

电磁矢量传感器阵列信号波达角估计的模 R 投影 MUSIC

李 阳, 张建秋

(复旦大学信息科学与工程学院电子工程系, 上海 200433)

摘 要: 为了充分利用电磁矢量传感器阵列数据中存在的多维结构, 本文探讨了具有多维数据结构的电磁矢量传感器阵列多模张量模型的建立, 以及模 R 信号子空间的定义, 提出一种基于模 R 信号子空间投影的 MUSIC 算法. 分析表明: 由于模 R 投影方法可充分利用电磁矢量传感器阵列中的多维结构信息, 从而可提高信号子空间的估计精度, 进而可使 MUSIC 算法的性能得以改善. 计算机的仿真研究验证了模 R 投影 MUSIC 算法明显优于传统 MUSIC 方法.

关键词: 波达角估计; 阵列信号处理; 电磁矢量传感器

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2014)01-0107-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.01.017

Mode- R Projection MUSIC for Direction Finding with Electromagnetic Vector-Sensor Array

LI Yang, ZHANG Jian-qiu

(Department of Electronic Engineering, Fudan University, Shanghai 200433, China)

Abstract: This paper proposes a multidimensional (multi-mode) tensor model for the electromagnetic vector-sensor (EMVS) array to make full use of the multidimensional structure of the data. The mode- R signal subspace is defined based on this model. With the projection to the mode- R signal subspaces, a novel algorithm, which incorporates the refined signal subspace and the traditional MUSIC algorithm, is then presented. The proposed technique exploits the inherent multidimensional structure information for increased parameter estimation accuracy. Simulations show the superiority of the proposed algorithm to the traditional one.

Key words: direction-of-arrival estimation; array signal processing; electromagnetic vector-sensor

1 引言

电磁矢量传感器(EMVS)包含同点分布但相互正交的电偶极子和电流环^[1], 单个阵元具有多个输出, 所以称之为“矢量”传感器. 研究表明电磁矢量阵列能提高波达角(DOA)估计精度、感知信号极化, 而且结构更加紧凑. 目前, 许多标量阵列信号处理中的 DOA 估计方法已成功推广到矢量阵列^[2~6]. 考虑到传感器矢量输出的特点, 近年来一部分工作集中在采用高维代数对矢量传感器阵列进行建模, 比如超复数、四四元数、几何代数、双四元数等^[7~10], 以便对阵元的矢量输出统一处理. 针对电磁矢量传感器的子天线单元之间的互耦, K T Wong 等提出将这些子天线单元平移分开的思路, 并发展了一系列参数估计的方法, 不仅减轻了互耦的影响, 还扩大了天线的孔径, 提高了参数估计的精度^[11,12].

本文是以张量作为工具对电磁矢量传感器阵列信

号进行建模. 众所周知, 矢量传感器阵列数据具有多维结构, 例如: 单个传感器能进行矢量输出, 阵列的空间平移不变结构, 在时间维度上可连续采样等. 传统的信号处理方法是使用一个列矢量来表示同一时刻的采样数据, 这样的描述方法称为长矢量模型. 当用矩阵代数对长矢量模型进行处理时^[1,5,6], 不便于洞察和利用矢量阵列中的多维结构信息. 研究表明: 多维测量数据可以用张量完美地建模, 测量数据中的多维结构与张量的各模进行关联, 从而利用张量数据分析方法充分挖掘矢量阵列中的多维结构信息, 张量数据分析的方法已经成功地运用到多维谐波恢复问题^[13]、MIMO 雷达^[14]等中. 文献[15]最早在矢量阵列信号处理中引入张量方法并提出一种矢量 MUSIC 算法, 文献[16]证明该算法和传统的 MUSIC 算法等价. 文献[16,17]进一步给出了矢量传感器阵列的三阶张量模型, 并且提出了一种双模 MUSIC 算法, 利用多维结构信息提高了参数估计的性能. 但是

文献[16]中方法能够估计信号数目上限为 6, 而且矢量阵列中的多维结构常不止三阶, 因此, 有必要建立更一般的多模张量模型.

本文首先建立电磁矢量传感器阵列的多模张量模型, 在此基础上定义了模 R 信号和噪声子空间, 提出一种基于模 R 信号子空间投影的 MUSIC 算法. 分析表明: 模 R 投影方法利用了矢量传感器阵列中的结构信息, 从而可提高信号子空间估计精度, 进而可使 MUSIC 算法的性能得以改善.

2 张量基础

为了便于讨论和读者理解, 本节简要介绍基本的张量运算^[18]. N 阶复数张量 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ 可视为一个 N 维数组, 其元素可由 N 个索引确定, 比如 a_{i_1, i_2, \dots, i_N} .

2.1 张量外积

张量 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$ 和 $\mathbf{B} \in \mathbf{C}^{J_1 \times J_2 \times \dots \times J_N}$ 的外积定义为 $\mathbf{C} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B}$, 即

$$c_{i_1, \dots, i_M, j_1, \dots, j_N} = a_{i_1, \dots, i_M} b_{j_1, \dots, j_N} \quad (1)$$

张量外积定义式(1)本质上与 Kronecker 积一致, 不同的是前者将结果排成一个多维数组, 而后者排成一个更大的矩阵.

2.2 模 R 展开

$\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$, 索引集合 $R = \{r_1, r_2, \dots, r_K\}$ 和 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_L\}$ 是全体索引集合 $\{1, 2, \dots, N\}$ 的一个划分, 将张量 \mathbf{A} 的索引 R 映射到行, 索引 C 映射到列, 得到的矩阵称为张量 \mathbf{A} 的模 R 展开, 记为 $[\mathbf{A}]_{(R)(C)}$, 简记为 $[\mathbf{A}]_{(R)}$.

2.3 模 n 乘积

张量 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$ 和矩阵 $\mathbf{U} \in \mathbf{C}^{J_n \times I_n}$ 的模 n 乘积是一个新的 N 阶张量, 记为 $\mathbf{B} = \mathbf{A} \times_n \mathbf{U}$, 定义为:

$$b_{i_1, \dots, j_n, \dots, i_N} = \sum_{i_n} a_{i_1, \dots, i_n, \dots, i_N} b_{j_n, i_n} \quad (2)$$

类似地可以定义模 R 乘法, $R = \{i_r, \dots, i_p\}$, $\mathbf{V} \in \mathbf{C}^{i_r \times \dots \times i_p \times \dots \times i_N}$, 模 R 乘积 $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times_R \mathbf{V}$ 定义为:

$$c_{i_1, \dots, i_r, \dots, i_p, \dots, i_N} = \sum_{i_r, \dots, i_p} a_{i_1, \dots, i_r, \dots, i_p, \dots, i_N} v_{i_r, \dots, i_p} \quad (3)$$

模 n 乘积是模 R 乘积的特例.

2.4 张量缩并积

张量 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{I_1 \times \dots \times I_M}$ 和 $\mathbf{B} \in \mathbf{C}^{J_1 \times \dots \times J_N}$ 的 p 和 q 维的维度相等, 即 $I_p = J_q$, 此时可以定义 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 在 p, q 两维的缩并积 $\mathbf{C} = \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle_{(p, q)}$, 定义为

$$c_{i_1, \dots, i_{p-1}, i_{p+1}, \dots, i_M, j_1, \dots, j_{q-1}, j_{q+1}, \dots, j_N} = \sum_{i_p} a_{i_1, \dots, i_p, \dots, i_M} b_{j_1, \dots, j_p, \dots, j_N} \quad (4)$$

2.5 模 n 连接

张量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的模 n 连接 $\mathbf{C} = \mathbf{A} \sqcup_n \mathbf{B}$ 定义为

$$[\mathbf{C}]_{(n)} = [[\mathbf{A}]_{(n)}^T \quad [\mathbf{B}]_{(n)}^T]^T \quad (5)$$

其中下标 (n) 表示张量的模 n 展开, 上标 T 表示矩阵转置.

2.6 模 R 乘积的矩阵展开

下面的恒等式描述了模 R 乘积与矩阵乘积之间的关系, 设 $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{I_1 \times \dots \times I_N}$, $R_i, i = 1, \dots, p$ 是 $\{1, \dots, N\}$ 的一个划分, 则

$$\begin{aligned} & [\mathbf{A} \times_{R_1} \mathbf{V}^{(R_1)} \times_{R_2} \mathbf{V}^{(R_2)} \dots \times_{R_p} \mathbf{V}^{(R_p)}]_{(R_i)} \\ &= \mathbf{M}_1 [\mathbf{V}^{(R_i)}]_{(R_i)} [\mathbf{A}]_{(R_i)} ([\mathbf{V}^{(R_{i+1})}]_{(R_{i+1})} \otimes \dots \\ & \quad \otimes [\mathbf{V}^{(R_p)}]_{(R_p)} \otimes [\mathbf{V}^{(R_1)}]_{(R_1)} \otimes \dots \\ & \quad \otimes [\mathbf{V}^{(R_{i-1})}]_{(R_{i-1})})^T \mathbf{M}_2 \end{aligned} \quad (6)$$

其中 \mathbf{M}_1 和 \mathbf{M}_2 是置换矩阵, 由 $R_i, i = 1, \dots, p$ 中元素的顺序决定. 不失一般性, 在后文的讨论中均假设模 R 划分后的矩阵展开的元素位置均经过了恰当的置换^[19].

3 电磁矢量传感器阵列的多模张量模型

矢量传感器阵列中的多维结构包括空间平移不变性, 传感器的矢量输出, 还有时间维的采样等. 具有多维结构的矢量传感器阵列如图 1 所示.

考虑单个远场窄带极化信号源入射至阵列中的第 l 个矢量传感器, 其输出可表示为^[1]:

$$\mathbf{z}_l = q_l \mathbf{V}(\theta, \varphi) \mathbf{h}(\gamma, \eta) s(t) \quad (7)$$

其中 q_l 表示信号到达传感器的相位延迟, $\mathbf{V}(\theta, \varphi)$ 和 $\mathbf{h}(\gamma, \eta)$ 分别为空域响应矩阵和极化矢量, $s(t)$ 为 t 时刻的信号采样. $q_l, \mathbf{V}(\theta, \varphi)$, 和 $\mathbf{h}(\gamma, \eta)$ 分别定义如下^[1]:

$$q_l = e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{u}^T \mathbf{p}_l}, \quad (8)$$

$$\mathbf{V}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} -\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\sin\theta\sin\varphi \\ 0 & \cos\theta \\ \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ -\cos\theta & 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\mathbf{h}(\gamma, \eta) = \begin{bmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma e^{j\eta} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

其中 $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ 分别为信号源的俯仰角和方位角, $\gamma \in [0, \pi/2]$, $\eta \in [-\pi, \pi]$ 分别为极化幅角和极化相位差异角, $\mathbf{u} = [\cos\theta\cos\varphi \quad \cos\theta\sin\varphi \quad \sin\theta]^T$ 为信号源方向矢量, $\mathbf{p}_l = [x_l \quad y_l \quad z_l]^T$ 为第 l 个传感器的位置矢量. 一般情况下, 当 N_s 个阵元构成的子阵具有空间 $N_x \times N_y \times N_z$ 的均匀平移不变性时 (如图 1 所示), 测量数据可以用一个大小为 $N_s \times N_x \times N_y \times N_z \times p$ 的 5 阶张量表示, 其中 $p \in [1, 6]$ 表示矢量传感器的维数, $p = 6$ 时称为完全矢量传感器, $p < 6$ 时称为不完全

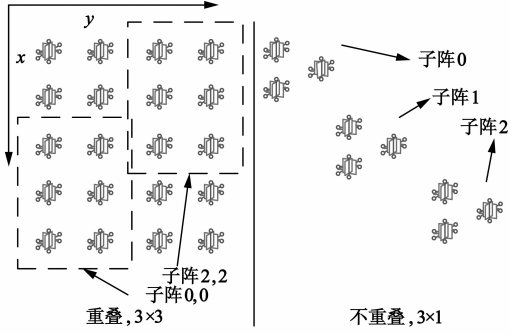


图1 具有多维结构的电磁矢量传感器阵列示意图

矢量传感器.那么 d 个远场窄带极化源入射时的张量模型可表示为:

$$\mathbf{Z}(t) = \sum_{k=1}^d (\mathbf{q}_s^k \circ \mathbf{q}_x^k \circ \mathbf{q}_y^k \circ \mathbf{q}_z^k \circ \mathbf{g}^k) s_k(t) + \mathbf{N}(t) \quad (11)$$

其中 $\mathbf{N}(t)$ 为加性噪声, $\mathbf{g}^k = \mathbf{V}(\theta_k, \varphi_k) \mathbf{h}(\gamma_k, \eta_k)$, \mathbf{q}_j^k , $j = s, x, y, z$ 分别为子阵及 x, y, z 方向的相位导向矢量

$$\mathbf{q}_s^k = [e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{p}_1^T \mathbf{u}_k} \quad e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{p}_2^T \mathbf{u}_k} \quad \cdots \quad e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{p}_N^T \mathbf{u}_k}]^T, \quad (12)$$

$$\mathbf{q}_j^k = [1 \quad e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{v}_j^T \mathbf{u}_k} \quad \cdots \quad e^{j\frac{2\pi}{\lambda} (N_j-1) \mathbf{v}_j^T \mathbf{u}_k}]^T, \quad (13)$$

其中 $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N$ 为参考子阵中各阵元位置矢量, $\mathbf{v}_j, j = x, y, z$ 为 x, y, z 三个方向的单位平移向量.以图 1 所示左边重叠阵列为例,每个子阵包含 6 个阵元,具有沿 x, y 方向 3×3 的平移不变性, $\mathbf{v}_x = [\Delta_x \quad 0 \quad 0]^T$, $\mathbf{v}_y = [0 \quad \Delta_y \quad 0]^T$ 分别为 x, y 方向的平移向量,其中 Δ_x, Δ_y 分别为 x, y 方向的阵元间隔.借助张量的连接和模 n 乘积运算,张量模型式(11)可以重新表述为:

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{A} \times_6 \mathbf{s}^T(t) + \mathbf{N}(t) \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_1 \bigsqcup_6 \mathbf{A}_2 \bigsqcup_6 \cdots \bigsqcup_6 \mathbf{A}_d \\ \mathbf{A}_k &= \mathbf{q}_s^k \circ \mathbf{q}_x^k \circ \mathbf{q}_y^k \circ \mathbf{q}_z^k \circ \mathbf{g}^k, k = 1, \dots, d \\ \mathbf{s}(t) &= [s_1(t) \quad s_2(t) \quad \cdots \quad s_d(t)]^T \end{aligned} \quad (15)$$

从模 R 展开的角度来看,张量模型的模 $\{1, \dots, 5\}$ 展开对应于传统的长矢量模型,模 $\{1, \dots, 4\}$ 展开对应于文献[16]中的三阶张量模型.下面的分析和实验均表明,相对于三阶张量模型,多模张量模型能更完整反映测量数据中的多维结构,从而进一步提高参数估计性能.

4 模 R 投影提高信号子空间估计精度

4.1 模 R 信号子空间

为表述方便,假设张量模型为 $H+1$ 阶,其中最后一阶为时间维.例如对于张量模型(14), $H=5$. 设 $R = \{r_1, \dots, r_p\}$, $C = \{c_1, \dots, c_q\}$, 且 $R \cup C = \{1, \dots, H\}$, $R \cap C = \emptyset$, 则张量模型的模 R 展开可写为,

$$[\mathbf{Z}(t)]_{(R)(C)}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^d [(\mathbf{a}_k^{(1)} \circ \cdots \circ \mathbf{a}_k^{(H)})]_{(R)(C)} s_k(t) + [\mathbf{N}(t)]_{(R)(C)} \\ &= \sum_{k=1}^d (\mathbf{a}_k^{(r_p)} \otimes \mathbf{a}_k^{(r_{p-1})} \otimes \cdots) (\mathbf{a}_k^{(c_q)} \otimes \mathbf{a}_k^{(c_{q-1})} \otimes \cdots)^T s_k(t) \\ &\quad + [\mathbf{N}(t)]_{(R)(C)} = \mathbf{A}^{(R)} \mathbf{F}(t) + \mathbf{N}(t) \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(R)} &= [\mathbf{a}_1^{(R)} \quad \cdots \quad \mathbf{a}_d^{(R)}] \\ \mathbf{F}(t) &= [\mathbf{a}_1^{(C)} s_1(t) \quad \cdots \quad \mathbf{a}_d^{(C)} s_d(t)]^T \\ \mathbf{a}_k^{(R)} &= \mathbf{a}_k^{(r_p)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{a}_k^{(r_1)}, k = 1, \dots, d \\ \mathbf{a}_k^{(C)} &= \mathbf{a}_k^{(c_q)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{a}_k^{(c_1)}, k = 1, \dots, d \end{aligned} \quad (17)$$

其中, \otimes 表示矩阵的 Kronecker 积.从式(16)可以看出张量模型的模 R 展开类似于传统的矩阵模型,一部分阵列流形矢量经过模 R 展开后变为矩阵模型中源信号的一部分,即源信号从 $s(t)$ 变为 $\mathbf{F}(t)$, 而且通过选择不同的 R 可以得到不同的矩阵模型.因此,可以定义不同的模 R 信号子空间为模 R 阵列流形矢量所张成的线性子空间 $\mathbf{U}_s^{(R)} = \text{span}(\mathbf{a}_1^{(R)}, \dots, \mathbf{a}_d^{(R)})$, 定义其正交补为模 R 噪声子空间 $\mathbf{U}_n^{(R)} = (\mathbf{U}_s^{(R)})^\perp$. 本文均假设 $\mathbf{a}_k^{(R)}, k = 1, \dots, d$ 之间线性独立.当 $R_1 = \{1, 2, \dots, H\}$ 时,模 R_1 展开对应于长矢量模型,模 R_1 信号子空间对应长矢量信号子空间.下面的定理给出模 R 信号子空间与长矢量信号子空间之间的关系.

定理 令 $R_{LV} = \{1, 2, \dots, H\}$, 当 $R \subset R_{LV}$ 时,模 R_{LV} 信号子空间投影后的长矢量子空间是模 R 投影后的长矢量子空间的线性子空间.

证明 证明主要说明两点,首先说明模 R 投影和长矢量信号子空间投影均不改变真实测量数据(无噪声情况),然后比较两者对应的线性子空间的维度,即可得出两者之间的包含关系.

设模 R 信号子空间投影矩阵为 $\mathbf{P}_s^{(R)}$, 测量数据张量的模 R 信号子空间投影指的是对测量张量按照模 R 展开后的所有列向量左乘 $\mathbf{P}_s^{(R)}$, 即 $[\mathbf{Z}']_{(R)} = \mathbf{P}_s^{(R)} [\mathbf{Z}]_{(R)}$, 用模 R 乘积表示为,

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{Z} \times_R \mathbf{P}_s^{(R)} \quad (18)$$

当没有噪声时,根据模 R 信号子空间的定义易知 $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}$. 同理,假设 \mathbf{P}_s^{LV} 表示到长矢量信号子空间的投影矩阵,有 $\mathbf{Z} = \mathbf{Z} \times_{R_{LV}} \mathbf{P}_s^{LV}$. 假设信号源数目为 d , 则易知 $\text{rank}(\mathbf{P}_s^{LV}) = \text{rank}(\mathbf{P}_s^{(R)}) = d$, 但是 $\mathbf{P}_s^{(R)}$ 和 \mathbf{P}_s^{LV} 矩阵的维度不同,不能直接比较.根据式(6),易知模 R 乘积等价的长矢量投影矩阵可以写为 $\mathbf{P}_s^{(R)} \otimes \mathbf{I}_{(R_{LV} \setminus R)}$, 秩为 $\text{rank}(\mathbf{P}_s^{(R)}) \cdot \text{rank}(\mathbf{I}_{(R_{LV} \setminus R)}) = d \cdot \mathbf{I}(R_{LV} \setminus R) \geq d$, 其中 $\mathbf{I}_{(R_{LV} \setminus R)}$ 表示维度为 $\mathbf{I}(R_{LV} \setminus R)$ 的单位阵,且 $R_{LV} \setminus R$ 表示 R 在 R_{LV} 中的补集.所以模 R_{LV} 信号子空间投影后的长矢量子空间是模 R 投影后的长矢量子空间的线性

子空间.

证毕

根据定理 1, 因为模 R 投影的信号子空间与长矢量信号子空间之间存在包含关系, 可以通过模 R 投影做预处理, 改善长矢量信号子空间估计并提高参数估计性能.

4.2 模 R 投影矩阵计算和模 R 投影 MUSIC 算法

假设噪声为独立同分布的空时白噪声, 则根据式 (16) 模 R 协方差矩阵可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(R)} &= \mathbf{E}\{[\mathbf{Z}(t)]_{(R)}[\mathbf{Z}(t)]_{(R)}^H\} \\ &= \mathbf{A}^{(R)}\mathbf{R}_F^{(R)}\mathbf{A}^{(R)H} + \mathbf{P}^{(R)}\mathbf{I} \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$\mathbf{R}_F^{(R)} = \mathbf{E}\{\mathbf{F}(t)\mathbf{F}(t)^H\}. \quad (20)$$

$\mathbf{P}^{(R)}$ 表示噪声功率. 由式 (19) 易知, 模 R 信号子空间可由模 R 协方差矩阵最大 d 个特征值对应的特征向量表示. 若定义协方差张量为,

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{E}\{\mathbf{Z}(t) \circ \mathbf{Z}(t)^*\} \\ &\approx \langle \mathbf{Z}, \mathbf{Z}^* \rangle_{H+1, H+1} \end{aligned} \quad (21)$$

其中, $*$ 表示复数共轭, $H+1$ 表示时间维, 则样本模 R 协方差矩阵也可由协方差张量的收缩积估计, 即

$$\mathbf{R}^{(R)} \approx \langle \mathbf{R} \rangle_{i, i+H}, i \in \{1, \dots, H\} \setminus R \quad (22)$$

其中 \setminus 表示集合的相对补集运算. 可以验证式 (19) 和 (22) 等价.

综上, 模 R 投影 MUSIC 算法可以总结为:

步骤 1 从测量张量 \mathbf{Z} 估计模 R 信号子空间投影矩阵 $\mathbf{P}_s^{(R_i)}$, $i=1, 2, \dots$.

步骤 2 利用模 R 乘积将测量张量 \mathbf{Z} 投影到模 R_i , $i=1, 2, \dots$, 信号子空间中, 即 $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z} \times_{R_i} \mathbf{P}_s^{(R_i)} \times \dots$.

步骤 3 利用 \mathbf{Z}' 按照长矢量模型展开, 计算长矢量信号子空间, 运行 MUSIC 算法估计波达角.

4.3 模 R 信号子空间的计算复杂度分析

计算模 R 信号子空间的时候需要对模 R 协方差矩阵进行特征值分解, 或奇异值分解. 采用正交迭代算法^[20]对 $m \times n$ 维矩阵进行奇异值分解并截取前 d 个奇异向量的乘法次数约为 $k_i \cdot m \cdot n \cdot d$, 其中 k_i 是与算法实现有关的常数. 假设 $d \leq I_h$, $h=1, \dots, H$ 时, 计算模 n 信号子空间的乘法次数为 $\sum_{h=1}^H k_i \cdot I_h^2 \cdot d$, 其中 I_h 为第 h 维的维度, 模 R 信号子空间的计算完全类似. 相对于传统的 MUSIC 算法, 模 R 投影需要付出额外的计算量, 但是能够挖掘和利用数据中的多维结构信息, 提高长矢量信号子空间估计精度, 从而获得更高的参数估计精度.

5 仿真结果

考虑两个窄带远场全极化信号入射至 4×6 的三电

偶极子构成的均匀面阵. 阵元间距为半波长, 两个信号的入射角 (θ, φ) 分别为 $(90^\circ, 50^\circ)$ 和 $(90^\circ, 45^\circ)$, 极化角 (γ, η) 分别为 $(32.17^\circ, 33.69^\circ)$ 和 $(32.17^\circ, 73.90^\circ)$. 评估标准主要是子空间估计精度和信号波达角估计精度. 前者由估计的信号子空间与真实的信号子空间之间的最大主角 (Largest Principal Angle, LPA) 度量^[20], 比如 $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2 \in \mathbb{C}^{M \times d}$ 的列空间之间的 LPA 定义为:

$$LPA = \cos^{-1}(\lambda_{\min}(\text{orth}\{\mathbf{U}_1\}^H \text{orth}\{\mathbf{U}_2\})), \quad (23)$$

其中 $\text{orth}\{\cdot\}$ 表示计算矩阵列空间的一组标准正交基, $\lambda_{\min}(\cdot)$ 表示矩阵的最小特征值. 后者由总体均方根误差 (RMSE) 表示:

$$RMSE_{\text{tot}} = \sqrt{E\left\{\sum_{k=1}^d \frac{(\tilde{\theta}_k - \theta_k)^2 + (\tilde{\varphi}_k - \varphi_k)^2}{2}\right\}}, \quad (24)$$

其中 $\tilde{\theta}_k, \tilde{\varphi}_k$ 表示第 k 个信号波达角的估计值.

5.1 LPA 随信噪比的变化

信噪比在 -5 dB 到 30 dB 之间变化, 快拍数为 40, 进行独立仿真次数 300 次, 结果如图 2 所示. 图中 LV 表示长矢量方法, 即未做任何模 R 投影处理, $R\{n\}$ 表示经过模 n 投影处理, 而 $R\{12, 3\}$ 表示将 1, 2 维组合在一起, 即相当于划分 $R_1 = \{1, 2\}$ 和 $R_2 = \{3\}$, 其余类似. 从图中可以发现, 信号子空间估计的精度随着信噪比的提高而提高. 经过模 R 投影处理之后, 信号子空间估计的精度相对于长矢量方法存在明显和稳定的提升. 模 n 处理得到的效果要优于 $R\{12, 3\}$ 投影处理, 即表明多模张量模型优于文献^[16]中提出的三阶张量模型. 如果一般的模 R 投影处理在模 n 投影处理之后进行, 还能进一步提高信号子空间估计精度, 如图 3 所示.

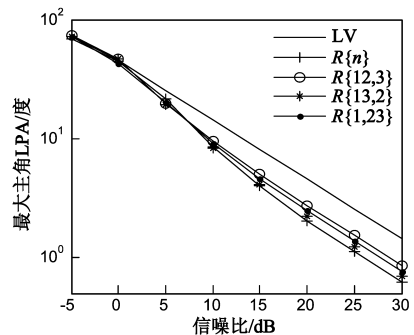


图2 不同模 R 投影对长矢量信号子空间估计精度影响随信噪比的变化

5.2 LPA 随快拍数的变化

快拍数在 10 到 100 之间变化, 信噪比为 10 dB, 进行独立仿真次数 300 次, 其它设置与实验 5.1 相同, 结果如图 4 所示. 从图中可以看出, 信号子空间估计的精度随着快拍数的增多而提高. 经过模 R 投影处理之后, 信号子空间估计的精度相对于长矢量方法存在明显和稳定的提升. 模 n 处理得到的效果要优于 $R\{12, 3\}$ 等投影

处理(如果一般的模 R 投影处理在模 n 投影处理之后进行,还能进一步提高信号子空间估计精度).

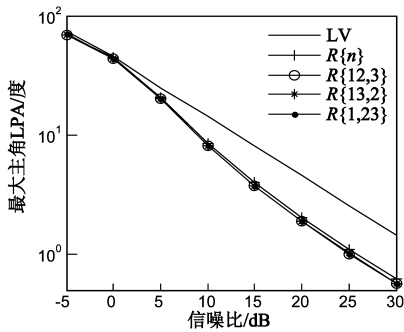


图3 最大主角随信噪比的变化,模 R 投影在模 n 投影的基础上进行

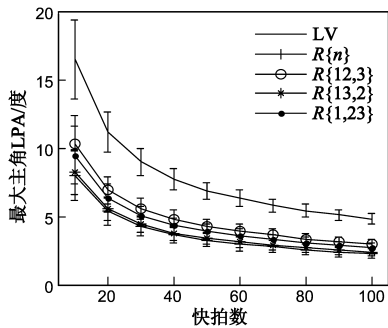


图4 不同模 R 投影对长矢量信号子空间估计精度影响随快拍数的变化

5.3 总体 RMSE 随信噪比的变化

图 5 是两个独立信号入射时,各处理方法信号参数估计的总体均方根误差随信噪比的变化,其中快拍数为 10,信噪比从 0dB 到 15dB 变化,模 R 投影均在模 n 投影基础上进行,其他设置与实验 5.1 相同.从图中可以看出相对于传统方法模 R 投影能够进一步提高参数估计精度.随着信噪比进一步提高,两者性能趋于一致.图 6 是两个高度相关信号入射时,各处理方法信号参数估计的总体均方根误差随信噪比的变化,其中相关系数 $\rho = 0.9999e^{\pi/10}$,快拍数为 80,信噪比从 15dB 到 30dB 变化,其他设置与图 5 相同.从图中可以看出相对

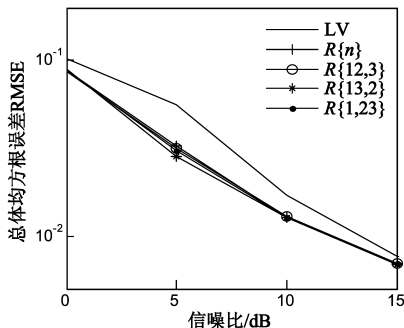


图5 两个独立信号入射时信号参数估计的总体均方根误差随信噪比的变化

于传统方法模 R 投影参数估计精度更高,具有良好的解相关能力,且随着信噪比的增大而参数估计精度也随之提高.

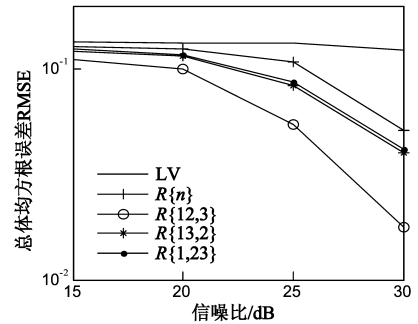


图6 两个相关信号入射时信号参数估计的总体均方根误差随信噪比的变化

6 结论

本文详细给出了具有多维结构的电磁矢量传感器阵列的多模张量模型,在此基础上定义模 R 信号子空间,分析表明不同模 R 信号子空间之间存在包含关系,据此提出利用模 R 信号子空间投影提高信号参数估计精度的 MUSIC 算法(也可以推广到其它传统子空间算法).仿真结果验证了在快拍数少,信噪比低,或者信号高度相关时能明显提高信号参数估计性能.不过性能的提高是以增加计算量为代价的.

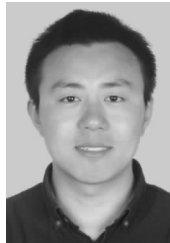
另一个值得考虑的问题是对于宽带远场全极化信号,模 R 投影 MUSIC 是否依然适用?答案是肯定的,因为,众所周知,常规的宽带信号处理可以通过傅里叶变换将入射信号变换到频域上互不重叠的窄频率柜^[21],各个频率柜的输出再按照窄带信号进行处理.不过,对于如何将张量方法直接应用到宽带全极化信号处理中,我们将在后续工作中进一步深入探索.

参考文献

- [1] Nehorai A, Paldi E. Vector - sensor array-processing for electromagnetic source localization[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(2): 376 - 398.
- [2] 徐友根,刘志文.基于累积量的极化敏感阵列信号 DOA 和极化参数的同时估计[J].电子学报, 2004, 32(12): 1962 - 1966.
XU You-gen, LIU Zhi-wen. Cumulant-based two-dimensional DOA and polarization estimation with a polarization sensitive array comprising a spatially stretched tripole[J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32(12): 1962 - 1966. (in Chinese)
- [3] 郑桂妹,陈伯孝,杨明磊,等.基于电磁矢量阵列的加权极化平滑解相干算法[J].系统工程与电子技术, 2012, 34(4): 637 - 643.
ZHENG Gui-mei, CHEN Bai-xiao, YANG Ming-lei, et al.

- Weighted polarization smoothing algorithm for electromagnetic vector-sensor array [J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2012, 34(4): 637 – 643. (in Chinese)
- [4] Gong X F, Wang K, Lin Q H, et al. Simultaneous source localization and polarization estimation via non-orthogonal joint diagonalization with vector-Sensors [J]. *Sensors*, 2012, 12(3): 3394 – 3417.
- [5] Wong K T, Zoltowski M D. Self-initiating MUSIC-based direction finding and polarization estimation in spatio-polarizational beamspace [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2000, 48(8): 1235 – 1245.
- [6] Li J. Direction and polarization estimation using arrays with small loops and short dipoles [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1993, 41(3): 379 – 387.
- [7] Gong X F, Liu Z W, Xu Y G. Quad-quaternion MUSIC for DOA estimation using electromagnetic vector sensors [J]. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2008, 2008(1): 213293.
- [8] Le Bihan N, Miron S, Mars J. MUSIC algorithm for vector-sensors array using biquaternions [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(9): 4523 – 4533.
- [9] Jiang J F, Zhang J Q. Geometric algebra of Euclidean 3-space for electromagnetic vector-sensor array processing, Part I: Modeling [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2010, 58(12): 3961 – 3973.
- [10] Gong X F, Liu Z W, Xu Y G. Direction finding via biquaternion matrix diagonalization with vector-sensors [J]. *Signal Processing*, 2011, 91(4): 821 – 831.
- [11] Wong K T, Yuan X. "Vector cross-product direction-finding" with an electromagnetic vector-sensor of six orthogonally oriented but spatially noncollocating dipoles/loops [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(1): 160 – 171.
- [12] Li Y, Zhang J Q. An enumerative nonlinear programming approach to direction finding with a general spatially spread electromagnetic vector sensor array [J]. *Signal Processing*, 2013, 93(4): 856 – 865.
- [13] Sun W Z, So H C. Accurate and computationally efficient tensor-based subspace approach for multidimensional harmonic retrieval [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(10): 5077 – 5088.
- [14] Nion D, Sidiropoulos N D. Tensor algebra and multidimensional harmonic retrieval in signal processing for MIMO radar [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(11): 5693 – 5705.
- [15] Miron S, Le Bihan N, Mars J. Vector-sensor MUSIC for polarized seismic sources localization [J]. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, 2005(1): 74 – 84.
- [16] 龚晓峰, 刘志文, 徐友根. 电磁矢量传感器阵列信号波达方向估计: 双模 MUSIC [J]. *电子学报*, 2008, 36(9): 1698 – 1703.
GONG Xiao-feng, LIU Zhi-wen, XU You-gen. Direction-finding with electromagnetic vector-sensor array: Dual-mode MUSIC [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2008, 36(9): 1698 – 1703. (in Chinese)
- [17] Gong X F, Liu Z W, Xu Y G, et al. Direction-of-arrival estimation via twofold mode-projection [J]. *Signal Processing*, 2009, 89(5): 831 – 842.
- [18] Kolda T G. Multilinear operators for higher-order decompositions [R]. Sandia National Laboratories, 2006. <http://www.prod.sandia.gov/cgi-bin/techlib/access-control.pl/2006/062081.pdf>.
- [19] Li Y, Zhang J Q. Mode-R subspace projection of a tensor for multidimensional harmonic parameter estimations [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(11): 3002 – 3014.
- [20] Golub G H, Van Loan C F. *Matrix Computations* [M]. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1996. 410 – 411.
- [21] Van Trees H L. *Optimum Array Processing: Part IV of Detection, Estimation and Modulation Theory* [M]. Wiley-Interscience, 2002. 334 – 343.

作者简介



李 阳 男, 1987 年 4 月生于四川遂宁, 复旦大学信息科学与工程学院电子工程系博士研究生, 研究兴趣为阵列信号处理及应用。

E-mail: yanglee@fudan.edu.cn



张建秋 男, 1962 年生于湖南省隆回县. 现任复旦大学电子工程系教授、博士生导师, IEEE 高级会员, 主要研究领域有信息处理理论及其在测量和仪器、新型传感器、控制和通信中的应用。

E-mail: jqzhang01@fudan.edu.cn