

# 一种新型低复杂度的 IIR 格型滤波器

于爱华<sup>1,2</sup>, 黄朝耿<sup>1</sup>, 李 刚<sup>1</sup>, 徐 红<sup>1</sup>, 常丽萍<sup>1</sup>

(1. 浙江工业大学信息工程学院, 浙江省信号处理重点实验室, 浙江杭州 310023; 2. 浙江科技学院, 浙江杭州 310023)

**摘 要:** 格型结构具有良好的抗有限字长效应能力而被应用于很多实时性较高的场合. 归一化格型结构具备正交的特性, 然而, 对于一个  $N$  阶数字滤波器, 它需要  $5N + 1$  个乘法器. 为了降低其实现复杂度, 并保留正交的特性, 本文基于单, 双, 三乘法器格型单元导出了其对应的新型格型单元和格型结构. 仿真结果表明, 当采用单乘法器新型格型单元时, 新结构抵抗有限字长误差的能力与归一化格型结构非常接近, 但由于其只需  $2N + 1$  个乘法器, 新结构在实时信号处理中具有更大的实用价值.

**关键词:** 数字滤波器; 格型结构; 信号功率比; 灵敏度函数; 有限字长

**中图分类号:** TN713.7      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2013) 09-1703-07

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.09.006

## A New Class of Low Complexity IIR Lattice Filters

YU Ai-hua<sup>1,2</sup>, HUANG Chao-geng<sup>1</sup>, LI Gang<sup>1</sup>, XU Hong<sup>1</sup>, CHANG Li-ping<sup>1</sup>

(1. Zhejiang Key Laboratory for Signal Processing, College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou, Zhejiang 310023, China; 2. Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou, Zhejiang 310023, China)

**Abstract:** Lattice structure is applied in a wide range of areas due to its excellent finite word length (FWL) properties. The normalized lattice structure is orthogonal, but for an  $N$ th-order digital filter, it needs  $5N + 1$  multipliers. To decrease the computing complexity while keeping the orthogonality unchanged, the scaled elementary lattice and the corresponding lattice structure were derived based on the one-, two-, and three-multiplier lattice, respectively. The simulation result indicates when the scaled one-multiplier lattice is applied, the proposed structure has close performance compared with the normalized lattice structure, but it is more efficient for the real-time signal processing, for it needs only  $2N + 1$  multipliers, much less than that in the normalized lattice structure.

**Key words:** digital filters; lattice structures; signal power ratio; sensitivity measure; finite word length

## 1 引言

数字滤波器在数字信号处理的各种应用领域中发挥着十分重要的作用. 在实际应用中, 一个设计好的数字滤波器最终要在一个有限精度的数字器件上实现, 而有限字长 (Finite Word Length, FWL) 效应将会大大降低滤波器的性能. 理论上, 一个设计好的  $N$  阶滤波器可以用很多不同的结构表示, 如直接型 I 和 II, 状态空间实现结构<sup>[1~5]</sup>. 尽管这些结构在无限精度下是等价的, 但是它们有着不同的数值特性. 众所周知, 延时器  $z^{-1}$  存储当前时刻的数据是为下一时刻计算输出做准备的, 为了最大限度的利用寄存器资源, 最好使每次计算得到需要存储的数据幅值相一致. 否则, 当用最大的值归一化需要存储的数据时, 一些特别小的数据就不能完全被表示而丢失, 这必将会大大降低整个系统的性能. 基于  $l_2$ -

scaling 准则, 研究者们取得了一系列的成果<sup>[1,6,9]</sup>. 所以, 如何减少有限字长效应的影响一直是数字滤波器设计与实现中的研究热点之一<sup>[1~9]</sup>.

数字滤波器实现的复杂度主要取决于乘法器的个数, 而二进制数乘法的实质是部分积的移位相加, 也就是说, 乘法器的本质是由移位寄存器和加法器构成. 假设系统参数用  $b_c$  比特表示, 则理论上每实现一次乘法需要做  $b_c$  次移位操作和  $b_c - 1$  次加法操作. 为了降低数字滤波器的实现复杂度, 往往直接设计离散化的结构参数, 例如, 采用有符号的 2 次幂和 (Signed Power of Two-SPT) 表示结构参数<sup>[10~12]</sup>. 进一步地, 如果只采用一位 SPT 表示系统的结构参数, 则相比于传统的数字滤波器实现方法, 该方法只需做 1 次移位操作便替代了乘法器, 这就大大的减少了电路尺寸和功耗, 提高了处理速度, 更加适于 FPGA, ASIC 等设计.

格型滤波器结构由于其对有限字长效应具有很强的鲁棒性而被应用于很多实时性要求较高的场合,如汽车、机器人、雷达、交流电机等<sup>[13-19]</sup>.最初对格型滤波器的研究要追溯到1973年,由Gray和Markel提出了经典的分子抽头式格型滤波器结构,这种结构又被称为Gray-Markel结构<sup>[13,14]</sup>,见图1.由于分子抽头式格型滤波器结构的各个延时器结点后的能量极不均匀,尤其当滤波器的带宽较窄时,Lim在1984年提出了分子注入式格型滤波器<sup>[16]</sup>,对其存在的缺陷有极大的改善.但这两种传统的格型滤波器结构都是依靠结构而直接确定下来的,往往不能针对特定的性能要求(如灵敏度传输函数、噪声增益等)优化,因此,Li结合这两种传统格型滤波器的特点,构造出具有自由度的新型简洁格型滤波器<sup>[17]</sup>,然后对所需的性能进行优化.然而,文献[17]中滤波器的优化设计采用的是穷举搜索算法,针对其存在设计效率不高的缺陷,文献[18]采用基于格雷码的遗传算法,同时为进一步提高滤波器的性能,采用各种格型单元的不同组合对结构优化,得到了更小的信号功率比.理想地,当信号功率比为1时,滤波器才能达到“正交”(orthogonal)的效果.然而据笔者了解,除了归一化格型结构(normalized lattice structure)及其衍生的结构以外,其他的格型结构始终不能达到这一效果.本文着重研究四乘法器格型单元的特性,基于单、双、三乘法器的格型单元导出了相对应的新型格型单元,使其等效于四乘法器的格型单元.

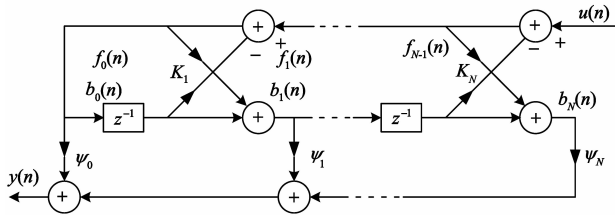


图1 分子抽头式格型结构

本文的概述如下:第2部分分析了四乘法器格型单元的特性,基于单乘法器格型单元导出了一种新型格型单元及其相应的新型格型结构;第3部分对提出结构进行灵敏度和信号功率比分析,并给出了传输函数的灵敏度解析表达式;为了论证提出结构的良好性能,第4部分进行了计算机仿真,从不同角度同现有的几个结构进行了比较;第5部分给出了本文的结论.

## 2 新型格型滤波器结构

如图1所示,  $\{f_m(n)\}$ ,  $\{b_m(n)\}$  分别表示格型滤波器结构的前向、后向信号. 定义  $f_m(n)$ ,  $b_m(n)$  和  $u(n)$  的  $z$  变换分别为  $F_m(z)$ ,  $B_m(z)$  和  $U(z)$ .

假设  $L_{m-1}^m(z)$  为格型滤波器结构第  $m$  级的传输函

数,其中,  $m = 1, 2, \dots, N$ , 则  $F_m(z)$ ,  $B_m(z)$ ,  $F_{m-1}(z)$  和  $B_{m-1}(z)$  可用如下方程表示:

$$\begin{bmatrix} F_m(z) \\ B_m(z) \end{bmatrix} = L_{m-1}^m(z) \begin{bmatrix} F_{m-1}(z) \\ B_{m-1}(z) \end{bmatrix} \quad (1)$$

这里,  $L_{m-1}^m(z)$  取决于结构选用的格型单元类型,由图2给出:

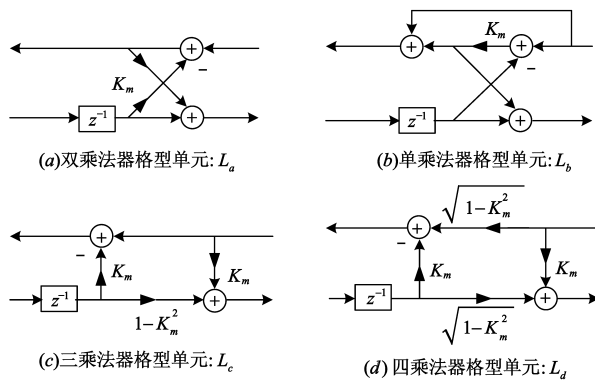


图2 格型单元类型

$$L_{m-1}^m(z) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & K_m z^{-1} \\ K_m & z^{-1} \end{bmatrix}, & L_a/L_c \\ \frac{1}{1+K_m} \begin{bmatrix} 1 & K_m z^{-1} \\ K_m & z^{-1} \end{bmatrix}, & L_b \\ \frac{1}{\sqrt{1-K_m^2}} \begin{bmatrix} 1 & K_m z^{-1} \\ K_m & z^{-1} \end{bmatrix}, & L_d \end{cases} \quad (2)$$

由(2)可知,不同的格型单元虽然具有相似的数学表达式,但它们对整个滤波器呈现出不同的性能特征.进一步地,各自的因子(scaling factor)直接影响着整个滤波器结构的性能.归一化格型结构正是采用了四乘法器的格型单元,它就是一个典型的正交结构.由分析可知,归一化格型结构之所以具备这个特性取决于四乘法器的因子(i.e.,  $1/\sqrt{1-K_m^2}$ ).所以,本节的主要目的是基于单、双、三乘法器的格型单元,导出一种新型的格型单元,使其达到四乘法器格型单元结构的性能.

为不失一般性,我们以单乘法器格型单元为例.对图2(b)所示的单乘法器引入另外一个因子  $\rho_m$ , 得到如图3所示的新型单乘法器格型单元.需要特别指出的是,引入的  $\rho_m$  可用1位SPT表示,其实现复杂度远低于传统的乘法器,故称之为新型单乘法格型单元.此时,  $\hat{B}_m(z)$ ,  $\hat{F}_m(z)$ ,  $\hat{B}_{m-1}(z)$  和  $\hat{F}_{m-1}(z)$  之间的关系可表示为:

$$\begin{bmatrix} \hat{F}_m(z) \\ \hat{B}_m(z) \end{bmatrix} = \frac{\rho_m}{1+K_m} \begin{bmatrix} 1 & K_m z^{-1} \\ K_m & z^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{F}_{m-1}(z) \\ \hat{B}_{m-1}(z) \end{bmatrix} \triangleq \rho L_{m-1}^m(z) \begin{bmatrix} \hat{F}_{m-1}(z) \\ \hat{B}_{m-1}(z) \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中,  $\hat{B}_m(z)$  和  $\hat{F}_m(z)$  分别与图 2(b) 中  $B_m(z)$  和  $F_m(z)$  相对应.

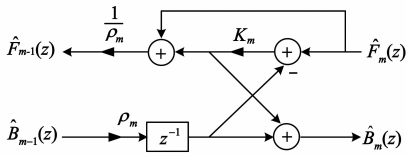


图3 新型单乘法器格型单元

对比式(2)和式(3)可知,新型单格型单元含有一个自由因子  $\rho_m$ ,用于调节其因子.如前所述,归一化格型结构正是基于其因子而达到正交的特性,为了使新型单乘法器达到四乘法器一样的特性,可令

$$\frac{\rho_m}{1+K_m} = \frac{1}{\sqrt{1-K_m^2}} \Leftrightarrow \rho_m = \frac{1+K_m}{\sqrt{1-K_m^2}} \quad (4)$$

因此,通过(4)可以取得与四乘法器格型单元一样的传输函数,也就是说,通过自由因子  $\rho_m$  可以使基于单乘法器格型单元的格型结构也取得正交的特性.不仅如此,为了进一步降低结构的实现复杂度, $\rho_m$  可以用一个 SPT 表示.对  $\rho_m$  进行“量化”之后,虽然不能达到正交的目的,但也能极大的改善整个滤波器的性能.

同理,对双、三乘法器格型单元引入自由因子也能达到正交的特性,此时, $\rho_m = 1/\sqrt{1-K_m^2}$  为论述需要,基于三种格型单元得到的新型格型单元命名为  $\rho L_\chi$ , 其中,  $\chi \in \{a, b, c\}$ .

经上述推导,运用新型格型单元的格型结构可表示为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} F_m(z) \\ B_m(z) \end{bmatrix} = \rho L_{m-1}^m(z) \begin{bmatrix} F_{m-1}(z) \\ B_{m-1}(z) \end{bmatrix} \\ F_N(z) = U(z) \end{cases} \quad (5)$$

这里,  $m = 1, 2, \dots, N$ .

### 3 性能分析

传统上,研究有限字长对滤波器性能的影响可分为两大类,系统参数的扰动和舍入噪声,前者用灵敏度来衡量,而后者通过舍入噪声增益来衡量.为了提高所有延时器的字长利用率,同时要防止其过大而产生溢出,文献[17]提出了信号功率比的衡量标准,它其实是舍入噪声增益的另一表现形式,因此状态信号功率比最小化有着重要的实际意义.本文将从灵敏度和信号功率比两个方面对新结构进行衡量.

#### 3.1 灵敏度分析

若  $P_\tau \triangleq \{\tau_k\}$  为结构参数集合,显然,传输函数  $H(z)$  是关于  $P_\tau$  的函数.当第  $k$  个参数  $\tau_k$  用二进制表示时,由于数字设备精度的限制,这就产生了量化误差  $\Delta\tau_k$ [8].于是实际参数可用  $\tau_k^* = \tau_k + \Delta\tau_k$  表示,这就导

致了实际传输函数  $H^*(z)$  偏离了理想传输函数  $H(z)$ .那么总的偏差量可以表示为

$$\Delta H(z) = H^*(z) - H(z) \approx \sum_{\forall k} S_{\tau_k}(z) \Delta\tau_k \quad (6)$$

其中,  $S_{\tau_k}(z) \triangleq \frac{\partial H(z)}{\partial \tau_k}$  即为滤波器传输函数对参数  $\tau_k$  的灵敏度函数.

由(6)可知:偏差  $\Delta H(z)$  与  $\{S_{\tau_k}(z)\}$  是成正比的,都是关于频率的函数.要计算在整个频率范围内的整体偏差,通常采用基于灵敏度函数的  $l_2$ -范数[8].

$$M \triangleq \sum_{\forall k} \|S_{\tau_k}(z)\|_2^2 \quad (7)$$

其中  $\|S_{\tau_k}(z)\|_2$  是  $S_{\tau_k}(z)$  的  $l_2$ -范数.

$$\begin{aligned} \|S_{\tau_k}(z)\|_2^2 &\triangleq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_{\tau_k}(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{j2\pi} \oint_{|z|=1} S_{\tau_k}(z) S_{\tau_k}^T(z^{-1}) z^{-1} dz \end{aligned} \quad (8)$$

若  $(A_k, B_k, C_k, D_k)$  是  $S_{\tau_k}(z)$  的状态空间实现:  $S_{\tau_k}(z) = D_k + C_k(zI - A_k)^{-1}B_k$ . 根据留数定理,

$$\begin{aligned} \|S_{\tau_k}(z)\|_2^2 &= \text{tr}[D_k D_k^T + C_k W_c^{(k)} C_k^T] \\ &= \text{tr}[D_k^T D_k + B_k^T W_o^{(k)} B_k] \end{aligned} \quad (9)$$

式中,  $I$  为单位矩阵,  $T$  表示共轭转置,  $\text{tr}[\cdot]$  表示矩阵的迹运算,  $W_c^{(k)}$ ,  $W_o^{(k)}$  分别满足以下两个 Lyapunov 等式,它们分别被称作可控格莱姆矩阵和可观格莱姆矩阵:

$$\begin{cases} W_c^{(k)} = A_k W_c^{(k)} A_k^T + B_k B_k^T \\ W_o^{(k)} = A_k^T W_o^{(k)} A_k + C_k^T C_k \end{cases} \quad (10)$$

显然,新结构的结构参数为  $P_\tau = \{\rho_m, \psi_m, K_m\}$ , 而  $\{\rho_m\}$  是用一位 SPT 精确表示,则需要考虑的结构参数为  $P_\tau = \{\psi_m, K_m\}$ .

由式(5)可知,  $Y(z) = \sum_{m=0}^N \psi_m B_m(z)$ , 而  $B_m(z)$  可表示为  $B_m(z) = T_m^b(z) U(z)$ , 其中,  $T_m^b(z)$  是输入信号  $u(n)$  和状态信号  $b_m(n)$  之间的传输函数,则  $H(z) = \sum_{m=0}^N \psi_m T_m^b(z)$ . 因此,

$$\begin{cases} \frac{\partial H(z)}{\partial \psi_k} = T_k^b(z) \\ \frac{\partial H(z)}{\partial K_i} = \sum_{m=0}^N \psi_m \frac{\partial T_m^b(z)}{\partial K_i} \end{cases} \quad (11)$$

由式(5)可以很容易计算出  $T_m^b(z)$  得到  $\psi_k$  的灵敏度,但对于  $\frac{\partial T_m^b(z)}{\partial K_i}$  的计算还是比较困难的,接下来我们也采用格型的思想计算  $\{K_m\}$  的灵敏度.

假设  $\dot{X}$  表示矩阵  $X$  的第  $(l, k)$  元素对  $K_i$  的求导,即  $\dot{X}$  的第  $(l, k)$  元素为  $\frac{\partial x(l, k)}{\partial K_i}$ . 进一步地,如果  $S(z)$  是  $s(n)$  的  $z$  变换,则  $\dot{S}(z)$  也为  $\dot{s}(n)$  的  $z$  变换.

当输入信号为单位冲击信号时,即  $u(n) = \delta(n)$ ,

则  $\dot{B}_m(z) = \frac{\partial T_m^b(z)}{\partial K_i}$ . 此时,对式(5)求关于  $K_i$  的导数为:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{F}_m(z) \\ \dot{B}_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_m(z) \\ G_m(z) \end{bmatrix} + \rho L_{m-1}^m(z) \begin{bmatrix} \dot{F}_{m-1}(z) \\ \dot{B}_{m-1}(z) \end{bmatrix} \\ \dot{F}_N(z) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

其中,

$$\begin{bmatrix} \tilde{G}_m(z) \\ G_m(z) \end{bmatrix} = \rho L_{m-1}^m(z) \begin{bmatrix} F_{m-1}(z) \\ B_{m-1}(z) \end{bmatrix}, m = 1, \dots, N \quad (13)$$

注意到,对于一个给定的格型单元,传输矩阵  $\rho L_{m-1}^m(z)$  由  $K_m$  唯一确定. 因此,

$$\rho L_{i-1}^i(z) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & z^{-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & L_a/L_c \\ \frac{1}{(1+K_i)^2} \begin{bmatrix} -1 & z^{-1} \\ 1 & -z^{-1} \end{bmatrix}, & L_b \end{cases} \quad (14)$$

和

$$\rho L_{m-1}^m(z) = 0, \quad \forall m \neq i \quad (15)$$

由式(12)~(15)所决定的系统可由图4表示,其中,  $T_A$ ,  $T_B$  和  $T_C$  的定义如下:

(1) 当  $0 \leq i \leq m \leq N$  时,

$$T_A(z) = \rho L_i^m(z), T_C(z) = \rho L_0^i(z), T_B(z) = \rho L_m^N(z)$$

(2) 当  $0 \leq m < i \leq N$  时,

$$T_A(z) = \rho L_m^i(z), T_B(z) = \rho L_i^N(z), T_C(z) = \rho L_0^m(z)$$

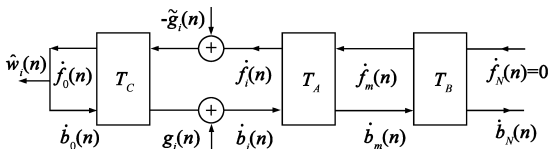


图4 灵敏度计算：由式(12)~(15)表征的格型结构

这里,当  $0 \leq p \leq N$  时,  $\rho L_q^p(z)$  满足

$$\rho L_q^p(z) \triangleq \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & p = q \\ \rho L_{p-1}^p(z) \rho L_{p-2}^{p-1}(z) \cdots \rho L_q^{q+1}(z), & p > q \end{cases} \quad (16)$$

由线性理论可知:

$$\dot{B}_m(z) = -T_{i,m}^b(z) \tilde{G}_i(z) + H_{i,m}^b(z) G_i(z), i = 1, \dots, N \quad (17)$$

其中,  $T_{i,m}^b(z)$  表示信号从  $f_i(z)$  点注入到  $b_m(z)$  点输出的传输函数,而  $H_{i,m}^b(z)$  表示信号从  $b_i(z)$  点注入到  $b_m(z)$  的输出函数. 接下来考虑如何计算  $T_{i,m}^b(z)$  和  $H_{i,m}^b(z)$ .

为了求  $T_{i,m}^b(z)$ ,假设图4中,  $w_i(n) = -\tilde{g}_i(n)$ ,且  $g_i(n) = 0$ . 对于  $0 \leq i \leq m \leq N$ ,由图4可以得到:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{F}_m(z) \\ \dot{B}_m(z) \end{bmatrix} = T_A(z) \begin{bmatrix} \dot{F}_i(z) \\ \dot{B}_i(z) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{F}_N(z) \\ \dot{B}_N(z) \end{bmatrix} = T_B(z) \begin{bmatrix} \dot{F}_m(z) \\ \dot{B}_m(z) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{F}_i(z) + W_i(z) \\ \dot{B}_i(z) \end{bmatrix} = T_C(z) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \hat{W}_i(z) \end{cases} \quad (18)$$

需要特别指出的是,最后一级输入  $\dot{F}_N(z) = 0$ .

定义

$$T_X(z) \triangleq \begin{bmatrix} P_X & Q_X \\ R_X & S_X \end{bmatrix} \quad (19)$$

此时,矩阵  $T_X(z)$  的四个元素都是关于  $z$  的函数,为了简化标记和表达,这四个元素的  $(z)$  都将省略不写.

将式(19)代入式(18),经推导可得:

$$\dot{B}_m(z) = \frac{P_B[(R_D + S_D)P_A - (P_D + Q_D)R_A]}{P_B(P_D + Q_D) + Q_B(R_D + S_D)} W_i(z)$$

其中,  $T_D(z) \triangleq T_A(z) T_C(z)$ . 因此,

$$T_{i,m}^b(z) = \frac{P_B[(R_D + S_D)P_A - (P_D + Q_D)R_A]}{P_B(P_D + Q_D) + Q_B(R_D + S_D)} \quad (20)$$

类似地,对于  $0 \leq m < i \leq N$  可以得到:

$$T_{i,m}^b(z) = \frac{P_B(R_C + S_C)}{P_E(P_C + Q_C) + Q_E(R_C + S_C)} \quad (21)$$

其中,  $T_E(z) \triangleq T_B(z) T_A(z)$ .

同理,假设  $\tilde{g}_i(n) = 0$ ,运用相同的推导过程可以得到  $H_{i,m}^b(z)$ :

(1) 当  $0 \leq i \leq m \leq N$  时,

$$H_{i,m}^b(z) = \frac{P_B[-(R_D + S_D)Q_A + (P_D + Q_D)S_A]}{P_B(P_D + Q_D) + Q_B(R_D + S_D)}$$

(2) 当  $0 \leq m < i \leq N$  时,

$$H_{i,m}^b(z) = -\frac{Q_B(R_C + S_C)}{P_E(P_C + Q_C) + Q_E(R_C + S_C)}$$

### 3.2 信号功率比

假设  $T_m(z)$  为输入信号  $u(n)$  到第  $m$  个状态信号  $x_m(n)$ ,  $\forall m$  传输函数的  $z$  变换,则

$$x_m(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_m(e^{j\omega}) U(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

其中,  $U(e^{j\omega})$  是  $u(n)$  的离散时间傅里叶变换. 因此,  $x_m(n)$  的功率可表示为:

$$E[x_m^2(n)] = \frac{1}{j2\pi} \oint T_m(z) T_m(z^{-1}) z^{-1} dz = \|T_m(z)\|_2^2$$

定义信号功率比均方值为

$$R \triangleq \sqrt{\frac{\max_m E[x_m^2(n)]}{\min_m E[x_m^2(n)]}} \quad (22)$$

显然,新结构的信号功率比均方值可表示为:

$$R = \sqrt{\frac{\max_m E[b_m^2(n)]}{\min_m E[b_m^2(n)]}} \quad (23)$$

这里,  $E[b_m^2(n)] = \|T_m^b(z)\|_2^2$ , 可由式(20)和(21)计算得到.

### 4 仿真实例

在这个部分, 通过一个仿真实例来验证新结构的性能和实现复杂度. 为论述方便, 格型结构采用格型单元和新型格型单元分别表示为  $L_{\text{tap}}^{(\chi)}$  和  $\rho L_{\text{tap}}^{(\chi)}$ , 其中  $\chi$  为格型单元乘法器的个数. 仿真实验在 MATLAB 软件中进行, 用指令 `ellip(N, rp, rs, ω)` 产生  $N$  阶低通椭圆滤波器, 其中  $r_p = 0.2\text{dB}$  是通带波纹,  $r_s = 60\text{dB}$  是阻带衰减,  $\omega/2$  是归一化的频率.

**实例** 取  $N = 7, \omega = 0.2$  相应的数字滤波器参数  $\{a_m\}, \{b_m\}$  及反射系数  $\{K_m\}$  见表 1. 表 2 和表 3 分别给出了  $L_{\text{tap}}^{(1)}, L_{\text{tap}}^{(2)}$  和  $\rho L_{\text{tap}}^{(1)}, \rho L_{\text{tap}}^{(2)}$  的结构参数. 这里,  $\{\rho_m\}$  采用一位 SPT 表示, 即当采用格型单元  $L_a$  时,  $\{\rho_m\}$  为  $[2\ 4\ 2\ 4\ 2\ 2\ 1]$ , 当采用格型单元  $L_b$  时,  $\{\rho_m\}$  为  $[0.25\ 8\ 0.25\ 4\ 0.25\ 4\ 0.5]$ .

表 4 给出的是五种结构的性能比较, 其中,  $R, M, N_{\text{mul}}$  分别表示每种结构的信号状态功率比的均方值, 参数灵敏度, 每计算一次输出所需的乘法器次数.

表 1 滤波器  $H(z)$  的参数  $a_m, b_m$  及  $K_m$

$m$	$a_m$	$b_m$	$K_m$
0	1	0.00267953280	-
1	-5.55435683957	-0.00619546726	-0.84279974798
2	13.89975437262	0.00838119064	0.98412227342
3	-20.17789879306	-0.00336615014	-0.92819667151
4	18.29000896514	-0.00336615014	0.94425551190
5	-10.33334165939	0.00838119064	-0.92758255119
6	3.36734713157	-0.00619546726	0.85894530215
7	-0.48851496523	0.00267953280	-0.48851496523

表 2  $L_{\text{tap}}^{(1)}$  和  $L_{\text{tap}}^{(2)}$  结构参数  $\{\psi_m\}$

$L_{\text{tap}}^{(1)}$	$L_{\text{tap}}^{(2)}$
$\psi_0 = -0.009772868104956$	$\psi_0 = -0.000029301131212$
$\psi_1 = 0.047489375698648$	$\psi_1 = 0.000905744221620$
$\psi_2 = 0.579729504900693$	$\psi_2 = 0.005572705381028$
$\psi_3 = 0.084943265678352$	$\psi_3 = 0.011371691155838$
$\psi_4 = 0.261386699889995$	$\psi_4 = 0.017998082962176$
$\psi_5 = 0.016559409405435$	$\psi_5 = 0.015745062402776$
$\psi_6 = 0.016985079728192$	$\psi_6 = 0.008687614095346$
$\psi_7 = 0.002679532803666$	$\psi_7 = 0.002679532803666$

表 3  $\rho L_{\text{tap}}^{(1)}$  和  $\rho L_{\text{tap}}^{(2)}$  结构参数  $\{\psi_m\}$

$\rho L_{\text{tap}}^{(1)}$	$\rho L_{\text{tap}}^{(2)}$
$\psi_0 = -0.009772868104956$	$\psi_0 = -0.007501089590248$
$\psi_1 = 0.189957502794592$	$\psi_1 = 0.115935260367375$
$\psi_2 = 0.289864752450347$	$\psi_2 = 0.178326572192910$
$\psi_3 = 0.169886531356704$	$\psi_3 = 0.181947058493409$
$\psi_4 = 0.130693349944997$	$\psi_4 = 0.071992331848703$
$\psi_5 = 0.033118818810869$	$\psi_5 = 0.031490124805552$
$\psi_6 = 0.008492539864096$	$\psi_6 = 0.008687614095346$
$\psi_7 = 0.002679532803666$	$\psi_7 = 0.002679532803666$

表 4 五种结构的性能比较

结构	$L_{\text{tap}}^{(1)}$	$L_{\text{tap}}^{(2)}$	$\rho L_{\text{tap}}^{(1)}$	$\rho L_{\text{tap}}^{(2)}$	$L_{\text{tap}}^{(4)}$
$R$	12.7398	446.6580	1.8605	1.9235	1
$M$	574.69	341222.7	543.16	527.72	127.92
$N_{\text{mul}}$	$2N + 1$	$3N + 1$	$2N + 1$	$3N + 1$	$5N + 1$

从以上的表格中可以看出:

(1) 采用提出的新型格型单元时, 格型结构的性能都得到了很大的提升, 尤其对于双乘法器的情况, 状态功率比的均方值从 446.6580 降到 1.9235, 这说明新结构可以更高效地利用所给定的位数对状态信号进行储存, 从而减少了舍入噪声.

(2) 采用新型单乘法器的格型单元时, 新结构只含有  $2N + 1$  个乘法器, 与直接型结构一样达到了所谓的标准型 (canonical). 然而, 格型结构在抵抗有限字长效应的性能方面远远优越于直接型结构.

(3) 与归一化格型结构相比, 新结构虽然具有更大的参数灵敏度和信号功率比, 这是以降低滤波器的实现复杂度为代价的, 尤其是当使用新型单乘法器的格型单元时, 较前者减少了  $3N$  个乘法器. 但是, 此时的灵敏度增加并不影响实际的幅频响应. 为证明上面的结论, 本文采取对每种滤波器结构参数进行  $B_c$  字节截

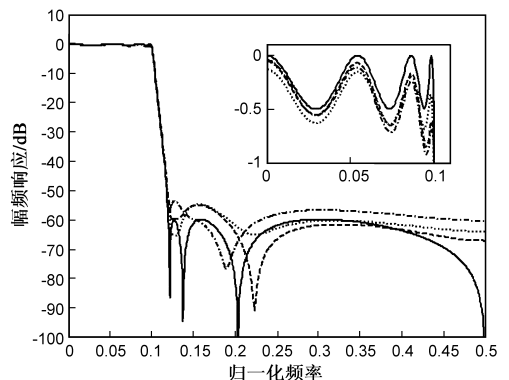


图 5 幅频响应比较 ( $B_c = 10$  比特): 实线-理想; 虚线- $L_{\text{tap}}^{(4)}$ ; 点划- $L_{\text{tap}}^{(2)}$ ; 破折- $\rho L_{\text{tap}}^{(2)}$

断,然后计算它们相应的幅频响应,见图 5 和图 6. 由图可知,新结构与归一化格型结构一样,其幅频响应与理想的非常接近,尤其在通带内.

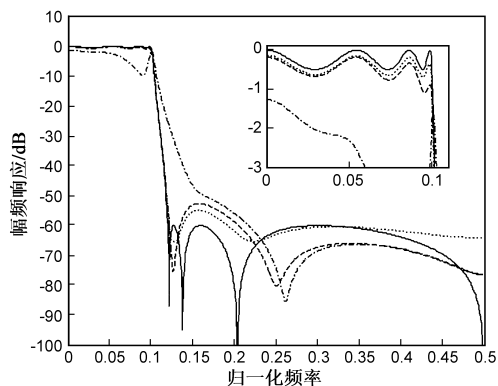


图6 幅频响应比较( $B_c=10$ 比特): 实线-理想; 虚线- $L_{\text{tap}}^{(4)}$ ; 点划- $L_{\text{tap}}^{(2)}$ ; 破折- $\rho L_{\text{tap}}^{(2)}$

## 5 结论

从实际应用的角度来看,滤波器不但要结构简单,而且对有限字长效应有良好的鲁棒性.本文基于单,双,三乘法器格型单元提出了各自对应的新型格型单元,使其达到四乘法器格型单元的特性.同时,为了降低新结构的实现复杂度,自由因子采用一位 SPT 表示,对于使用新型单乘法器格型单元的新结构只含有  $2N+1$  个乘法器.同归一化格型结构相比,性能与其非常接近,但在结构上比其简单有效,故此结构在实时系统应用中具有较高的实用价值.

## 参考文献

- [1] Mullis C T, Roberts R A. Synthesis of minimum round off noise fixed-point digital filters [J]. IEEE Transactions Circuits and Systems, 1976, 23(9): 551 - 562.
- [2] Wong N, Ng T S. A generalized direct-form delta operator-based IIR filter with minimum noise gain and sensitivity [J]. IEEE Transactions Circuits and Systems-II, 2001, 48(4): 425 - 431.
- [3] 尚勇, 吴顺君. 一种新的 FIR 滤波器脉动实现结构 [J]. 电子学报, 2000, 28(1): 57 - 59.  
Shang Y, Wu S J. A novel structure of systolic implementation for FIR filter [J]. Acta Electronica Sinica, 2000, 28(1): 57 - 59. (in Chinese)
- [4] 唐长文, 张洁, 闵昊. 一种新型的高速 FIR 滤波器及其 VLSI 实现 [J]. 电子学报, 2002, 30(2): 153 - 155.  
Tang Z W, Zhang J, Min H. A new high-speed FIR filter structure and VLSI implementation [J]. Acta Electronica Sinica, 2002, 30(2): 153 - 155. (in Chinese)
- [5] Li G, Zhao Z X. On the generalized DFII structure and its

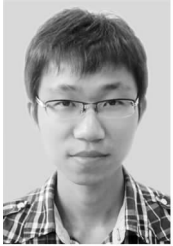
- state-space realization in digital filter implementation [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I, 2004, 51(4): 769 - 778.
- [6] Li G, Gevers M, Sun Y X. Performance analysis of a new structure for digital filter implementation [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I, 2000, 47(4): 474 - 482.
- [7] Roberts R A, Mullis C T. Digital Signal Processing [M]. MA: Addison Wesley, 1987.
- [8] Gevers M, Li G. Parameterizations in Control, Estimation and Filtering Problems: Accuracy Aspects [M]. Springer Verlag London, Communication and Control Engineering Series, 1993.
- [9] Li G, Huang C G, Hua J Y, et al. An improved orthogonal digital filter structure [J]. Signal Processing (Elsevier), 2010, 90(2): 679 - 683.
- [10] Lim Y C, Parker S R. FIR filter design over a discrete power-of-two coefficient space [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, Signal Processing, 1983, 31(6): 583 - 591.
- [11] Lim Y C. Design of discrete-coefficient-value linear phase FIR filters with optimum normalized peak ripple magnitude [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1990, 37(12): 1480 - 1486.
- [12] Yu Y J, Lim Y C. Design of linear phase FIR filters in subexpression space using mixed integer linear programming [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Regular Papers, 2007, 54(10): 2330 - 2338.
- [13] Gray, Jr A H, Markrl J D. Digital lattice and ladder filter synthesis [J]. IEEE Transactions Audio and Electroacoustics, 1973, 21(12): 491 - 500.
- [14] Gray, Jr A H, Markrl J D. Fixed-point implementation algorithms for a class of orthogonal polynomial filter structures [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, Signal Processing, 1975, 23(10): 486 - 494.
- [15] 张世平, 赵永平, 张绍卿, 等. 一种改进的自适应格型陷波算法及其收敛性分析 [J]. 电子学报, 2004, 32(2): 338 - 341.  
Zhang S P, Zhao Y P, Zhang S Q, et al. A modified adaptive algorithm of lattice notch filter and its convergence analysis [J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 32(2): 338 - 341. (in Chinese)
- [16] Lim Y C. On the synthesis of IIR digital filters derived from single channel AR lattice network [J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, Signal Processing, 1984, 32(4): 741 - 749.
- [17] Li G, Lim Y C, Huang C G. Very robust low complexity lattice filters [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(12): 6093 - 6104.
- [18] Huang C G, Li G, Xu Z X, et al. Design of optimal digital lattice filter structures based on genetic algorithm [J]. Signal Processing (Elsevier), 2012, 92(4): 989 - 998.

## 作者简介



**于爱华** 男,1975 年 10 月出生于江苏海安.在读博士研究生,讲师.主要研究方向为信号处理及主动噪声控制系统设计.

E-mail: yuaihua\_seu@163.com



**黄朝耿(通信作者)** 男,1985 年 8 月出生于浙江瑞安.在读博士研究生.主要研究方向为数字滤波器结构设计与实现.

E-mail: huangchaogengby@163.com



**李刚** 男,1961 年 1 月出生于山东淄博.教授,博士生导师.1982 年在北京工业学院(现北京理工大学)获得学士学位,1988 年和 1990 年在比利时鲁汶大学分别获得硕士学位和博士学位.1990 年 11 月至 1992 年 4 月,在比利时鲁汶大学任博士后研究员,从事研究工作.1992 年 5 月至 2007 年 1 月,在新加坡南洋理工大学电气电子工程学院从事教学与科研工作.2007 年 2 月作为浙江省钱江学者特聘教授进入浙江工业大学信息学院.主要从事数字系统结构设计、自适应信号处理和信号变换等方面的研究工作.

E-mail: ieligang@zjut.edu.cn