

# 基于 Picard 迭代原理的非线性离散系统 多频输入稳态响应的计算与分析

李博江, 胡 钊, 文习山, 康基伟, 李洪江, 王战胜

(武汉大学电气工程学院, 湖北武汉 430072)

**摘 要:** 本文应用 picard 迭代原理和矩阵论中范数的理论提出了一种计算非线性离散系统多频输入稳态响应的方法, 并给出了非线性离散系统多频输入稳态响应的通解. 这种方法将一个非线性离散系统多频输入稳态响应计算问题化成计算同一个线性离散系统在不同输入下稳态响应的问题. 文章用数学推导证明给出了多频输入的非线性离散系统存在唯一稳态响应的李普希次条件, 并给出了判断一个非线性离散系统是否满足规定的李普希次条件的判定方法. 基于所构建的求解方法, 运用 MATLAB 语言编制了算法程序, 对典型实例进行了仿真计算. 大量仿真结果表明, 本文提出的方法是正确的, 且收敛速度较快.

**关键词:** 非线性离散系统; 多频输入; picard 迭代; 李普希次条件; 数学推导

**中图分类号:** TN911.7      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2013) 08-1640-07

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.08.030

## A Solution and Analysis of Steady-State Responses of the Nonlinear Discrete Systems to Multiple Input Frequencies Based on Picard Iteration Principle

LI Bo-jiang, HU Po, WEN Xi-shan, KANG Ji-wei, LI Hong-jiang, WANG Zhan-sheng

(School of Electrical Engineering, Wuhan University, Wuhan, Hubei 430072, China)

**Abstract:** In this paper, A method of computing steady-state responses of the nonlinear discrete systems to multiple input frequencies is presented by applying Picard Iteration Principle and knowledge of matrix theory and the general solutions of the nonlinear discrete systems to multiple input frequencies is given. By way of this algorithm, the steady-state responses of a nonlinear discrete system to the multiple input frequencies can be obtained by solving steady-state responses of the same linear discrete systems to different multiple input. In this paper, Lipschitz which can guarantee that there is a sole steady-state response of a nonlinear discrete system is presented through rigorous mathematical derivation and proof. The judging method is also presented to judge whether a nonlinear discrete system meet Lipschitz or not. Programs are developed using the MATLAB language based on the presented solution and plenty of typical examples are simulated to compute responses using these programs. Numerous computing results indicate that the method presented in the paper is correct and convergence is fast.

**Key words:** nonlinear discrete systems; multiple input frequencies; picard iteration; Lipschitz; mathematical derivation

## 1 引言

在复杂的电力系统中,存在着大量的非线性元件,会导致大量的非线性信号的产生.在高电压放电领域中,也存在很多非线性问题,例如放电电弧随电弧电流呈非线性变化等等.并且随着数字化技术在电力系统中的广泛应用,对离散信号的研究变得越来越重要,因此,在电力系统的理论分析中,对非线性离散系统的研究是必不可少的,又因为谐波在电力系统中广泛的存在<sup>[1-3]</sup>,所以一个经常遇到的问题就是计算一个非线性离散系统在多个频率分量输入下的稳态响应.

对于线性离散系统,已经形成了一套非常完整的理论<sup>[4,5]</sup>,但是对于非线性离散系统的研究相对比较

少<sup>[6]</sup>,其研究成果大多数都集中在非线性离散系统稳态响应的渐近行为的问题上,而对非线性离散系统稳态响应的计算方法的研究,因为难度较大,研究成果就更少了.又因为是非线性离散系统,所以对于在多频率的信号输入下,计算非线性离散系统稳态响应便不能应用叠加原理,使得计算非常困难<sup>[7,8]</sup>. Nilesh P Telang 和 Louis R Hunt 两人曾经提出过利用 picard 迭代原理计算非线性离散系统稳态响应的方法<sup>[9]</sup>,但是他们只是粗略地对这个方法进行了介绍,并没有对在这种计算方法下,多频输入的非线性离散系统稳态响应的存在性和唯一性进行理论分析,而且他们只是针对单一频率的信号输入的情况,并没有研究多频输入的情况,因此,他们所作的研究并不完整.

本文在现有研究的基础上,对非线性离散系统多频输入稳态响应的计算方法做了更深层次的研究,提出了一种利用 picard 迭代原理计算多频输入的非线性离散系统稳态响应的方法,并给出了非线性离散系统多频输入稳态响应的通解,解决了多频信号输入下,非线性离散系统稳态响应的计算方法问题,并用数学推导给出了在运用此方法的前提下,非线性离散系统存在唯一稳态响应的李普希次条件,并给出了判断一个非线性离散系统是否满足该李普希次条件的判定依据,使这套计算方法更加完善。

## 2 多频输入的非线性离散系统稳态响应的计算方法

本文介绍一种运用 picard 迭代的原理,利用计算机编程来计算多频输入的非线性离散系统稳态响应的方法。

一个非线性离散系统可以用一个非线性差分方程来表示,所以,计算一个非线性离散系统稳态响应的问题就是解一个非线性差分方程的问题.不失一般性,多频输入的非线性差分方程都可以写成下面这个通式,这个通式可以表示所有的非线性离散系统。

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + g[y(n), y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-M), x(n), x(n-1), \dots, x(n-R)] \quad (1)$$

其中,  $x(n)$  是非线性差分方程的输入.  $x(n)$  要为有限值,即  $x(n)$  的值不能为无穷大.  $y(n)$  是非线性差分方程的输出,即非线性差分方程的稳态解,  $M$  和  $R$  均为有限整数.  $g[y(n), y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-M), x(n), x(n-1), \dots, x(n-R)]$  为非线性部分。

运用 picard 迭代的方法来求解非线性差分方程.显然,  $y(n-1)$  只是  $y(n)$  向右移一位得到的函数,所以  $y(n-1)$  可以看成是  $y(n)$  的函数,即  $y(n-1) = f_1[y(n)]$ 。

同理,  $y(n-2)$  也可以看成是  $y(n)$  的函数,即  $y(n-2) = f_2[y(n)]$ 。

依次类推,  $y(n-M) = f_M[y(n)]$ 。

$g[y(n), y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-M), x(n), x(n-1), \dots, x(n-R)]$  可以是  $y(n), y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-M)$  这  $M+1$  项的自身或任意相互乘积后的线性组合与多频输入线性组合之和.故,根据  $Z$  变换的基本性质:

若  $y(n) = y_1(n) \cdot y_2(n)$ ,

且  $y_1(n)$  的  $Z$  变换为  $Y_1(z)$ ,  $R_1 < |z| < R_2$

$y_2(n)$  的  $Z$  变换为  $Y_2(z)$ ,  $R_3 < |z| < R_4$

$$\text{则 } Y(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c Y_1\left(\frac{z}{v}\right) Y_2(v) v^{-1} dv$$

$$R_1 R_3 < |z| < R_2 R_4$$

其中  $c$  是哑变量  $v$  平面上,  $Y_1\left(\frac{z}{v}\right)$  与  $Y_2(v)$  的公共收敛

域内环绕原点的一条反时针旋转的单封闭围线。

如果  $y(n) = y_1(n) \cdot y_2(n) \cdot y_3(n) \cdot \dots \cdot y_l(n)$ , 则可以先得  $y_1(n) \cdot y_2(n)$  的  $Z$  变换  $Y_{12}(z)$ , 再利用  $Y_{12}(z)$  和  $Y_3(z)$  求得  $y_1(n) \cdot y_2(n) \cdot y_3(n)$  的  $Z$  变换, 以此类推, 最终求得  $y(n)$  的  $Z$  变换  $Y(z)$ 。

如上所述, 便可以实现对  $g[y(n), y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-M), x(n), x(n-1), \dots, x(n-R)]$  的  $Z$  变换, 显然, 式(1)中的线性部分也能进行  $Z$  变换。

$$\text{对式(1)进行 } Z \text{ 变换, 得 } (1 - \sum_{k=1}^N a_k Z^{-k}) Y(Z) = P(Z)$$

其中  $P(Z)$  是  $g[y(n), y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-M), x(n), x(n-1), \dots, x(n-R)]$  的  $Z$  变换。

$$Y(Z) = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k Z^{-k}} P(Z)$$

对上式两边进行  $Z$  的反变换, 可得

$$y(n) = h(n) * g[y(n), y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-M), x(n), x(n-1), \dots, x(n-R)]$$

其中,  $h(n)$  是  $\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k Z^{-k}}$   $Z$  的反变换, 对应于式(1)

的线性部分. 令

$$h(n) * g[y(n), y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-M), x(n), x(n-1), \dots, x(n-R)]$$

$$= G_1[\mathbf{Y}(n), \mathbf{X}(n), x(n-1), \dots, x(n-R), n]$$

$$= G_1[\mathbf{Y}(n), \mathbf{X}(n)]$$

其中,

$$\mathbf{Y}(n) = [y(n), y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-M)]$$

$$\mathbf{X}(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-R), n]$$

即

$$y(n) = G_1[\mathbf{Y}(n), \mathbf{X}(n)]$$

又因为

$$y(n-1) = f_1[y(n)]$$

所以,  $y(n-1) = f_1\{G_1[\mathbf{Y}(n), \mathbf{X}(n)]\}$

$$= G_2[\mathbf{Y}(n), \mathbf{X}(n)]$$

同理,  $y(n-2) = f_2\{G_1[\mathbf{Y}(n), \mathbf{X}(n)]\}$

$$= G_3[\mathbf{Y}(n), \mathbf{X}(n)]$$

$$y(n-3) = f_3\{G_1[\mathbf{Y}(n), \mathbf{X}(n)]\}$$

$$= G_4[\mathbf{Y}(n), \mathbf{X}(n)]$$

⋮

$$y(n-M) = f_M\{G_1[\mathbf{Y}(n), \mathbf{X}(n)]\}$$

$$= G_{M+1}[\mathbf{Y}(n), \mathbf{X}(n)]$$

所以, 写成向量形式

$$\mathbf{Y}(n) = \mathbf{G}[\mathbf{Y}(n), \mathbf{X}(n)] \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3, \dots, G_{M+1})$

在此, 稍微对函数  $\mathbf{G}[\mathbf{Y}(n), \mathbf{X}(n)]$  作一点限制: 如果当  $\mathbf{Y}(n)$  和  $\mathbf{X}(n)$  在一定界限内, 函数  $\mathbf{G}[\mathbf{Y}(n), \mathbf{X}(n)]$  要与  $\mathbf{Y}(n)$  有同界。

运用 picard 迭代的方法来求解式(2)这个  $\mathbf{Y}(n) =$

$G[\mathbf{Y}(n), \mathbf{X}(n)]$ 非线性方程<sup>[10]</sup>.

因为初值的大小并不影响解这个非线性方程,所以不妨设初值  $\mathbf{Y}^0(n) = \mathbf{0}$ , 令

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^1(n) &= \mathbf{G}[\mathbf{Y}^0(n), \mathbf{X}(n)] \\ \mathbf{Y}^2(n) &= \mathbf{G}[\mathbf{Y}^1(n), \mathbf{X}(n)] \\ &\vdots \\ \mathbf{Y}^s(n) &= \mathbf{G}[\mathbf{Y}^{s-1}(n), \mathbf{X}(n)] \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3)$$

式(3)中,上标表示迭代次数,前面已经对函数  $\mathbf{G}[\mathbf{Y}(n), \mathbf{X}(n)]$ 做了限制,即,函数  $\mathbf{G}[\mathbf{Y}(n), \mathbf{X}(n)]$ 要与  $\mathbf{Y}(n)$ 有同界,  $\mathbf{Y}^0(n)$ 是给定的初值,也就是给定的初始状态,当然也是有界的,所以式(3)中,当  $s$  为有限值的时候,  $\mathbf{Y}^s(n)$ 也都是有限值. 现在的问题是当  $s \rightarrow \infty$  的时候,  $\mathbf{Y}^s(n)$ 还是不是有限值,即  $\mathbf{Y}^s(n)$ 是不是有一个极限值,如果  $\mathbf{Y}^s(n)$ 还是一个有限值,则这个有限值就是式(2)的解,也就是式(1)的解.

式(3)的意义在于:通过式(3)这种迭代的形式来求解非线性方程,从给定的初值  $\mathbf{Y}^0(n)$ 开始迭代,依次求出  $\mathbf{Y}^1(n), \mathbf{Y}^2(n), \dots, \mathbf{Y}^s(n)$ ,每次迭代后求出的  $\mathbf{Y}^s(n)$ 都代入下一次迭代方程中的  $\mathbf{G}$  函数里面的非线性函数部分里去,也就是说每一次迭代的方程中的非线性函数部分里面的变量都是常数,所以非线性函数部分的值也是一个常数,在这里,完全可以把  $\mathbf{Y}^s(n)$ 理解成除  $\mathbf{X}(n)$ 以外的另外一个输入,即每一次迭代中,给定的多频输入和上一次迭代求解结果共同构成输入. 因此,每一次迭代的方程只剩下线性函数部分,即,每一次迭代的方程都是线性差分方程.

换句话说,每次迭代过程中,式(1)中的  $g[y(n), y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-M), x(n), x(n-1), \dots, x(n-R)]$ 为常数(当输入给定时,输入也可以看成为一个定值). 因此,在每次迭代过程中,式(1)变为

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \text{常数} + \text{多频输入}$$

上式即是线性差分方程,可以看出,每次迭代中的线性差分方程仅输入不同.

既然每一次迭代的方程都是线性差分方程,那么,当输入为多频信号的时候,便可以利用线性系统理论的叠加原理求解多频输入方程. 也就是说,式(3)将求解一个非线性离散系统多频输入稳态响应的过程变换成了求解同一个线性离散系统在不同输入下的稳态响应的过程,因此求解更方便些.

注意:方程  $\mathbf{Y}(n) = \mathbf{G}[\mathbf{Y}(n), \mathbf{X}(n)]$ 中的函数  $\mathbf{G}$ 是由  $M+1$ 个函数  $G_1, G_2, G_3, \dots, G_{M+1}$ 组成的向量,这  $M+1$ 个函数本质上是一样的,在此,以  $G_1$ 函数为说明的对象,如前所述

$$G_1[\mathbf{Y}(n), \mathbf{X}(n)] = h(n) * g[\mathbf{Y}(n), x(n), x(n-1), \dots, x(n-R)]$$

$h(n)$ 是  $\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k Z^{-k}}$  的  $Z$  的反变换,所以  $h(n)$ 就

代表了式(1)的线性部分,而变量  $\mathbf{Y}(n)$ 只是在非线性函数部分  $g[\mathbf{Y}(n), x(n), x(n-1), \dots, x(n-R)]$ 里面,所以每一次迭代过程中,前一次迭代求出的  $\mathbf{Y}^{s-1}(n)$ 只是代入方程的非线性部分里面去,而最后求出的  $\mathbf{Y}^s(n)$ 是线性部分里面的  $\mathbf{Y}(n)$ . 在文章最后的实例分析中,读者能更清楚地理解这些怎么应用.

### 3 多频输入的非线性离散系统存在唯一稳态响应的充分条件

多频输入的非线性离散系统存在唯一稳态响应的充分条件为:

$$\begin{aligned} &\| \mathbf{G}[\mathbf{Y}_1(n), \hat{\mathbf{X}}(n)] - \mathbf{G}[\mathbf{Y}_2(n), \hat{\mathbf{X}}(n)] \| \\ &\leq L \| \mathbf{Y}_1(n) - \mathbf{Y}_2(n) \| \end{aligned}$$

并且  $0 \leq L < 1$  的时候,式(2)就必有一个唯一解存在. 其中,

$$\begin{aligned} &\| \mathbf{G}[\mathbf{Y}_1(n), \hat{\mathbf{X}}(n)] - \mathbf{G}[\mathbf{Y}_2(n), \hat{\mathbf{X}}(n)] \| \\ &\leq L \| \mathbf{Y}_1(n) - \mathbf{Y}_2(n) \| \end{aligned}$$

称为李普希次条件,  $\| \mathbf{G}[\mathbf{Y}_1(n), \hat{\mathbf{X}}(n)] - \mathbf{G}[\mathbf{Y}_2(n), \hat{\mathbf{X}}(n)] \|$ 是  $\{ \mathbf{G}[\mathbf{Y}_1(n), \hat{\mathbf{X}}(n)] - \mathbf{G}[\mathbf{Y}_2(n), \hat{\mathbf{X}}(n)] \}$  的范数.  $\| \mathbf{Y}_1(n) - \mathbf{Y}_2(n) \|$ 是  $[\mathbf{Y}_1(n) - \mathbf{Y}_2(n)]$  的范数.

$\mathbf{Y}_1(n)$ 和  $\mathbf{Y}_2(n)$ 为  $\mathbf{Y}(n)$ 的任意两个不同值,  $\hat{\mathbf{X}}(n)$ 为  $\mathbf{X}(n)$ 的某一定值(因为当一个系统的输入给定的时候,  $\mathbf{X}(n)$ 也就不会变了,可以看成是一个定值).  $L$ 为一常数,称为李普希次常数.

下面给出李普希次条件是多频输入的非线性离散系统存在唯一稳态响应的充分条件的详细证明过程:

(1)先证明当满足

$$\begin{aligned} &\| \mathbf{G}[\mathbf{Y}_1(n), \hat{\mathbf{X}}(n)] - \mathbf{G}[\mathbf{Y}_2(n), \hat{\mathbf{X}}(n)] \| \\ &\leq L \| \mathbf{Y}_1(n) - \mathbf{Y}_2(n) \| \end{aligned}$$

并且  $0 \leq L < 1$  的时候,式(2)有解.

正如前面所说,当  $s \rightarrow \infty$  时,如果  $\mathbf{Y}^s(n)$ 存在一个极限值,则这个极限值就是式(2)的解.

$$\begin{aligned} \text{因为 } \mathbf{Y}^s(n) &= \mathbf{Y}^0(n) + [\mathbf{Y}^1(n) - \mathbf{Y}^0(n)] \\ &\quad + [\mathbf{Y}^2(n) - \mathbf{Y}^1(n)] + \dots \\ &\quad + [\mathbf{Y}^s(n) - \mathbf{Y}^{s-1}(n)] \end{aligned}$$

所以,如果能够证明  $\sum_{s=0}^{\infty} [\mathbf{Y}^{s+1}(n) - \mathbf{Y}^s(n)]$ 是收敛的,即是一个有限值,那么当  $s \rightarrow \infty$  的时候,  $\mathbf{Y}^s(n)$ 就是一个有限值. 要证明  $\sum_{s=0}^{\infty} [\mathbf{Y}^{s+1}(n) - \mathbf{Y}^s(n)]$ 是收敛

的,只需要证明  $\left\| \sum_{s=0}^{\infty} [\mathbf{Y}^{s+1}(n) - \mathbf{Y}^s(n)] \right\|$  是收敛的就足够了.

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}^2(n) - \mathbf{Y}^1(n) &= \mathbf{G}[\mathbf{Y}^1(n), \mathbf{X}(n)] - \mathbf{G}[\mathbf{Y}^0(n), \mathbf{X}(n)] \\ \mathbf{Y}^3(n) - \mathbf{Y}^2(n) &= \mathbf{G}[\mathbf{Y}^2(n), \mathbf{X}(n)] - \mathbf{G}[\mathbf{Y}^1(n), \mathbf{X}(n)] \\ &\vdots \\ \mathbf{Y}^{s+1}(n) - \mathbf{Y}^s(n) &= \mathbf{G}[\mathbf{Y}^s(n), \mathbf{X}(n)] - \mathbf{G}[\mathbf{Y}^{s-1}(n), \mathbf{X}(n)] \\ &\vdots \end{aligned}$$

因为目的是证明李普希次条件为充分条件,可以令

$$\begin{aligned} &\left\| \mathbf{G}[\mathbf{Y}_1(n), \hat{\mathbf{X}}(n)] - \mathbf{G}[\mathbf{Y}_2(n), \hat{\mathbf{X}}(n)] \right\| \\ &\leq L \|\mathbf{Y}_1(n) - \mathbf{Y}_2(n)\| \end{aligned}$$

并且  $0 \leq L < 1$ , 所以

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{Y}^2(n) - \mathbf{Y}^1(n)\| \\ &= \|\mathbf{G}[\mathbf{Y}^1(n), \mathbf{X}(n)] - \mathbf{G}[\mathbf{Y}^0(n), \mathbf{X}(n)]\| \\ &\leq L \|\mathbf{Y}^1(n) - \mathbf{Y}^0(n)\| \\ &\|\mathbf{Y}^3(n) - \mathbf{Y}^2(n)\| \\ &= \|\mathbf{G}[\mathbf{Y}^2(n), \mathbf{X}(n)] - \mathbf{G}[\mathbf{Y}^1(n), \mathbf{X}(n)]\| \\ &\leq L \|\mathbf{Y}^2(n) - \mathbf{Y}^1(n)\| \leq L^2 \|\mathbf{Y}^1(n) - \mathbf{Y}^0(n)\| \\ &\vdots \\ &\|\mathbf{Y}^{s+1}(n) - \mathbf{Y}^s(n)\| \\ &= \|\mathbf{G}[\mathbf{Y}^s(n), \mathbf{X}(n)] - \mathbf{G}[\mathbf{Y}^{s-1}(n), \mathbf{X}(n)]\| \\ &\leq L^s \|\mathbf{Y}^1(n) - \mathbf{Y}^0(n)\| \\ &\vdots \end{aligned}$$

因为  $\mathbf{Y}^0(n)$  是给定的初值, 所以  $\|\mathbf{Y}^1(n) - \mathbf{Y}^0(n)\| = \|\mathbf{G}[\mathbf{Y}^0(n), \mathbf{X}(n)] - \mathbf{Y}^0(n)\|$  为一个定值.

根据范数的三角不等式  $\|\mathbf{X} + \mathbf{Y}\| \leq \|\mathbf{X}\| + \|\mathbf{Y}\|$ , 所以

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{s=0}^{\infty} [\mathbf{Y}^{s+1}(n) - \mathbf{Y}^s(n)] \right\| &\leq \sum_{s=0}^{\infty} \|\mathbf{Y}^{s+1}(n) - \mathbf{Y}^s(n)\| \\ &\leq \sum_{s=0}^{\infty} L^s \|\mathbf{Y}^1(n) - \mathbf{Y}^0(n)\| \end{aligned}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} L^s \|\mathbf{Y}^1(n) - \mathbf{Y}^0(n)\| = \|\mathbf{Y}^1(n) - \mathbf{Y}^0(n)\| \sum_{s=0}^{\infty} L^s$$

因为  $0 \leq L < 1$ , 所以  $\sum_{s=0}^{\infty} L^s = 1 + L + L^2 + \dots = \frac{1}{1-L}$ ,

$$\left\| \sum_{s=0}^{\infty} [\mathbf{Y}^{s+1}(n) - \mathbf{Y}^s(n)] \right\| \leq \frac{1}{1-L} \|\mathbf{Y}^1(n) - \mathbf{Y}^0(n)\|.$$

说明  $\left\| \sum_{s=0}^{\infty} [\mathbf{Y}^{s+1}(n) - \mathbf{Y}^s(n)] \right\|$  为一个有限值, 所以

以  $\sum_{s=0}^{\infty} [\mathbf{Y}^{s+1}(n) - \mathbf{Y}^s(n)]$  也为一个有限值, 于是, 便证明了, 当  $s \rightarrow \infty$  时,  $\mathbf{Y}^s(n)$  趋向一个极限值. 如前面所说, 这个极限值就是式(2)的解.

(2)再证明式(2)只存在一个唯一的解.

运用反证法, 假设有两个不同的解  $\mathbf{Y}_1(n)$  和  $\mathbf{Y}_2(n)$ .

因此,  $\mathbf{Y}_1(n) = \mathbf{G}[\mathbf{Y}_1(n), \mathbf{X}(n)]$

$$\mathbf{Y}_2(n) = \mathbf{G}[\mathbf{Y}_2(n), \mathbf{X}(n)]$$

于是,  $\mathbf{G}[\mathbf{Y}_2(n), \mathbf{X}(n)] - \mathbf{G}[\mathbf{Y}_1(n), \mathbf{X}(n)] = \mathbf{Y}_2(n) - \mathbf{Y}_1(n)$

等式两边取范数, 得

$$\begin{aligned} &\left\| \mathbf{G}[\mathbf{Y}_2(n), \mathbf{X}(n)] - \mathbf{G}[\mathbf{Y}_1(n), \mathbf{X}(n)] \right\| \\ &= \|\mathbf{Y}_2(n) - \mathbf{Y}_1(n)\| \end{aligned} \quad (4)$$

又因为

$$\begin{aligned} &\left\| \mathbf{G}[\mathbf{Y}_2(n), \mathbf{X}(n)] - \mathbf{G}[\mathbf{Y}_1(n), \mathbf{X}(n)] \right\| \\ &\leq L \|\mathbf{Y}_2(n) - \mathbf{Y}_1(n)\| \end{aligned}$$

并且  $0 \leq L < 1$ , 所以

$$\begin{aligned} &\left\| \mathbf{G}[\mathbf{Y}_2(n), \mathbf{X}(n)] - \mathbf{G}[\mathbf{Y}_1(n), \mathbf{X}(n)] \right\| \\ &< \|\mathbf{Y}_2(n) - \mathbf{Y}_1(n)\| \end{aligned}$$

这与式(4)矛盾, 所以, 式(2)不可能存在两个不同的解, 即式(2)只存在一个唯一解.

因此, 已经证明了当满足

$$\begin{aligned} &\left\| \mathbf{G}[\mathbf{Y}_1(n), \hat{\mathbf{X}}(n)] - \mathbf{G}[\mathbf{Y}_2(n), \hat{\mathbf{X}}(n)] \right\| \\ &\leq L \|\mathbf{Y}_1(n) - \mathbf{Y}_2(n)\| \end{aligned}$$

并且  $0 \leq L < 1$  时, 式(2)存在一个唯一解.

#### 4 判断是否满足李普希次条件的方法

那么, 如何判断一个非线性差分方程是不是满足

$$\begin{aligned} &\left\| \mathbf{G}[\mathbf{Y}_1(n), \hat{\mathbf{X}}(n)] - \mathbf{G}[\mathbf{Y}_2(n), \hat{\mathbf{X}}(n)] \right\| \\ &\leq L \|\mathbf{Y}_1(n) - \mathbf{Y}_2(n)\| \end{aligned}$$

并且  $0 \leq L < 1$ .

在此, 本文采取了下述方法来解决这个问题.

当一个系统的输入被给定的时候, 这个输入已经是不会变的了, 所以我们可以把输入看成是一个常数, 因此, 式(2)可以表示成下面这个形式:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{G}(\mathbf{Y})$$

在连续系统里, 根据向量的中值定理, 令  $\mathbf{Y}_1$  和  $\mathbf{Y}_2$  是任意两个不同的向量, 它们在向量空间相应地各占据一点的位置, 一定可以在这两点的连线上找到一个点, 这个点对应的向量设为  $\mathbf{Y}_3$ , 使得

$$\mathbf{G}(\mathbf{Y}_2) - \mathbf{G}(\mathbf{Y}_1) = \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{Y}} \Big|_{\mathbf{Y}=\mathbf{Y}_3} \right) (\mathbf{Y}_2 - \mathbf{Y}_1) \quad (5)$$

$$\text{式中, } \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y(n-1)} & \frac{\partial G_1}{\partial y(n-2)} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial y(n-M)} \\ \frac{\partial G_2}{\partial y(n-1)} & \frac{\partial G_2}{\partial y(n-2)} & \cdots & \frac{\partial G_2}{\partial y(n-M)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_M}{\partial y(n-1)} & \frac{\partial G_M}{\partial y(n-2)} & \cdots & \frac{\partial G_M}{\partial y(n-M)} \end{bmatrix}$$

这个矩阵称为雅可比矩阵,  $\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{Y}} \Big|_{\mathbf{Y}=\mathbf{Y}_3}$  是当  $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_3$  时, 雅可比矩阵的值.

因为分析的是离散系统,所以不存在偏导,故对偏导离散化:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial G_M}{\partial y(n-M)}_{\text{离散}} \\ &= \frac{G_M[y(n-M)T, Z] - G_M[(y(n-M)-1)T, Z]}{T} \\ &= G_M[y(n-M), Z] - G_M[(y(n-M)-1), Z] \end{aligned}$$

(取  $T=1, Z$  为  $Y$  向量里除去  $y(n-M)$  后的向量)

$Y_3$  可以表示成下面这个式子

$$Y_3 = aY_1 + (1-a)Y_2, \quad 0 \leq a \leq 1$$

对式(5)两边取范数,得

$$\begin{aligned} \|G(Y_2) - G(Y_1)\| &= \left\| \left( \frac{\partial G}{\partial Y_{\text{离散}}} \Big|_{Y=Y_3} \right) (Y_2 - Y_1) \right\| \\ &\leq \left\| \frac{\partial G}{\partial Y_{\text{离散}}} \Big|_{Y=Y_3} \right\| \cdot \|Y_2 - Y_1\| \end{aligned}$$

所以,如果  $\left\| \frac{\partial G}{\partial Y_{\text{离散}}} \Big|_{Y=Y_3} \right\|$  的最大值小于 1 的话,那

么就可以令  $\left\| \frac{\partial G}{\partial Y_{\text{离散}}} \Big|_{Y=Y_3} \right\| = L$ , 因为一个矩阵的范数肯定是大于或等于 0 的,这样,就满足了  $0 \leq L < 1$ , 也满足了李普希次条件.

所以,通过判断  $\left\| \frac{\partial G}{\partial Y_{\text{离散}}} \Big|_{Y=Y_3} \right\|$  的最大值是不是大于 1, 就可以判断该非线性差分方程是不是满足

$$\begin{aligned} & \|G[Y_1(n), \hat{X}(n)] - G[Y_2(n), \hat{X}(n)]\| \\ & \leq L \|Y_1(n) - Y_2(n)\| \end{aligned}$$

且  $0 \leq L < 1$ . 可以看出,非线性差分方程各项的系数,特别是非线性函数部分的系数,不宜过大,不然的话,方程的解可能会发散.

## 5 流程图

流程图如图 1 所示.

## 6 实例分析

运用 MATLAB 语言编制了算法程序,对多个典型实例进行了计算分析,下述分析中的计算结果图的横坐标都为  $n$ ,纵坐标都为  $y(n)$ .

(1) 对多频输入的非线性差分方程进行求解

$$y(n) = 0.3y(n-1) + 0.1y(n-1)^2 + 0.2y(n-2)^3 + 0.4 \left( \cos \frac{\pi n}{4} + \cos \frac{\pi n}{2} + \cos \frac{3\pi n}{4} \right)$$

进行求解. 式中:

$$y(n-1)^2 \text{ 即为 } [y(n-1)]^2$$

$$y(n-2)^3 \text{ 即为 } [y(n-2)]^3$$

首先,令初值  $Y^0(n) = 0$ .

于是,第一次迭代的方程为:

$$y^1(n) = 0.3y^1(n-1) + 0.1y^0(n-1)^2 + 0.2y^0(n-2)^3$$

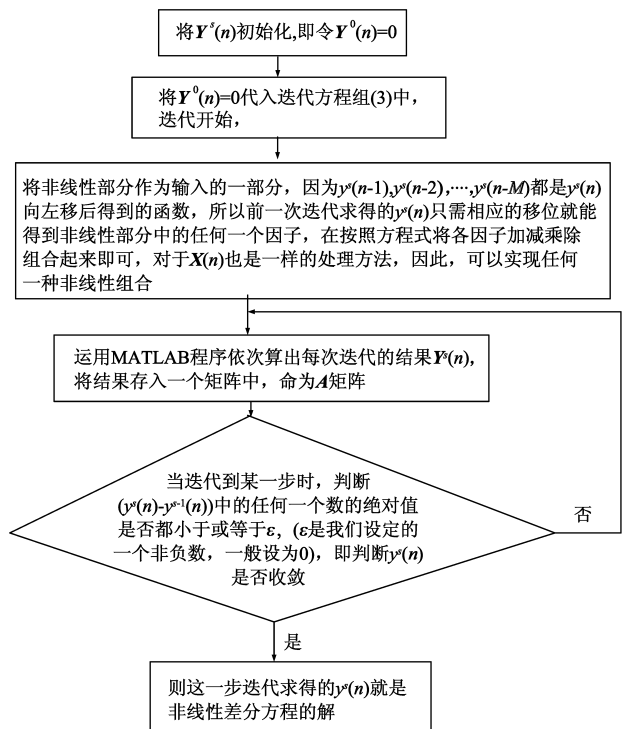


图 1 流程图

$$+ 0.4 \left( \cos \frac{\pi n}{4} + \cos \frac{\pi n}{2} + \cos \frac{3\pi n}{4} \right)$$

因为初值  $Y^0(n) = 0$ , 所以  $0.1y^0(n-1)^2$  和  $0.2y^0(n-2)^3$  两项均为 0, 故, 上式变为:

$$y^1(n) = 0.3y^1(n-1)$$

$$+ 0.4 \left( \cos \frac{\pi n}{4} + \cos \frac{\pi n}{2} + \cos \frac{3\pi n}{4} \right)$$

上式即为线性方程, 用计算机解出  $y^1(n)$ .

第二次迭代的方程为:

$$y^2(n) = 0.3y^2(n-1) + 0.1y^1(n-1)^2 + 0.2y^1(n-2)^3$$

$$+ 0.4 \left( \cos \frac{\pi n}{4} + \cos \frac{\pi n}{2} + \cos \frac{3\pi n}{4} \right)$$

将第一次迭代算出的  $y^1(n)$  代入上式, 上式也变为了线性方程, 用计算机解出  $y^2(n)$ .

第三次迭代的方程为:

$$y^3(n) = 0.3y^3(n-1) + 0.1y^2(n-1)^2 + 0.2y^2(n-2)^3$$

$$+ 0.4 \left( \cos \frac{\pi n}{4} + \cos \frac{\pi n}{2} + \cos \frac{3\pi n}{4} \right)$$

将第二次迭代算出的  $y^2(n)$  代入上式, 上式也变为了线性方程, 用计算机解出  $y^3(n)$ .

⋮

第  $s+1$  次迭代的方程为:

$$y^{s+1}(n) = 0.3y^{s+1}(n-1) + 0.1y^s(n-1)^2 + 0.2y^s(n-2)^3$$

$$+ 0.4 \left( \cos \frac{\pi n}{4} + \cos \frac{\pi n}{2} + \cos \frac{3\pi n}{4} \right)$$

将第  $s$  次迭代算出的  $y^s(n)$  代入上式, 上式也变成

了线性方程,用计算机解出  $y^{s+1}(n)$ .

每一次迭代的方程都是线性差分方程.依次迭代下去,直到  $y^s(n)$ 收敛为止.编写程序的时候,可以将每一次迭代所求得的  $Y^s(n)$ 都当做下一次迭代中除了  $X(n)$ 以外的另一个输入来对待.迭代到第 4 次的时候,  $y^s(n)$ 就已经收敛到一个固定的有限值了.计算结果如图 2 所示.

(2)对多频输入的非线性差分方程进行求解

$$y(n) = 0.3y(n-1) + 0.2y(n) \cdot y(n-1) \cdot y(n-2)^2 + 0.1[x(n) + x(n-1) + x(n-2)]$$

其中  $x(n) = \cos \frac{\pi n}{4} + \cos \frac{\pi n}{2} + \cos \frac{3\pi n}{4}$

当迭代到第 3 步的时候,  $y^s(n)$ 就已经收敛到一个固定的有限值了.计算结果如图 3 所示.

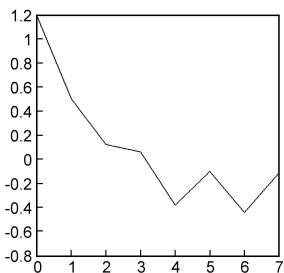


图2 计算结果

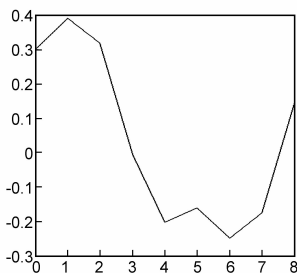


图3 计算结果

(3)将上例中的系数变大,得到一个新的方程

$$y(n) = 10y(n-1) + 20y(n) \cdot y(n-1) \cdot y(n-2)^2 + 30[x(n) + x(n-1) + x(n-2)]$$

输入  $x(n) = \cos \frac{\pi n}{4} + \cos \frac{\pi n}{2} + \cos \frac{3\pi n}{4}$

当迭代到第 4 步的时候,  $y^s(n)$ 已经发散,不会收敛到一个固定的有限值,计算结果如图 4 所示.

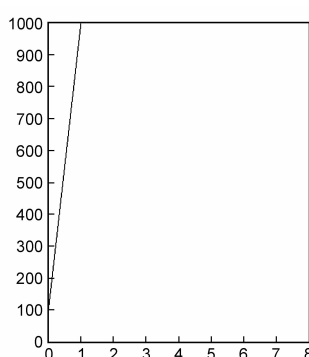


图4 计算结果

(4)图 5 所示为一铁磁谐振非线性时不变电路,其中含有用以描述实际铁芯线圈的非线性电感,线性电阻,线性电容和正弦交流电源,该电路是一个典型的二阶非自治电路,  $u_s(t) = 0.2\cos(2t) + 0.4\cos(8t)$ ,即为多频输入.

$$i(\psi) = \frac{\psi}{L} + a_3\psi^3, L > 0, a_3 > 0$$

$$c_1 = \frac{1}{RC} = 0.3, c_2 = \frac{1}{LC} = 1, c_3 = \frac{a_3}{C} = 1.4$$

电路微分方程为

$$\frac{d^2y}{dt^2} + c_1 \frac{dy}{dt} + c_2y + c_3y^3 = c_1u_s + \frac{du_s}{dt}$$

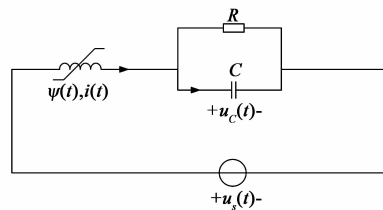


图5 电路图

该式为著名的达芬(Duffing)方程,可以用以描述电学、力学等众多科技领域中的一些物理现象.将参数代入可得:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0.3 \frac{dy}{dt} + y + 1.4y^3 = 0.3u_s + \frac{du_s}{dt}$$

对该非线性微分方程进行离散化,得到相应的差分方程为

$$\begin{aligned} &2.3y(n) - 2.3y(n-1) + y(n-2) \\ &= -1.4y^3(n) + 1.3x(n) - x(n-1) \\ &x(n) = 0.2\cos(2n) + 0.4\cos(8n) \end{aligned}$$

当迭代到第 6 步的时候,  $y^s(n)$ 已经收敛到一个固定的有限值,计算结果如图 6 所示.

将用 picard 迭代算法得出的计算结果(图 6)和用多频稳态响应的递归化算法得出的计算结果(图 7)作对比,因为多频稳态响应的递归化算法得出的结果是连续的,所以应将其离散后再进行对比,对比可见,两种方法得到的结果一致,证明了基于 picard 迭代原理的非线性离散系统多频输入稳态响应算法是正确的.

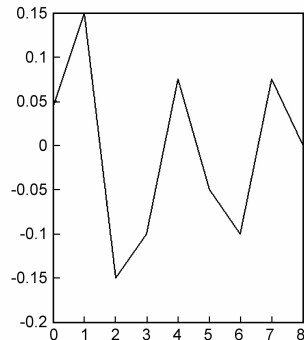


图6 用picard迭代得到的计算结果

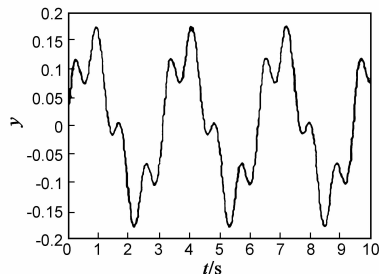


图7 多频稳态响应的递归化算法得到的计算结果

对于非线性系统的多频输入稳态响应的求解问题,国内外研究的较少.曾经有人提出过四阶龙格-库塔算法和多频稳态响应的递归化算法等方法来求解非线性系统的多频稳态响应,但是这些方法只能求解连

续系统. 在非线性和离散系统的多频输入稳态响应求解问题上, 前人所做的研究更少. 可以看到, 本文提出的算法可以很好地求解多频输入下, 非线性离散系统的稳态响应, 且收敛速度较快.

## 7 结论

本文研究了非线性离散系统多频输入稳态响应的一种计算方法, 这是一种利用 picard 迭代原理的解法, 这种解法可以解满足本文规定的李普希次条件的任意的非线性离散系统, 并给出了非线性离散系统多频输入稳态响应的通解. 这种解法的实质就是把求解一个非线性离散系统多频输入稳态响应通过 picard 迭代化成求解同一个线性离散系统在不同输入下的稳态响应, 这种解法有三个优点: 第一, 因为线性离散系统比非线性离散系统容易解, 所以这种解法更具有可行性; 第二, 因为这种解法把求解一个非线性离散系统化成了依次求解同一个线性离散系统在不同输入下的稳态响应, 所以对于多频输入, 可以应用线性系统的叠加原理进行求解, 这很好的解决了多频输入的问题; 第三, 这种解法可以很方便地用计算机来实现. 多次计算结果证明, 该算法在非线性和离散系统多频输入稳态响应计算中是非常有效的, 并且收敛速度较快.

## 参考文献

- [1] 王冠. 电力系统谐波分析的元件模型和系统仿真[D]. 杭州: 浙江大学, 2003.  
Wang Guan. Element Modeling and System Simulation for Power System Harmonics[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2003. (in Chinese)
- [2] 赵永秀. 基于 SRFFT 算法的电力系统谐波分析的研究[D]. 西安: 西安科技大学, 2003.  
Zhao Yong-xiu. The Research of Power System Harmonic Analysis Based on SRFFT Algorithm[D]. Xian: Xi'an University of Science And Technology, 2003. (in Chinese)
- [3] 胡钊, 陈允平. 多项式非线性系统多频输入稳态响应的计算[J]. 电子学报, 2007, 35(2): 315 - 319.  
Hu Po, Cheng Yun-ping. An algorithm for computing steady-state responses of nonlinear polynomial systems to multiple input frequencies[J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(2): 315 - 319. (in Chinese)
- [4] 胡钊. 具有维纳-哈默斯坦模型结构非线性系统的一种辨识方法[J]. 电子学报, 2009, 37(9): 1907 - 1912.

- [5] Meadows B K, Heath T H. Nonlinear antenna technology[J]. Proceedings of the IEEE, 2002, 90(5): 882 - 897.
- [6] Solomou M, Rees D. System modeling and controller design in the presence of nonlinear distortions[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2007, 56(3): 1049 - 1057.
- [7] 吕虹, 张爱雪. 基于母函数的非线性反馈函数及其子序列研究[J]. 电子学报, 2012, 40(10): 2127 - 2132.  
Lv Hong, Zhang Ai-xue. Study of the non-linear feedback functions and a class subsequence based on the root-functions[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(10): 2127 - 2132. (in Chinese)
- [8] 李作川, 张宇. 混沌滤波器对水声信号非线性动力学特性的影响[J]. 电子学报, 2011, 39(10): 2378 - 2381.  
Li Zuo-chuan, Zhang Yu. Influence of chaotic IIR filter on non-linear dynamic characteristic of underwater acoustic signal[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(10): 2378 - 2381. (in Chinese)
- [9] Nilesh P Telang, Louis R Hunt. Frequency domain computations for nonlinear Steady-State solutions[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, 49(8): 1728 - 1733.
- [10] 江泽佳. 网络分析的状态变量法[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979.

## 作者简介



李博江 男, 1988 年出生于江西南昌, 武汉大学电气工程学院博士研究生, 研究方向为电力系统过电压、电力系统稳定与控制、非线性系统控制理论与技术.

E-mail: 565052374@qq.com



胡钊 男, 1956 年出生于湖北, 博士, 武汉大学电气工程学院教授, 博士生导师, 主要研究方向为非线性系统控制理论与技术、数字信号处理等.