解方程(35), 则迭代格式为

$$v^0 = 0, v_{i,j}^{n+1} = \frac{v_{i,j}^n + \tau(\lambda_k(\Delta(u + \omega + v^n - r_k)))_{i,j}}{1 + \tau}$$

最后求解极小化问题(30). 由 2.1 节的讨论, 采用小波软阈值(阈值为 $4\lambda_k\gamma_2$)算法, 它的解近似为

$$\omega = r_k - u - v - \operatorname{WST}(r_k - u - v, 4\lambda_k\gamma_2)$$

其中 WST 小波软阈值算子, 定义为 $\operatorname{WST}(g, \delta) = \sum_{|\hat{g}_{i,j}| \geq \delta} \hat{g}_{i,j} \varphi_{i,j}$, 其中 $g = \sum \hat{g}_{i,j} \varphi_{i,j}$ 为 g 的小波分解.

4 实验结果

本节对提出的多尺度(BV, G, E)变分分解(22)进行实验论证. 实验中, 参数选择如下: 步长 $\tau = 0.05$, 初始尺度参数 $\lambda_0 = 0.005$, 小波阈值 $\gamma_2 = \sqrt{2\log_{10}N}^{[14]}$. 本文采用峰值信噪比(PSNR), 信噪比(SNR)和平均结构相似性指标(MSSIM)^[20]来衡量恢复重建图像的质量. 图 1 给出了测试噪声图像(加入方差为 20 的高斯噪声), 测试图像的 SNR, PSNR 与 MSSIM 值见表 1.

表 1 测试噪声图像的 SNR, PSNR 与 MSSIM 值

	SNR(dB)	PSNR(dB)	MSSIM
Barbana 图像	16.6547	22.2023	0.7212
照相机图像	16.0346	21.7453	0.6965
蝴蝶图像	16.2375	21.9876	0.7153



图 1 测试图像

图 2 是利用多尺度(BV, G, E)分解对噪声 Barbana 图像的实验结果. 第一列显示了多尺度结构分量 $\sum_{i=0}^k u_i$, 它可以看成多尺度的恢复图像. 随着 k 值的增加, 图像的结构部分(例如 Barbana 的面部器官)被逐渐的恢复. 第二列显示了多尺度纹理分量 $\sum_{i=0}^k v_i + 100$ (加上 100 是为了提高视觉效果). 从实验结果可以看出震荡比较剧烈的小尺度(粗糙)纹理被首先提取出来. 随着尺度参数 λ 的增加, 大尺度纹理被逐渐的提取出来. 第三列显示了多尺度结构与纹理的和. 它可以看成是真实图像的多尺度的重建. 重建图像的 SNR, PSNR

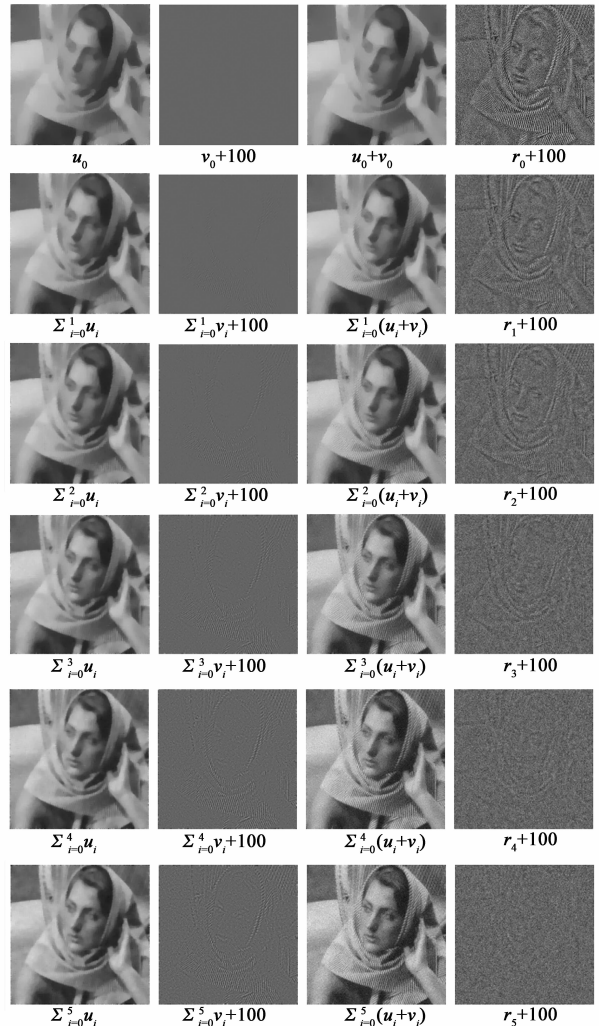


图 2 利用多尺度(BV, G, E)分解的多尺度 Barbana 图像恢复和重建

和 MSSIM 值(分别见表 2,表 3 和表 4)随着尺度参数的增加而逐渐增大,并且在 $k = 4$ 时取得最大值.随着 k 值的继续增加,SNR, PSNR 和 MSSIM 值反而减小.这是由于纹理提取的尺度到达噪声的尺度,使得部分噪声被当作纹理被 v_i 提取,从而导致重建图像质量降低.第四列是剩余分量 $r_k + 100$ 的可视化图像.可以清楚的看出,随着 k 值的增加,剩余分量中包含越来越少的图像信息.这种现象符合本文在 2.3 节对多尺度变分分解收敛性的讨论.

表 2 多尺度重建 Barbana 图像的 SNR 值比较

k	分层(BV, L^2)分解	迭代(BV, L^2)分解	小波分解	本文模型
0	16.5437	16.6743	16.3546	16.7890
1	16.9467	16.9356	16.7245	17.5423
2	17.5345	17.4674	17.4534	18.6232
3	18.4534	18.2356	17.7478	19.7232
4	19.6758	19.3465	18.5643	19.8231
5	19.3423	19.2345	18.6743	19.3321

表 3 多尺度重建 Barbana 图像的 PSNR 值比较

k	分层(BV, L^2)分解	迭代(BV, L^2)分解	小波分解	本文模型
0	21.3423	21.4534	21.2457	22.1723
1	22.1376	22.0362	21.7754	22.9362
2	22.9867	22.9756	22.2845	24.1245
3	23.5645	23.5437	23.4532	25.2456
4	24.6784	24.5467	23.9254	25.3567
5	24.4425	24.4234	24.1462	24.7643

表 4 多尺度重建 Barbana 图像的 MSSIM 值比较

k	分层(BV, L^2)分解	迭代(BV, L^2)分解	小波分解	本文模型
0	0.6012	0.6134	0.6245	0.6134
1	0.6765	0.6547	0.6783	0.6856
2	0.7445	0.7453	0.7432	0.7634
3	0.8245	0.8234	0.8233	0.8432
4	0.8534	0.8362	0.8312	0.8743
5	0.8513	0.8354	0.8423	0.8324

为了体现本文模型的优势,与分层(BV, L^2)分解^[15],迭代(BV, L^2)分解^[16]以及小波分解^[21]进行了对比实验.利用这三个模型进行多尺度重建的结果分别见图 3,图 4 和图 5.从实验结果可以看出,随着分解次数的增加,图像的细节部分(例如 Barbana 的面部器官与头巾的纹理)被逐渐的重建出来.重建图像的 SNR, PSNR 和 MSSIM 值分别见表 2,表 3 和表 4.这些指标值随着分解次数的增加首先逐渐增大,到达某个最大值之后,又逐渐减小.这是由于多层分解重建了图像的细节,

使得重建图像的 SNR, PSNR 和 MSSIM 值增加.但是随着分解的继续,一部分噪声也会随着图像细节被重建到图像中,而导致 SNR, PSNR 和 MSSIM 值减小.通过比较重建图像的 SNR, PSNR 和 MSSIM 的最大值,本文提出的多尺度(BV, G , E)分解较这三个分解模型具有一定的优势.



图 3 利用分层(BV, L^2)分解的多尺度 Barbana 图像重建



图 4 利用迭代(BV, L^2)分解的多尺度 Barbana 图像重建



图 5 利用小波分解的多尺度 Barbana 图像重建

为了体现本文模型的适应性,对另外两幅自然图像进行了对比实验,一幅是边缘信息丰富的照相机图

像,另外一幅是含有弱边缘和少量纹理信息的蝴蝶图像.利用四个模型对这两幅噪声图像进行重建的实验结果分别见图 6.为了节约版面,仅仅显示了 SNR, PSNR 和 MSSIM 指标值(见表 5)取得最大值时的重建结果.从实验结果可以直观的看出,这四个模型都能较好的去除图像的噪声,重建图像的重要结构信息.但是本文模型,分层(BV, L^2)分解和迭代(BV, L^2)分解在保持图像边缘的能力上要优于小波分解.通过 SNR, PSNR 和 MSSIM 值量化比较,本文模型较其他三个模型更具优势.



图 6 利用分层(BV, L^2)分解、迭代(BV, L^2)分解、小波分解与多尺度(BV, G, E)分解的多尺度照相机图像与蝴蝶图像的重建

表 5 重建蝴蝶图像与照相机图像的 SNR、PSNR 与 MSSIM 值比较

	照相机图像			蝴蝶图像		
	SNR	PSNR	MSSIM	SNR	PSNR	MSSIM
分层(BV, L^2)分解	18.6745	24.5534	0.8736	18.4532	24.3454	0.8465
迭代(BV, L^2)分解	18.5634	24.4373	0.8724	18.3867	24.2578	0.8447
小波分解	18.1754	24.1532	0.8234	18.0656	24.0623	0.8245
本文模型	18.9247	24.8347	0.8957	18.7781	24.8656	0.8734

5 结论

本文提出了变分框架下的图像多尺度恢复和重建的思想.基于这种思想,首先提出一个新的单参数(BV, G, E)三元分解模型,然后将单参数选为一个变化的二进制序列,得到多尺度的变分分解模型,并且证明了此模型的收敛性.最后将此模型应用到图像的多尺度恢复和重建,取得较好的实验效果.但是本文还存在一些不足之处:(1)本文模型仅仅考虑尺度因素,而忽略了一些纹理和噪声其他的特征,例如方向,粗糙度,颜色等.所以不能很干净的分离它们,导致重建图像到达一定尺度后质量会下降;(2)在模型求解时,本文采用负 Hilbert-Sobolev 空间 H^{-1} 来近似 G 空间,这种近似实际上还是有很大的误差,这可能导致纹理提取的不精确.所以我们的后续研究工作主要将集中在这两个方面.

参考文献

[1] Szolgay D, Sziranyi T. Adaptive image decomposition into car-

toon and texture parts optimized by the orthogonality criterion [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2012, 21(8): 3405 - 3415.

[2] 白键,冯象初.基于曲线波变换的图像分解[J].电子学报,2007,35(1):123 - 126.

Bai Jian, Feng Xiang-chu. Image decomposition by curvelet transform[J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(1): 123 - 126. (in Chinese)

[3] Moisan L. Periodic plus smooth image decomposition[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2011, 39(2): 161 - 179.

[4] Lu C W, Song G X. Image decomposition using adaptive regularization and div(BMO) [J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2011, 22(2): 358 - 364.

[5] 李敏,徐晨.基于 OSV 分解的图像多尺度特征表示[J].电子学报,2012,40(4):769 - 772.

Li Ming, Xu Cheng. A multiscale image representation based on OSV decomposition[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(4): 769 - 772. (in Chinese)

[6] Meyer Y. Oscillating Patterns in Image Processing and Nonlinear Evolution Equations [M]. Boston: American Mathematical Society, 2002.

[7] Gilles J, Meyer Y. Properties of BV-G structures + textures decomposition models. application to road detection in satellite images[J]. IEEE Trans on Image Processing, 2010, 19(11): 2793 - 2800.

[8] Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D, 1992, 60(1-4): 259 - 268.

[9] Vese L A, Osher S. Image denoising and decomposition with total variation minimization and oscillatory functions[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2004, 20(1-2): 7 - 18.

[10] Osher S, Solé A, Vese L A. Image decomposition and restoration using total variation minimization and the H^{-1} norm[J]. SIAM Multiscale Modeling and Simulation, 2003, 1(3): 349 - 370.

[11] Lieu L H, Vese L A. Image restoration and decomposition via bounded total variation and negative Hilbert-Sobolev spaces [J]. Applied Mathematics and Optimization, 2008, 58(2): 71 - 88.

[12] Aujol J F, Aubert G, Blanc-Féraud L, et al. Image decomposition into a bounded variation component and an oscillating component[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2005, 22(1): 71 - 88.

[13] Le T M, Vese L A. Image decomposition using total variation and div(BMO) [J]. SIAM Multiscale Modeling and Simulation, 2005, 4(2): 390 - 423.

[14] Aujol J F, Chambolle A. Dual norms and image decomposition

- models[J]. International Journal of Computer Vision, 2005, 63(1): 85 – 104.
- [15] Tadmor E, Nezzar S, Vese L A. A multiscale image representation using hierarchical (BV, L^2) decompositions[J]. SIAM Multiscale Modeling and Simulation, 2004, 2(4): 554 – 579.
- [16] Osher S, Burger M, Goldfarb D, et al. An iterative regularization method for total variation-based image restoration[J]. SIAM Multiscale Modeling and Simulation, 2005, 4(2): 460 – 489.
- [17] Tang L M, He C J. Multiscale texture extraction with hierarchical (BV, Gp, L^2) decomposition[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2013, 45(2): 148 – 163.
- [18] Strong D, Chan T. Edge-preserving and scale-dependent properties of total variation regularization[J]. Inverse Problems, 2003, 19(6): 165 – 187.
- [19] Chambolle A. An algorithm for total variation minimization and applications[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2004, 20(1-2): 89 – 97.
- [20] Brunet D, Vrscay E R, Wang Z. On the mathematical properties of the structural similarity index[J]. IEEE Trans on Image Processing, 2012, 21(4): 1488 – 1499.
- [21] Li M, Sun X L, Xu C. Wavelet shrinkage based variational image decomposition[J]. Advanced Materials Research, 2012, (532-533): 1021 – 1025.

作者简介



唐利明 男, 1978 年出生于湖北恩施, 博士研究生, 主要从事基于偏微分方程与变分理论的图像处理方面的研究工作。

E-mail: tlmes78@163.com



黄大荣 男, 1978 年出生于湖北恩施, 教授, 博士, 主要从事优化理论, 可靠性分析, 智能交通图像处理等方面的研究工作。