

# 信号压缩与重构的交替方向外点持续法

杨真真<sup>1,2</sup>, 杨震<sup>2</sup>

(1. 南京邮电大学通信与信息工程学院, 江苏南京 210003;

2. 南京邮电大学“宽带无线通信与传感网技术”教育部重点实验室, 江苏南京 210003)

**摘要:** 针对压缩感知(Compressed Sensing, CS)中信号重构的  $l_1$ -正则化问题中的  $l_1$ -正则项非光滑, 求解比较困难, 提出了交替方向外点持续法(Alternating Direction Exterior Point Continuation Method, ADEPCM). 该算法首先将信号的稀疏域的  $l_1$ -正则化问题通过变量分裂(Variable Splitting, VS)技术转化为与之等价的约束优化问题; 然后采用一步 Gauss-Seidel 思想, 对优化问题中的变量最小化, 并采用持续的思想更新罚参数, 重构出信号的稀疏系数; 最后进行正交反变换, 重构出原始信号. 并将 ADEPCM 用于图像重构, 进行了仿真实验及对实验结果进行了分析. 实验结果表明: 与现有的一些重构算法相比, ADEPCM 具有稍高的峰值信噪比(Peak Signal to Noise Ratio, PSNR)和更快速的收敛速度.

**关键词:** 交替方向外点持续法; 外点法; 信号重构; 压缩感知

**中图分类号:** TN912.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2014)03-0485-06

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.03.010

## Alternating Direction Exterior Point Continuation Method for Signal Compression and Reconstruction

YANG Zhen-zhen<sup>1,2</sup>, YANG Zhen<sup>2</sup>

(1. College of Communication & Information Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing, Jiangsu 210003, China;

2. Key Lab of Broadband Wireless Communication and Sensor Network Technology, Ministry of Education, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing, Jiangsu 210003, China)

**Abstract:** Alternating direction exterior point continuation method (ADEPCM) is proposed to solve the  $l_1$ -regularization problem, which is the classic problem of signal compression and reconstruction for compressed sensing (CS). The first step of ADEPCM is to express the  $l_1$ -regularization problem of the sparse coefficient in the transform domain as an equivalent constrained optimization problem by using variable splitting (VS) technology. Then, by introducing the penalty function, the two variables are alternately minimized by Gauss-Seidel method, and the penalty variable is updated by a continuation scheme, and then the sparse coefficient in the transform domain is reconstructed. Finally, the original signal is reconstructed by the orthogonal inverse transform. And the experimental simulations demonstrate that the ADEPCM algorithm yields a slightly higher peak signal to noise ratio (PSNR) reconstructed image as well as a much faster convergence rate as compared to some existing reconstruction algorithms.

**Key words:** alternating direction exterior point continuation method; exterior point method; signal reconstruction; compressed sensing

## 1 引言

在 Nyquist 采样定理框架下, 宽带模拟信号的模数转换无疑需要很高的采样频率, 这对信号处理的能力提出了很高的软硬件要求. 另一方面, 为了便于传输和处理, 需要对采集到的信号进行压缩, 即在信号编码的过

程中采集到的大量的信号会被认为不重要而抛弃, 浪费了大量的资源. 在这种情况下, 具有稀疏特性的信号的采样和处理的压缩感知(Compressed Sensing, CS)<sup>[1,2]</sup>理论应运而生.

CS 理论是基于信号在某个域的稀疏性而建立的线性、非自适应的新的采样理论, 该理论在对信号进行采

样的同时也对其进行压缩,打破了传统的先采样后压缩的框架.在 CS 理论框架下,采样速率不再取决于信号的带宽,而取决于信息在信号中的结构和内容<sup>[3]</sup>.

CS 理论的核心问题之一是信号的重构问题,如何设计收敛速度快、重构性能好、鲁棒性强的重构算法一直是 CS 理论重构算法研究的目标.国内外已有大量学者对 CS 理论的重构算法进行了研究与改进<sup>[4~7]</sup>.

CS 理论重构信号最常用的模型为  $\ell_1$ -正则化问题模型,目前关于求解  $\ell_1$ -正则化问题重构信号的领域已经有一些研究成果<sup>[8~12]</sup>.文献[8]用内点法(Interior Point Method, IPM)来解决  $\ell_1$ -正则化问题,经典的 IPM 仅对小规模数据问题重构效果较好,对于大规模数据问题用预处理共轭梯度方向作为其搜索方向,达到了快速处理的目的,但其重构的性能大大下降.文献[9]提出了稀疏重构的梯度投影(Gradient Projection for Sparse Reconstruction, GPSR)算法,用基于两点步长的梯度投影法来解决与  $\ell_1$ -正则化问题等价的有边界约束二次规划问题,进而得到原问题的解. GPSR 算法可以较好地用来重构含噪声信号,但当信号噪声强度较小时,该算法求解的不是原问题的精确解,且其收敛速度太慢.其他用来解决  $\ell_1$ -正则化问题的算法还有两点步长迭代收缩阈值(Two step Iterative Shrinkage/Thresholding, TwIST)算法<sup>[10]</sup>、分裂增广 Lagrangian 收缩算法(Split Augmented Lagrangian Shrinkage Algorithm, SALSA)<sup>[11,12]</sup>等.

外点法(Exterior Point Method, EPM)因方法简单、实现方便、且可以用来求解导数不存在的约束优化问题等优点而备受研究者的青睐,得到了广泛的应用.本文提出一种新的交替方向外点持续法 ADEPCM 来解决  $\ell_1$ -正则化问题,该算法实现方便.交替最小化的思想解决了  $\ell_1$ -正则项非光滑求解困难的问题,持续策略更新罚函数避免了因罚参数取得不当而导致算法的复杂度高或重构精度低的缺点,且其在迭代过程中不需要更新乘子,计算效率更高. ADEPCM 算法首先将信号的稀疏域的  $\ell_1$ -正则化问题通过变量分裂技术转化为约束优化问题;然后引入罚函数,采用一步 Gauss-Seidel 思想对罚函数中的变量通过交替最小化的思想固定一个变量更新另一个变量,且采用持续策略更新罚参数,从而重构出信号的稀疏系数;最后进行正交反变换,重构出原始信号.

## 2 压缩感知基本理论

任给信号  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$ , 在  $N \times 1$  维正交基向量  $\Psi = \{\varphi_i | i = 1, 2, \dots, N\}$  上的稀疏表示为

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N \theta_i \varphi_i = \Psi \Theta \quad (1)$$

当系数  $\Theta$  满足  $\|\Theta\|_0 = K (K \ll N)$  (其中  $\|\Theta\|_0$  表示向量  $\Theta$  的零范数,即  $\Theta$  中非零元素的个数)时,称  $\Theta$  是  $K$ -

稀疏的(当  $\mathbf{x}$  本身是  $K$ -稀疏的时,令  $\Psi = \mathbf{I}$  即可).

若  $\Theta$  是  $K$ -稀疏的,可以用一个与稀疏基  $\Psi$  不相关的矩阵  $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{M \times N}$  (其中  $M \ll N$ ) 对  $\Theta$  进行线性测量,得到观测向量  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^M$  为

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\Theta + \mathbf{e} \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{e}$  为噪声(当信号不含有噪声时,令  $\mathbf{e} = 0$  即可),  $\mathbf{A}$  称为观测矩阵.

最常用的重构方法是求解如下的  $\ell_1$ -正则化问题

$$\min_{\Theta} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\Theta - \mathbf{y}\|_2^2 + \tau \|\Theta\|_1 \quad (3)$$

其中  $\tau \in [0, \infty)$  为正则化参数(当  $\tau = 0$  即为信号不含噪声时的重构模型),求解该优化问题即可得到稀疏系数  $\Theta$ ,再代入式(1)即可得到原始信号  $\mathbf{x}$ .

## 3 交替方向外点持续法(ADEPCM)

CS 理论重构信号最常用的模型为  $\ell_1$ -正则化问题,该问题包括一个二次项和一个  $\ell_1$ -正则项,其中的二次项用来衡量信号的均方误差,  $\ell_1$ -正则项用来衡量信号的稀疏度.  $\ell_1$ -正则化问题通过正则化参数在二者之间寻求一个折中,以实现信号更好地重构.本文通过 ADEPCM 算法对  $\ell_1$ -正则化问题进行求解来实现对信号的重构.

### 3.1 变量分裂(VS)技术

$\ell_1$ -正则化问题式(3)是一个无约束最优化问题,采用变量分裂技术,通过引入一个新的辅助变量  $\Xi$ ,问题式(3)可以转化为与之等价的如下的约束优化问题

$$\min_{\Theta, \Xi} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\Theta - \mathbf{y}\|_2^2 + \tau \|\Xi\|_1 \quad (4)$$

$$\text{s. t.} \quad \Theta = \Xi$$

$\ell_1$ -正则化问题式(3)中的  $\ell_1$ -正则项非光滑,求解比较困难,使用 VS 技术可以将无约束问题式(3)转化为约束优化问题式(4)来求解,通过交替最小化的方法问题式(4)比问题式(3)更容易求解.

### 3.2 外点法(EPM)

EPM 的迭代点一般在可行域的外部移动,随着迭代次数的增加,“惩罚”的力度也越来越大,从而迫使迭代点向可行域靠近.当约束条件不满足时,惩罚项永远为正,且离可行域越远,罚参数越大,则惩罚项和罚函数值也越大,这可看成是对于不满足约束条件情况的一种“惩罚”;反之,当约束条件满足时,不论罚参数取值多大,惩罚项始终为零,罚函数与目标函数相等,即约束条件满足时不受惩罚.

约束问题式(4)的罚函数为

$$\Gamma(\Theta, \Xi, \mu) = \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\Theta - \mathbf{y}\|_2^2 + \tau \|\Xi\|_1 + \frac{\mu}{2} \|\Theta - \Xi\|_2^2 \quad (5)$$

其中  $\mu \in [0, \infty)$  为罚参数,  $\frac{\mu}{2} \|\Theta - \Xi\|_2^2$  为惩罚项. 于是可以得到

$$\begin{pmatrix} \Theta_{k+1} \\ \Xi_{k+1} \end{pmatrix} = \arg \min_{\Theta, \Xi} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\Theta - \mathbf{y}\|_2^2 + \tau \|\Xi\|_1 + \frac{\mu}{2} \|\Theta - \Xi\|_2^2 \quad (6)$$

由于 EPM 算法不需要引入乘子变量, 因而计算效率更高. 求解问题式(6)即可以得到问题式(4)的解, 这样即得到信号在  $\Psi$  域的稀疏系数, 从而重构出原始信号.

### 3.3 交替方向外点持续法(ADEPCM)

实际应用中, 罚参数  $\mu$  的选择十分重要. 如果  $\mu$  取的过大, 则在罚函数最小化的过程中增加了计算量, 导致算法的复杂度高、收敛速度慢; 如果  $\mu$  取的过小, 则罚函数的极小点远离原约束问题式(4)的解, 使得求得的解可能不是原问题的最优解, 从而导致算法的重构精度下降. 针对这个问题, 本文采用文献[13]中的持续策略(continuation strategy)更新罚参数  $\mu$ , 设定一个初始罚参数, 通过放大系数, 产生一个递增的序列, 在每步迭代时更新罚参数, 且为了避免  $\mu$  过大, 导致算法发散, 给定罚参数  $\mu$  的一个上界, 即其还需要满足  $\mu \leq \mu_{\max}$ . 于是有

$$\begin{pmatrix} \Theta_{k+1} \\ \Xi_{k+1} \end{pmatrix} = \arg \min_{\Theta, \Xi} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\Theta - \mathbf{y}\|_2^2 + \tau \|\Xi\|_1 + \frac{\mu_k}{2} \|\Theta - \Xi\|_2^2 \quad (7)$$

$$\mu_{k+1} = \min\{\eta \mu_k, \mu_{\max}\} \quad (8)$$

其中  $\eta > 1$  为放大系数.

持续策略使得迭代开始时罚参数  $\mu$  的值较小, 算法收敛的速度很快, 随着  $\mu$  的增大, 把前一次迭代的结果作为下一次迭代的初始值使得算法的迭代更加精确. 故采用持续策略比使用固定的  $\mu$  算法的收敛速度更快, 且重构精度更高<sup>[13]</sup>, 即外点持续法比外点法的收敛速度更快, 重构效果更好.

因问题式(7)的第二项  $\tau \|\Xi\|_1$  非光滑, 求解比较困难, 采用一步 Gauss-Seidel 思想, 引入交替最小化的思想, 对该问题进行求解, 即利用交替最小化的思想求解问题式(7).

对于变量  $\Theta$  有

$$\Theta_{k+1} = \arg \min_{\Theta} \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\Theta - \mathbf{y}\|_2^2 + \frac{\mu_k}{2} \|\Theta - \Xi_k\|_2^2 \quad (9)$$

对  $\frac{1}{2} \|\mathbf{A}\Theta - \mathbf{y}\|_2^2 + \frac{\mu_k}{2} \|\Theta - \Xi_k\|_2^2$  关于  $\Theta$  求偏导数并令其等于零, 得

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\Theta - \mathbf{y}) + \mu_k(\Theta - \Xi_k) = \mathbf{0} \quad (10)$$

从而得到

$$\Theta = (\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \mu_k\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A}^T\mathbf{y} + \mu_k\Xi_k) \quad (11)$$

当矩阵  $\mathbf{A}$  为随机矩阵时,  $(\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \mu_k\mathbf{I})^{-1}$  的计算量为  $O(N^3)$ , 为了减少其计算量, 加快算法的收敛速度, 根据 Sherman-Morrison-Woodburg 定理<sup>[14]</sup>得

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \mu_k\mathbf{I})^{-1} &= \frac{1}{\mu_k} \left( \mathbf{I} + \mathbf{A}^T \frac{1}{\mu_k} \mathbf{A} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\mu_k} \left[ \mathbf{I} - \mathbf{A}^T \frac{1}{\mu_k} \left( \frac{1}{\mu_k} \mathbf{I} + \frac{1}{\mu_k} \mathbf{A} \mathbf{A}^T \frac{1}{\mu_k} \right)^{-1} \frac{1}{\mu_k} \mathbf{A} \right] \\ &= \frac{1}{\mu_k} \left[ \mathbf{I} - \mathbf{A}^T (\mu_k\mathbf{I} + \mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

为了减少  $(\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \mu_k\mathbf{I})^{-1}$  的计算量, 也可以仅取  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  的主对角线元素, 即用  $\text{diag}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$  代替  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ , 则  $\text{diag}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) + \mu_k\mathbf{I}$  为对角矩阵, 其求逆的运算量将大大减少, 使得其收敛速度也大大加快, 但其重构精度也大大降低, 所以本文采用式(12)来减少  $(\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \mu_k\mathbf{I})^{-1}$  的计算量.

问题式(9)是一个严格凸问题, 其解唯一, 从而有

$$\Theta_{k+1} = \frac{1}{\mu_k} \left[ \mathbf{I} - \mathbf{A}^T (\mu_k\mathbf{I} + \mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} \right] (\mathbf{A}^T\mathbf{y} + \mu_k\Xi_k) \quad (13)$$

对于变量  $\Xi$  有

$$\begin{aligned} \Xi_{k+1} &= \arg \min_{\Xi} \tau \|\Xi\|_1 + \frac{\mu_k}{2} \|\Xi - \Theta_{k+1}\|_2^2 \\ &= \text{soft}(\Theta_{k+1}, \tau/\mu_k) \end{aligned} \quad (14)$$

其中  $\text{soft}(\cdot, \text{Th}) = \text{sgn}(\cdot) \max\{|\cdot| - \text{Th}, 0\}$  为阈值为 Th 的软阈值函数,  $\text{sgn}(\cdot)$  为符号函数. 此即为用迭代收缩阈值(Iterative Shrinkage/Thresholding, IST)算法<sup>[15]</sup>对变量  $\Xi$  进行更新.

综上所述, 利用 ADEPCM 求解优化问题式(4)的算法步骤为

**步骤 1** 初始化: 设置正则化参数  $\tau > 0$ , 放大系数  $\eta > 1$ , 初始罚参数  $\mu_0 > 0$ , 最大罚参数  $\mu_{\max} > 0$ , 初始辅助变量  $\Xi_0$ , 迭代次数  $k = 0$ ;

**步骤 2** 更新稀疏系数变量  $\Theta$ :

$$\Theta_{k+1} = \frac{1}{\mu_k} \left[ \mathbf{I} - \mathbf{A}^T (\mu_k\mathbf{I} + \mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} \right] (\mathbf{A}^T\mathbf{y} + \mu_k\Xi_k);$$

**步骤 3** 更新辅助变量  $\Xi$ :

$$\Xi_{k+1} = \text{soft}(\Theta_{k+1}, \tau/\mu_k);$$

**步骤 4** 更新罚参数  $\mu$ :

$$\mu_{k+1} = \min\{\eta \mu_k, \mu_{\max}\};$$

**步骤 5** 判断是否满足终止条件, 满足则停止; 否则, 令  $k = k + 1$ , 转步骤 2.

步骤 2 的计算量为  $O(MN^2)$ , 步骤 3 的计算量为  $O(MN)$ , 步骤 4 的计算量为  $O(1)$ , 迭代过程中 ADEPCM 算法的主要计算量在算法步骤 2, 故 ADEPCM 算法求解优化问题式(4)的每步迭代的计算量约为  $O(MN^2)$ .

**引理<sup>[15]</sup>** 任意给定初始点, IST 算法产生的序列

$\{\Xi_k\}$  收敛于  $\Xi^*$ .

**定理** 任意给定初始点, ADEPCM 生成的序列

$\left\{ \begin{pmatrix} \Theta_k \\ \Xi_k \end{pmatrix} \right\}$  收敛于问题式(7)的解  $\begin{pmatrix} \Theta^* \\ \Xi^* \end{pmatrix}$ .

证明:优化问题式(7)是一个严格凸问题,故其解

若存在则唯一,于是 ADEPCM 生成的序列  $\left\{ \begin{pmatrix} \Theta_k \\ \Xi_k \end{pmatrix} \right\}$  必收

敛于  $\begin{pmatrix} \Theta^* \\ \Xi^* \end{pmatrix}$ , 且满足

$$\Theta^* = \frac{1}{\mu_k} [I - A^T (\mu_k I + AA^T)^{-1} A] (A^T y + \mu_k \Xi^*)$$

$$\Xi^* = \text{soft}(\Theta^*, \tau/\mu_k)$$

又有引理知道序列  $\{\Xi_k\}$  收敛于  $\Xi^*$ , 故序列  $\{\Theta_k\}$  收敛

于  $\Theta^*$ . 因此, ADEPCM 生成的序列  $\left\{ \begin{pmatrix} \Theta_k \\ \Xi_k \end{pmatrix} \right\}$  收敛于问题

式(7)的解  $\begin{pmatrix} \Theta^* \\ \Xi^* \end{pmatrix}$ .

## 4 实验结果及分析

为了验证本文提出的 ADEPCM 重构算法的性能, 用图像进行了仿真实验. 将二维图像信号按行展开成一维信号, 并把展成的一维信号分别进行分段重构, 每一行信号作为一段信号进行压缩感知采样, 定义图像信号压缩感知的压缩比为  $r = \frac{m}{n}$ , 其中,  $n$  为每段信号的数目,  $m$  为其相应的观测数目.

实验对象为 Lena 图像 (大小为  $256 \times 256$ ), 正交基  $\Psi$  为小波基 db3, 观测矩阵  $A$  为服从高斯分布的随机矩阵. 仿真实验的运行平台是主频 1.60GHz 的双核 CPU 计算机, 32 位的 XP 操作系统和 MATLAB7.0 的仿真实验软件. 分别采用峰值信噪比 (Peak Signal to Noise Ratio, PSNR) (单位为 dB) 和运行时间 (单位为 s) 作为衡量算法的重构性能和收敛速度的指标. 重复进行 10 次实验, 各种算法的峰值信噪比 PSNR 和运行时间均为 10 次实验的平均结果. 将 ADEPCM 与文献 [8~12] 中的经典的 CS 中通过求解  $\ell_1$ -正则化问题来重构信号的 IPM 算法、GPSR 算法、TwIST 算法、SALSA 的重构性能和收敛速度进行比较与分析. 理论上, 每步迭代时, IPM 算法和 GPSR 算法的复杂度均为  $O(N^3)$ , ADEPCM 算法和 SALSA 算法的复杂度均为  $O(MN^2)$ , 因  $M \ll N$ , 所以后两种算法的收敛速度远快于前两种算法的收敛速度.

本文图像重构的模型为  $\ell_1$ -正则化问题, 通过引入新的辅助变量  $\Xi$ , 该优化问题可以转化为与之等价的严格凸优化问题, 而对于该严格凸优化问题, 其解存在并且唯一, 于是图像重构的模型为  $\ell_1$ -正则化问题的解也存在并且唯一, 所以对于求解该问题的重构模型的

重构算法稳定性均会很好.

### 4.1 无噪声环境实验

为了便于更好地对各种算法的重构效果进行观察, 我们对理想无噪声环境下的 Lena 图像的原图像及压缩比  $r = 0.5$  时各种算法重构的 Lena 图像的面部均进行放大, 其放大的面部结果分别如图 1 所示:

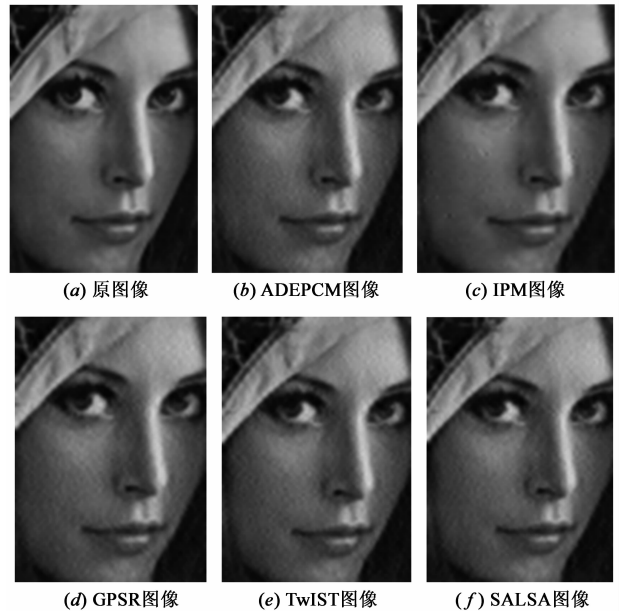


图1 无噪声环境下的原图像及各种算法重构的图像的面部

由图 1 可以看出, 在理想无噪声环境下, 当压缩比  $r = 0.5$  时, 各种算法均能较好地重构图像. 即该情况下, ADEPCM 可以用来重构图像, 从而验证了该条件下 ADEPCM 的有效性.

为了更直接地验证理想无噪声环境下 ADEPCM 算法重构图像的性能, 改变图像压缩感知的压缩比, 各种重构算法在不同压缩比条件下重构 Lena 图像的 PSNR (单位为 dB) 如表 1 所示:

表 1 无噪声环境下各种重构图像的 PSNR

算法	压缩比				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
ADEPCM	31.626	32.238	33.701	34.379	35.739
IPM	30.980	31.932	33.104	34.351	35.342
GPSR	31.147	32.005	33.206	34.367	35.262
TwIST	31.598	32.144	32.786	33.474	34.268
SALSA	31.596	32.112	32.706	33.385	34.279

由表 1 可以看出, 理想无噪声环境下, 随着压缩比  $r$  值的增大, 各种算法重构出的图像的峰值信噪比 PSNR 均增大. 且在相同压缩比条件下, ADEPCM 算法重构图像的 PSNR 均稍高于其他算法 (IPM 算法、GPSR 算法、TwIST 算法、SALSA) 重构图像的 PSNR, 即 ADEPCM

算法重构 Lena 图像的效果最好。

各种重构算法在不同压缩比条件下重构 Lena 图像的运行时间(单位为 s)如表 2 所示。

表 2 无噪声环境下各种重构图像的运行时间

算法	压缩比				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
ADEPCM	3.437	3.758	3.906	4.594	5.812
IPM	40.107	51.054	50.989	54.698	60.671
GPSR	38.016	48.089	48.532	56.025	58.896
TwIST	20.671	22.629	23.563	24.066	26.141
SALSA	2.901	3.375	3.752	3.963	4.247

由表 2 可以看出,理想无噪声环境下,随着压缩比  $r$  值的增大,各种算法重构出的图像所需的运行时间均增大.且在相同压缩比条件下,ADEPCM 算法重构图像的运行时间远小于除 SALSA 之外的其他算法(IPM 算法、GPSR 算法、TwIST 算法)重构图像的运行时间。

理想无噪声环境下,对 Fruits 图像(大小为  $256 \times 256$ )、Cameraman 图像(大小为  $256 \times 256$ )、Peppers 图像(大小为  $256 \times 256$ )、Lena 图像(大小为  $512 \times 512$ )等其他图像也进行了仿真实验,也得到类似于表 1、表 2 的结论.虽然 SALSA 重构图像的运行时间小于 ADEPCM 重构图像的运行时间,但其重构出的图像的 PSNR 低于 ADEPCM 重构出的图像的 PSNR.综合考虑重构图像的峰值信噪比 PSNR 和运行时间,理想无噪声环境下 ADEPCM 算法重构图像的性能最好。

#### 4.2 含噪声环境实验

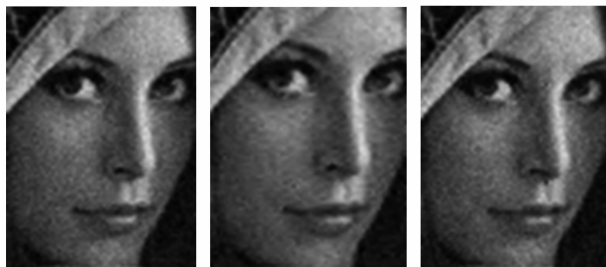
对 Lena 图像的原图像加入均值为 0,方差为  $\sigma^2 = 0.001$  的高斯噪声,为了便于更好地对各种算法重构的



(a) 含噪声图像

(b) ADEPCM 图像

(c) IPM 图像



(d) GPSR 图像

(e) TwIST 图像

(f) SALSA 图像

图 2 含噪声图像及各种算法重构的图像的面部

图像进行观察,将含噪声的 Lena 图像及各种算法重构的图像的面部分别进行放大,其放大的面部结果分别如图 2 所示。

由图 2 可以看出,在含噪声环境下,各种算法均能较好地重构图像,从而验证了该条件下,ADEPCM 重构含噪声图像的可行性。

为了更直接地验证 ADEPCM 算法重构含噪声图像的性能,改变加入的噪声的程度(即改变高斯噪声的方差),各种重构算法在不同噪声程度下(高斯噪声的方差不同)重构 Lena 图像的 PSNR(单位为 dB)如表 3 所示。

表 3 含噪声环境下各种重构图像的 PSNR

算法	噪声方差				
	0.001	0.005	0.01	0.05	0.1
ADEPCM	32.126	28.005	25.758	19.879	17.768
IPM	31.281	26.604	24.097	18.096	15.758
GPSR	32.038	27.685	25.646	18.883	17.537
TwIST	31.969	27.953	25.601	19.082	17.491
SALSA	32.042	27.771	24.531	18.937	15.763

由表 3 可以看出,随着加入的高斯噪声的方差的增大,各种算法重构出的图像的峰值信噪比 PSNR 均减小.在相同噪声程度下,ADEPCM 算法重构图像的 PSNR 稍高于其他算法(IPM 算法、GPSR 算法、TwIST 算法、SALSA)重构图像的 PSNR,即 ADEPCM 算法重构含噪声的 Lena 图像的效果最好。

各种重构算法在不同噪声程度下重构图像的运行时间(单位为 s)如表 4 所示。

表 4 含噪声环境下各种重构图像的运行时间

算法	噪声方差				
	0.001	0.005	0.01	0.05	0.1
ADEPCM	5.255	5.464	5.496	5.863	6.292
IPM	58.896	60.167	61.249	62.307	63.064
GPSR	56.375	58.239	59.996	60.925	62.817
TwIST	24.031	30.352	38.281	42.399	48.420
SALSA	4.695	5.454	7.218	11.852	12.406

由表 4 可以看出,随着加入的高斯噪声的方差的增大,各种算法重构出的图像所需的运行时间均增大.且在相同的噪声程度下,当噪声强度比较小(当  $\sigma^2 = 0.001, 0.005$ )时 ADEPCM 算法重构图像的运行时间远小于除 SALSA 之外的其他算法(IPM 算法、GPSR 算法、TwIST 算法)重构图像的运行时间;当噪声强度比较大(当  $\sigma^2 = 0.01, 0.05, 0.1$ )时,ADEPCM 算法重构图像的运行时间远小于其他算法(IPM 算法、GPSR 算法、TwIST 算法、SALSA)重构图像的运行时间.随着噪声强度的增

加, ADEPCM 算法的优越性更加突出, 这主要是由于 ADEPCM 算法使用持续策略更新罚参数改善算法的收敛速度和重构精度, 而 SALSA 算法用更新乘子变量来改善算法的收敛速度和重构性能, 当噪声强度比较大时, 罚参数对算法的影响更大, 导致此时 ADEPCM 算法的收敛速度快于 SALSA 算法的收敛速度。

含噪声情况下, 对 Fruits 图像(大小为  $256 \times 256$ )、Cameraman 图像(大小为  $256 \times 256$ )、Peppers 图像(大小为  $256 \times 256$ )、Lena 图像(大小为  $512 \times 512$ )等其他图像也进行了仿真实验, 也得到类似于表 3、表 4 的结论。综合考虑重构含噪声图像的峰值信噪比、PSNR 和运行时间, ADEPCM 算法重构含噪声图像的性能最好。

## 5 结束语

本文针对 CS 中信号重构的  $\ell_1$ -正则化问题中的  $\ell_1$ -正则项非光滑, 求解比较困难的问题, 提出了一种交替方向外点持续算法 ADEPCM。该算法首先将信号的稀疏域的  $\ell_1$ -正则化问题通过 VS 技术转化为与之等价的约束优化问题; 然后采用一步 Gauss-Seidel 思想, 对优化问题中的变量最小化, 并采用持续的思想更新 EPM 算法中的罚参数, 重构出信号的稀疏系数; 最后进行正交反变换, 重构出原始信号。实验结果表明: ADEPCM 与文献[8~12]中的重构算法相比, 具有稍高的峰值信噪比和更快速的收敛速度。下一步我们将设计更有效、复杂度更低、更具鲁棒性的重构算法, 以此来改善重构信号的质量, 增强系统的实用性, 以便更好地将压缩感知理论应用于信号处理领域。

## 参考文献

- [1] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289 - 1306.
- [2] Donoho D L, Tsaig Y. Extensions of compressed sensing[J]. Signal Processing, 2006, 86(3): 533 - 548.
- [3] 焦李成, 杨淑媛, 刘芳, 等. 压缩感知回顾与展望[J]. 电子学报, 2011, 39(7): 1651 - 1662.  
Jiao Li-cheng, Yang Shu-yuan, Liu Fang, et al. Development and prospect of compressive sensing[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(7): 1651 - 1662. (in Chinese)
- [4] 杨真真, 杨震, 李雷. 语音重构的 DCT 域加速 Landweber 迭代硬阈值算法[J]. 信号处理, 2012, 28(2): 172 - 178.  
Yang Zhen-zhen, Yang Zhen, Li Lei. Accelerated Landweber iterative hard thresholding algorithm in the DCT domain for speech reconstruction[J]. Signal Processing, 2012, 28(2): 172 - 178. (in Chinese)
- [5] 杨真真, 杨震. 压缩感知中基于快速交替方向乘子法的  $\ell_0$ -正则化信号重构[J]. 电子与信息学报, 2013, 35(4):

826 - 831.

- Yang Zhen-zhen, Yang Zhen.  $\ell_0$ -regularisation signal reconstruction based on fast alternating direction method of multipliers for compressed sensing[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2013, 35(4): 826 - 831. (in Chinese)
- [6] 季云云, 杨震. 脉冲噪声环境下高斯稀疏信源贝叶斯压缩感知重构[J]. 电子学报, 2013, 41(2): 363 - 370.  
Ji Yun-yun, Yang Zhen. Bayesian compressed sensing for Gaussian sparse signals in the presence of impulsive noise[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(2): 363 - 370. (in Chinese)
- [7] Montefusco L B, Lazzro D. An iterative  $\ell_1$ -based image restoration algorithm with an adaptive parameter estimation [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2012, 21(4): 1676 - 1686.
- [8] Kim S J, Koh K, Lustig M, et al. An interior-point method for large-scale  $\ell_1$ -regularized least squares[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2007, 1(4): 606 - 617.
- [9] Figueiredo M A T, Nowak R D, Wright S J. Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems[J]. Journal of Selected Topics in Signal Processing: Special Issue on Convex Optimization Methods for Signal Processing, 2007, 1(4): 586 - 598.
- [10] Bioucas-Dias J, Figueiredo M. A new TwIST: two-step iterative shrinkage/thresholding algorithms for image restoration [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(12): 2992 - 3004.
- [11] Afonso M, Bioucas-Dias J, Figueiredo M. Fast image recovery using variable splitting and constrained optimization[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2010, 19(9): 2345 - 2356.
- [12] Afonso M, Bioucas-Dias J, Figueiredo M. An augmented Lagrangian approach to the constrained optimization formulation of image inverse problems[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2011, 20(3): 681 - 695.
- [13] Hale E T, Yin W, Zhang Y. Fixed-point continuation for  $\ell_1$ -minimization: methodology and convergence[J]. SIAM Journal on Optimization, 2008, 19(3): 1107 - 1130.
- [14] 袁亚湘. 最优化理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 1997. 12.
- [15] Beck A, Teboulle M. A fast iterative shrinkage/thresholding algorithm for linear inverse problems[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2009, 2(1): 183 - 202.

## 作者简介

杨真真 女, 1984 出生, 山东临沂人, 南京邮电大学通信与信息工程学院博士研究生。研究方向为压缩感知、现代信号处理。

E-mail: 2011010101@njupt.edu.cn

杨震 男, 1961 出生, 江苏苏州人, 南京邮电大学教授、博士生导师。研究方向为压缩感知、语音处理与现代语音通信及网络通信技术。

E-mail: yangz@njupt.edu.cn