

# 旋转长基线干涉仪测向方法及性能分析

张 敏<sup>1</sup>, 郭福成<sup>1</sup>, 李 腾<sup>2</sup>, 周一宇<sup>1</sup>

(1. 国防科技大学电子科学与工程学院, 湖南长沙 410073; 2. 海军装备研究院, 北京 100161)

**摘 要:** 针对传统多通道干涉仪和阵列测向系统复杂、易受通道间幅相不一致性影响, 分析了旋转长基线干涉仪(RLBI)测向的两类相位差观测模型, 进而推导了无模糊测向条件, 提出了一种基于多假设伪线性迭代最小二乘(MHPILS)的测向方法, 并分析了测向误差克拉美-罗下限(CRLB)和均方误差(MSE). 仿真结果表明该方法运算量适中, 测向精度可接近 CRLB.

**关键词:** 测向; 长基线干涉仪; 相位差模糊; 最小二乘; 克拉美-罗下限

**中图分类号:** TN971 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2013) 12-2422-08

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.12.016

## A Direction Finding Method and Analysis Based on the Rotated Long Baseline Interferometer

ZHANG Min<sup>1</sup>, GUO Fu-cheng<sup>1</sup>, LI Teng<sup>2</sup>, ZHOU Yi-yu<sup>1</sup>

(1. College of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha, Hunan 410073, China;

2. Naval Academy of Armament, Beijing 100161, China)

**Abstract:** Due to the complexity and amplitude-phase inconsistencies in traditional multi-channel interferometer and array, two phase difference observation models for direction finding based on the rotated long baseline interferometer(RLBI) is analyzed. The unambiguous direction finding conditions for the proposed models are derived. A multiple hypothesis pseudolinear iteration least square(MHPILS) algorithm is proposed. The Cramer-Rao low bound(CRLB) and mean square error(MSE) is also analyzed. The simulation results show that this method achieves moderate computation amount and can attain the CRLB.

**Key words:** direction finding; long baseline interferometer; phase difference ambiguity; least square; Cramer-Rao lower bound

## 1 引言

估计辐射源来波方向(Angle Of Arrival, AOA), 又称之为测向, 在无线电探测、侦察、监视、预警等领域具有重要应用价值<sup>[1~14]</sup>. 测向常用三种方式: (1) 比幅测向<sup>[1]</sup>, 复杂信号适应能力强, 但测向精度通常不高. (2) 空间谱测向<sup>[2]</sup>, 虽然能获得较好的测向精度和分辨能力, 但需要对信号和噪声建模, 对信号模型失真敏感, 且数据量和运算量较大. (3) 相位干涉仪测向<sup>[3]</sup>, 基线越长, 测向精度越高, 但通常由于相位差(Phase Difference, PD)测量出现  $2\pi$  模糊, 需要多个长短基线干涉仪组合解模糊<sup>[4~6]</sup>, 面临接收通道幅相一致性和系统复杂等问题, 另外对天线布阵也有一定的限制.

为了降低系统复杂性和通道一致性要求, 同时又具有较高的测向精度, 一种可行的方式是利用旋转长基线

干涉仪<sup>[7~13]</sup>(Rotated Long Baseline Interferometer, RLBI)在不同转角下测量的相位差序列估计来波方向. 与传统多通道干涉仪和阵列测向相比, RLBI 系统通常仅需单个长基线即可实现测向, 系统复杂性和通道一致性要求大为减低. 文献[7]使用旋转基线测量的 GPS(Global Positioning System)载波相位确定基线指向矢量; 文献[8]利用高空或天基观测平台上的 RLBI 测模糊相位差进行定位; 文献[9]利用静止轨道卫星上的 RLBI 测量的模糊相位差估计方位和俯仰角; 文献[10~13]研究了利用弹体自身旋转形成的旋转基线一维测向方法, 文献[12]和文献[13]中给出了旋转基线相位差解模糊方法.

利用旋转长基线干涉仪测向系统的主要问题在于使用了单个长基线, 存在相位差  $2\pi$  模糊, 无法实现单脉冲测向, 需要累积一段观测时间内不同转角下的多个相位差才能无模糊测向. 因此, RLBI 需要累积多长的观测

时间才能实现无模糊测向?至少需要多少组相位差实现无模糊测向?RLBI 相位差存在什么特性?这些特性对测向有什么影响?文献[9~13]未对这些问题进行分析和研究.

文献[9~13]中的旋转长基线干涉仪测向方法实际上可看作两步法,即先利用 RLBI 模糊相位差,通过解模糊得到相位差余弦(或正弦)时变序列,然后通过提取相位序列的初相和幅度信息得到测向结果.因此当转速出现时变,或辐射频段较高、转速较快、雷达脉冲重复频率较低、信噪比较低等导致相邻两次相位差之间的变化大于  $\pi$  时,无法得到余弦变化规律的相位差序列,这些方法将不再适用.而直接利用模糊相位差建立的代价函数进行最优化寻优的测向方法,如相关干涉仪方法<sup>[14]</sup>,类似于文献[15]中的直接定位方法,可看作一步法或直接测向方法,与两步法相比具有更好的稳健性和适应性.但基于网格搜索的相关干涉仪测向,网格划分得足够小才能得到较好的结果,这样需要消耗大量的计算和存储资源.粒子群优化(Particle Swarm Optimization, PSO)<sup>[16]</sup>等智能优化算法,具有一定全局寻优的能力,相对于网格搜索运算量较小,可用于相关干涉仪测向,但是由于 PSO 采用随机搜索策略,所以其全局寻优能力并不是十分可靠<sup>[17]</sup>.通过增大粒子数量提高测向性能,同样会使运算量显著增加.另外,相关干涉仪测向方法通常没有充分利用模糊相位差中隐含的来波方向先验信息.

针对上述问题,本文通过分析 RLBI 相位差相对无模糊和相对模糊两种模型,理论推导了无模糊测向条件.利用 RLBI 相位差的模糊特性,提出了一种多假设伪线性迭代最小二乘(Multiple Hypothesis Pseudolinear Iteration Least Square, MHPILS)测向方法,通过模糊的相位差得到多组测向初值,采用线性最小二乘方法进行迭代计算,通过检测最小相位误差确定来波方向.该方法为一步法,即直接测向方法,与文献[9~13]相比对低信噪比具有更好的适应能力;与传统的相关干涉仪测向相比,由于利用了 RLBI 模糊相位差提供初始值,且仅采用线性最小二乘进行计算,具有更少的运算量.

为便于后文讨论,首先给出一些数学符号的定义:  $T$  表示矩阵转置运算,  $\text{mod}$  表示取模运算,  $\lfloor \cdot \rfloor$  表示向下取整运算,  $|\cdot|$  表示取绝对值运算,  $\|\cdot\|_2$  表示取 2 范数运算,  $I_N$  表示  $N \times N$  维单位矩阵,  $\mathbf{0}_N$  表示  $N \times N$  维零矩阵.

## 2 RLBI 测向模型

本文方位角  $\alpha \in [-\pi, \pi)$  定义为来波与  $X$  轴正方向的夹角,绕逆时针旋转为正角度,俯仰角  $\beta \in [0, \pi/2)$  定义为来波与  $XOY$  平面的夹角.干涉仪基线长度为  $d$ ,

干涉仪中点与坐标系原点重合,绕原点在  $XOY$  平面上旋转.假设远场窄带辐射源波长为  $\lambda$ ,在观测时刻  $t_n$ ,转动的干涉仪基线方位安装角为  $\theta_n \in [-\pi, \pi)$ ,俯仰安装角  $\varepsilon_n = 0$ ,干涉仪测量得到的无模糊相位差<sup>[8]</sup>为:

$$\phi_n = \kappa \mathbf{r}^T \mathbf{b}_n + \delta_n, n = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{r} = [\sin\alpha \cos\beta, \cos\alpha \cos\beta, \sin\beta]^T$  为视向矢量,  $\mathbf{b}_n = [\sin\theta_n \cos\varepsilon_n, \cos\theta_n \cos\varepsilon_n, \sin\varepsilon_n]^T$  为基线指向矢量,  $\kappa = 2\pi d/\lambda$ ,  $\delta_n$  为相位差测量误差,假设服从均值为零、方差为  $\sigma_n^2$  的高斯分布,并假设在观测时间内各误差独立同分布,即  $\sigma_n^2 = \sigma^2$ .在式(1)的模型中,不要求干涉仪匀速转动.

对于长基线干涉仪,通常有  $d > \lambda/2$ ,因此测量的相位差会出现  $2\pi$  模糊:

$$\psi_n = (\kappa \mathbf{r}^T \mathbf{b}_n + \delta_n) \bmod 2\pi \quad (2)$$

其中,  $\psi_n \in [-\pi, \pi)$  为实际测量相位差.

从式(2)可以看到,模糊相位差中包含了辐射源角度信息,通过多次测量模糊相位差,有可能估计出方位和俯仰角.然而由于相位差  $2\pi$  模糊问题,单个时刻无法得到唯一的角度.下面通过分析 RLBI 相位差特性,推导无模糊测向的条件.

### 2.1 相对无模糊相位差模型

根据相邻相位差之间的变化特性,将 RLBI 测向模型分为相对无模糊和相对模糊的两类模型.

**定义 1** 若相邻两次相位差差分  $\phi_{n+1,n} = \phi_{n+1} - \phi_n$  之间满足:

$$|\phi_{n+1,n}| \leq \pi \quad (3)$$

称相位差存在相对无模糊.

**引理 1** 若相邻两次测量基线转动的角度  $\theta_{n+1,n} \leq \pi/2$ ,则当  $\theta_{n+1,n} \leq 2\arcsin[\lambda/(4d\cos\beta)]$  时,对任意方位来波方向,RLBI 相位差相对无模糊.

证明:在相邻的两次相位差测量时刻  $t_{n+1}$  和  $t_n$ ,基线对应的角度为  $\theta_{n+1}$  和  $\theta_n$ ,对应的相位差为:

$$\phi_{n+1} = \kappa \cos(\theta_{n+1} - \alpha) \cos\beta \quad (4)$$

$$\phi_n = \kappa \cos(\theta_n - \alpha) \cos\beta \quad (5)$$

对应的相位差差分  $\phi_{n+1,n}$  为:

$$\phi_{n+1,n} = \phi_{n+1} - \phi_n = -2\kappa \cos\beta \sin[(\theta_{n+1} + \theta_n)/2 - \alpha] \times \sin[(\theta_{n+1} - \theta_n)/2] \quad (6)$$

由存在相对无模糊定义则有:

$$|\phi_{n+1,n}| \leq 2\kappa \cos\beta |\sin(\theta_{n+1,n}/2)| \leq \pi \quad (7)$$

由  $\theta_{n+1,n} = \theta_{n+1} - \theta_n \leq \pi/2$  可得:

$$\theta_{n+1,n} \leq 2\arcsin[\lambda/(4d\cos\beta)] \quad (8)$$

引理 1 得证. ■

**推论 1** 当  $\theta_{n+1,n} \leq 2\arcsin[\lambda/(4d)]$  时,对任意来波方向,RLBI 相位差存在相对无模糊.

证明:由引理 1, 利用  $0 \leq \beta \leq \pi/2$  及余弦函数的单调性即可证明. ■

**定义 2** 若 RLBI 的相位差  $\phi_m$  和  $\phi_n$  对应的转角  $\theta_n$  和  $\theta_m$  满足:

$$(\theta_n - \theta_m) \bmod \pi \neq 0 \quad (9)$$

则称相位差为互异相位差.

**定理 1** 当相对无模糊的互异相位差观测数量  $N \geq 3$  时, 对任意来波方向, RLBI 可无模糊测向.

证明:由定义 1 可知, 当相位差之间存在相对无模糊时, 如图 1 所示, 以第一个相位差为起点, 后续测量的相位差都通过相位差解模糊, 得到相对于第一个相位差的无模糊相位差.

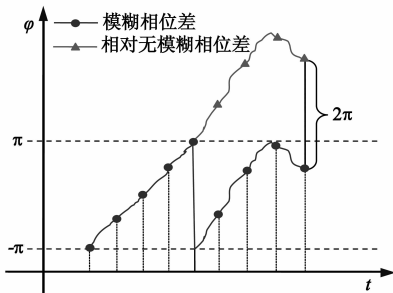


图1 相对无模糊相位差示意图

在此条件下, 式(2)对应的模糊相位差模型为:

$$\varphi_n = \kappa \cos(\theta_n - \alpha) \cos \beta + 2\pi N_1 + \delta_n \quad (10)$$

其中,  $\varphi_n$  为相对于第一个相位差的无模糊相位差,  $N_1$  为第一个相位差对应的未知的  $2\pi$  模糊数.

由式(10)可以看到, 当存在至少 3 组互异相位差即可确定方位角  $\alpha$ 、俯仰角  $\beta$  和模糊数  $N_1$ . ■

由式(10)的相位差模型可得:

$$\varphi_n = \kappa \sin \theta_n \sin \alpha \cos \beta + \kappa \cos \theta_n \cos \alpha \cos \beta + 2\pi N_1 + \delta_n \quad (11)$$

将式(11)中的未知项写为向量形式:

$$\mathbf{x} = [\sin \alpha \cos \beta, \cos \alpha \cos \beta, 2\pi N_1]^T \quad (12)$$

将观测数据写成矩阵形式可得:

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{E} \quad (13)$$

其中,  $\mathbf{\Phi} = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N]^T$ ,  $\mathbf{E} = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N]^T$ ,

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3], \mathbf{H}_3 = [1, 1, \dots, 1]^T,$$

$$\mathbf{H}_2 = [\kappa \cos \theta_1, \kappa \cos \theta_2, \dots, \kappa \cos \theta_N]^T,$$

$$\mathbf{H}_1 = [\kappa \sin \theta_1, \kappa \sin \theta_2, \dots, \kappa \sin \theta_N]^T.$$

当相位差满足定理 1 条件, 由式(13), 利用伪线性最小二乘 (Pseudolinear Least Square, PLS) 方法<sup>[18]</sup>即可估计出辐射源来波方向.

由于受相位差测量误差以及转角大小的影响, 仅 3 组相对无模糊相位差得到的测向精度不高, 需要累积多次测量以提高测向精度.

## 2.2 相对模糊相位差模型

**定义 3** 若相邻两次相位差之间满足:

$$|\phi_{n+1, n}| > \pi \quad (14)$$

称相位差存在相对模糊.

当相邻两次相位差测量存在相对模糊时, 不能提取出相位差的余弦变化曲线. 如数据丢失、辐射频段较高、转速较快、雷达脉冲重复频率较低、信噪比较低等情况都可能造成相位差之间存在相对模糊. 对于这些条件下的 RLBI 测向有如下结论:

**定理 2** 当互异相位差观测数量  $N > 2[\lfloor 2(1 + \cos \beta) d / \lambda \rfloor + 1]$  时, 对任意方位来波方向, RLBI 可无模糊测向.

证明:利用反证法进行证明. 假设存在模糊的辐射源, 对应的方位角为  $\alpha_a$ , 俯仰角为  $\beta_a$ , 对应的相位差为:

$$\phi_{an} = \kappa \cos(\theta_n - \alpha_a) \cos \beta_a = \kappa \mathbf{r}_a^T \mathbf{b}_n \quad (15)$$

其中,  $\mathbf{r}_a = [\sin \alpha_a \cos \beta_a, \cos \alpha_a \cos \beta_a]^T$ ,

$$\mathbf{b}_n = [\sin \theta_n, \cos \theta_n]^T.$$

真实辐射源的相位差为:

$$\phi_n = \kappa \cos(\theta_n - \alpha) \cos \beta = \kappa \mathbf{r}^T \mathbf{b}_n \quad (16)$$

其中,  $\mathbf{r} = [\sin \alpha \cos \beta, \cos \alpha \cos \beta]^T$ .

真实辐射源和模糊辐射源的相位差分为:

$$\Delta \phi_n = \phi_{an} - \phi_n = \kappa \Delta \mathbf{r}^T \mathbf{b}_n \quad (17)$$

其中,  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_a - \mathbf{r} = \rho [\sin \vartheta, \cos \vartheta]^T$ ,

$$\vartheta = \arctan(\Delta \mathbf{r}(1, 1) / \Delta \mathbf{r}(2, 1)),$$

$$\rho = \sqrt{\cos^2 \beta_a + \cos^2 \beta - 2 \cos \beta_a \cos \beta \cos(\alpha_a - \alpha)}.$$

由此可得:

$$\Delta \phi_n = \kappa \rho \cos(\theta_n - \vartheta) \quad (18)$$

在式(18)中,  $\rho \leq \cos \beta_a + \cos \beta < 2$ , 可以看到,  $\Delta \phi_n$  随着干涉仪转角余弦变化.

对  $N$  次观测, 根据模糊相位差方程, 对于任意位置的辐射源, 其为模糊点的条件是, 对于任意一次观测  $n$ , 均存在一个整数  $k_n$  使得下式成立

$$2\pi d \mathbf{r}_a^T \mathbf{b}_n / \lambda = 2\pi d \mathbf{r}^T \mathbf{b}_n / \lambda + 2k_n \pi \quad (19)$$

因此共有  $N$  个这样的整数, 并且这  $N$  个整数不能全为 0:

$$\Delta \mathbf{r}^T \mathbf{b}_n = \lambda k_n / d \quad (20)$$

根据式(18), 随着  $\theta_n$  的变化,  $\Delta \phi_n$  按照余弦规律变化, 在一个周期内的变化使式(20)成立的整数最多有  $2\lfloor \rho d / \lambda \rfloor + 1$  个, 且其中有一个整数为 0. 由于余弦函数在一个周期内最多存在两个相同的值, 所以在  $2\lfloor \rho d / \lambda \rfloor + 1$  个整数中, 每个整数最多对应两次观测; 而 0 对应的两次观测干涉仪基线方位角相差  $\pi$ , 这两次观测应该视为一次观测.

根据以上分析可得, 若存在模糊辐射源, 则最多存

在  $2(2\lfloor \rho d/\lambda \rfloor) + 1$  次观测满足式(19)的条件,因此,若观测次数  $N$  大于  $2(2\lfloor \rho d/\lambda \rfloor) + 1$ ,则至少有一次观测不能使式(19)成立.

由式(17)可知,  $\rho < 1 + \cos\beta$ ,则当观测次数

$$N > 2[2\lfloor (1 + \cos\beta)d/\lambda \rfloor] + 1 \quad (21)$$

任意方位上的辐射源都不会成为模糊点,即对任意方位来波方向可无模糊测向. ■

**推论 2** 当互异相位差数量  $N > 2[2\lfloor 2d/\lambda \rfloor] + 1$  时,对任意来波方向,RLBI 可无模糊测向.

证明:由定理 2,利用  $\cos\beta \leq 1$  即可证明. ■

当满足定理 2 给出的相位差测量数量时,理论上可对任意俯仰角上的辐射源无模糊测向.当满足推论 2 中给出相位差测量数量时,理论上可对任意来波方向的辐射源无模糊测向.

### 3 RLBI 测向算法

当相位差存在相对模糊时,若利用式(11)~(13)的形式,采用 PLS 方法进行迭代计算,只有当选择的初值在真值附近时,  $2\pi$  取模运算的影响才能去掉.但由于无法事先获知这一先验信息,受文献[8]中无源定位方法的启发,本文利用旋转长基线干涉仪相位差在观测空间内选取多个初值,对每个初值采用 PLS 方法进行迭代计算,只要有一个初值落在真值附近,通过选取最小代价函数即可确定方位和俯仰角估计值.此即本文提出的多假设伪线性迭代最小二乘(MHPILS)测向方法的基本思路.

#### 3.1 MHPILS 方法

测向算法主要步骤如下:

**Step1** 确定辐射源来波方向初始值  $\mathbf{u}_m = [\alpha_m, \beta_m]^T$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ ,从而得到伪线性最小二乘的初值:

$$\mathbf{x}_m = [\sin\alpha_m \cos\beta_m, \cos\alpha_m \cos\beta_m, 2\pi N_{m1}]^T \quad (22)$$

**Step2** 利用  $\mathbf{x}_m$  给定的初值计算系数矩阵  $\mathbf{H}$  和相位差预测值  $\Phi_m$ ,从而得到相位差测量值和预测值之间的残差:

$$\mathbf{z}_m = (\Phi - \Phi_m) \bmod 2\pi \quad (23)$$

**Step3** 由最小二乘可得:

$$\hat{\mathbf{x}}_m = \mathbf{x}_m + (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{z}_m \quad (24)$$

**Step4** 判断迭代是否满足收敛条件,可将  $\|\hat{\mathbf{x}}_m - \mathbf{x}_m\|_2$  与设置的门限或者将迭代次数与最大迭代次数进行比较.若满足条件则转入 Step5,否则令  $\mathbf{x}_m = \hat{\mathbf{x}}_m$ ,转入 Step2 继续进行迭代计算;

**Step5** 判断  $\|\hat{\mathbf{x}}_m\|_2$  若大于 1 则转入 Step7,否则计算该估计值对应的检验量  $C(m)$ :

$$C(m) = \mathbf{z}_m^T \mathbf{z}_m \quad (25)$$

**Step6** 计算方位和俯仰角的估计值:

$$\hat{\alpha}_m = \arctan(\hat{\mathbf{x}}_m(1,1)/\hat{\mathbf{x}}_m(2,1)) \quad (26)$$

$$\hat{\beta}_m = \arccos(\sqrt{\hat{\mathbf{x}}_m^2(1,1) + \hat{\mathbf{x}}_m^2(2,1)}) \quad (27)$$

**Step7** 判断  $m$  若等于  $M$  则转入 Step8,否则令  $m = m + 1$ ,转入 Step2 继续处理剩余初始值;

**Step8** 将检验量  $C(m)$  最小值对应的估计值作为来波方向的估计值:

$$[\hat{\alpha}, \hat{\beta}] = \min_m C(m) \quad (28)$$

#### 3.2 初始化方法

上述算法中,关键是如何获得角度初始值.初始值的选取有多种方式.针对 RLBI 的特点,利用具有一定转角(如  $90^\circ$ )的两个模糊相位差  $\psi_i$  和  $\phi_l$ ,以及对应的转角  $\theta_i$  和  $\theta_l$  选取初始值.

由基线长度  $d$  可确定两个模糊相位差模糊数的取值范围  $k, h \in [-\lfloor d/\lambda \rfloor, \lfloor d/\lambda \rfloor]$ .对每组模糊数  $k$  和  $h$ ,由  $\psi_i$  和  $\phi_l$  以及对应的转角  $\theta_i$  和  $\theta_l$ ,分别计算无模糊相位差和系数矩阵:

$$\mathbf{z}_{kh} = [\psi_i + 2\pi k, \phi_l + 2\pi h]^T \quad (29)$$

$$\mathbf{H}_{il} = \begin{bmatrix} \kappa \sin\theta_i & \kappa \cos\theta_i \\ \kappa \sin\theta_l & \kappa \cos\theta_l \end{bmatrix} \quad (30)$$

根据最小二乘可得:

$$\mathbf{x}_{kh} = (\mathbf{H}_{il}^T \mathbf{H}_{il})^{-1} \mathbf{H}_{il}^T \mathbf{z}_{kh} \quad (31)$$

若  $\|\mathbf{x}_{kh}\|_2$  大于 1,不能构成单位视线矢量,因此舍去该组模糊数对应的初值.否则计算得到对应的方位和俯仰角的初始值:

$$\hat{\alpha}_{kh} = \arctan(\mathbf{x}_{kh}(1,1)/\mathbf{x}_{kh}(2,1)) \quad (32)$$

$$\hat{\beta}_{kh} = \arccos(\sqrt{\mathbf{x}_{kh}^2(1,1) + \mathbf{x}_{kh}^2(2,1)}) \quad (33)$$

由此通过遍历  $k$  和  $h$ ,计算得到初值,且最多可获得  $M \leq (2\lfloor d/\lambda \rfloor + 1)^2$  组方位和俯仰角初值.

### 4 性能分析

#### 4.1 测向误差的 CRLB

下面分析无模糊相位差条件下的测向误差克拉美-罗下限(Cramer-Rao Lower Bound, CRLB),作为评价 RLBI 测向性能指标.由(1)式可得到关于方位和俯仰角的 Jacobi 矩阵为:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \kappa \sin(\theta_1 - \alpha) \cos\beta & -\kappa \cos(\theta_1 - \alpha) \sin\beta \\ \kappa \sin(\theta_2 - \alpha) \cos\beta & -\kappa \cos(\theta_2 - \alpha) \sin\beta \\ \vdots & \vdots \\ \kappa \sin(\theta_N - \alpha) \cos\beta & -\kappa \cos(\theta_N - \alpha) \sin\beta \end{bmatrix} \quad (34)$$

由此可得 Fisher 信息矩阵<sup>[18]</sup>为:

$$\mathbf{F} = \sigma^{-2} \mathbf{J}^T \mathbf{J} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \quad (35)$$

其中,  $f_{11} = \frac{\kappa^2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N [\sin(\theta_n - \alpha) \cos \beta]^2$ ,

$$f_{12} = -\frac{\kappa^2}{4\sigma^2} \sum_{n=1}^N \sin(2\theta_n - 2\alpha) \sin 2\beta,$$

$$f_{21} = -\frac{\kappa^2}{4\sigma^2} \sum_{n=1}^N \sin(2\theta_n - 2\alpha) \sin 2\beta,$$

$$f_{22} = \frac{\kappa^2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N [\cos(\theta_n - \alpha) \sin \beta]^2.$$

令  $\boldsymbol{\theta} = [\alpha, \beta]^T$ , 由 CRLB 的定义<sup>[18]</sup>可得:

$$\text{CRLB}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{F}^{-1} \quad (36)$$

当相位差测量对应的转角在  $[-\pi, \pi]$  之间均匀或近似均匀分布且基线转过整周, 由文献<sup>[19]</sup>可知:

$$\sum_{n=1}^N \sin^2(\theta_n - \alpha) \approx \sum_{n=1}^N \cos^2(\theta_n - \alpha) \approx N/2 \quad (37)$$

$$\sum_{n=1}^N \sin(2\theta_n - 2\alpha) \approx \sum_{n=1}^N \cos(2\theta_n - 2\alpha) \approx 0 \quad (38)$$

由此可得:

$$\mathbf{F} \approx \begin{bmatrix} N\kappa^2 \cos^2 \beta / (2\sigma^2) & 0 \\ 0 & N\kappa^2 \sin^2 \beta / (2\sigma^2) \end{bmatrix} \quad (39)$$

在上述情况下测向的 CRLB 可化简为:

$$\sigma_\alpha \geq \frac{\lambda\sigma}{\sqrt{2N\pi d \cos \beta}} \quad (40)$$

$$\sigma_\beta \geq \frac{\lambda\sigma}{\sqrt{2N\pi d \sin \beta}} \quad (41)$$

## 4.2 MHPILS 测向方法误差的 MSE

下面分析本文测向方法的均方根误差 (Mean Square Error, MSE). 在一定的相位差误差条件下, 使得算法的估计值落在真值附近, 由噪声假设  $\mathbf{W} = \sigma^2 \mathbf{I}_N$ , 可得最小二乘估计误差协方差为:

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{H}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{H})^{-1} = \sigma^2 (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \quad (42)$$

令  $\mathbf{H}_{12} = [\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2]$ , 由分块矩阵特性可得:

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{12}^T \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{12}^T \mathbf{H}_3 \\ \mathbf{H}_3^T \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_3^T \mathbf{H}_3 \end{bmatrix} \quad (43)$$

令  $\mathbf{A} = \mathbf{H}_{12}^T \mathbf{H}_{12}$ ,  $\mathbf{U} = \mathbf{H}_{12}^T \mathbf{H}_3$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{H}_3^T \mathbf{H}_3$ ,  $\mathbf{V} = \mathbf{H}_3^T \mathbf{H}_{12}$ , 由矩阵求逆引理<sup>[20]</sup>可得:

$$(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} - \mathbf{U} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{V})^{-1} & -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{U} (\mathbf{D} - \mathbf{V} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U})^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{V} (\mathbf{A} - \mathbf{U} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{V})^{-1} & (\mathbf{D} - \mathbf{V} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U})^{-1} \end{bmatrix} \quad (44)$$

令  $\mathbf{u} = [\mathbf{x}(1, 1), \mathbf{x}(2, 1)]^T$ , 由此可得:

$$\mathbf{Q}_u = \sigma^2 (\mathbf{A} - \mathbf{U} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{V})^{-1} \quad (45)$$

当相位差测量对应的转角在  $[-\pi, \pi]$  之间均匀或近似均匀分布且基线转过整周时, 由文献<sup>[19]</sup>可知:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \sin \theta_n \sum_{n=1}^N \sin \theta_n &\approx \sum_{n=1}^N \sin \theta_n \sum_{n=1}^N \cos \theta_n \\ &\approx \sum_{n=1}^N \cos \theta_n \sum_{n=1}^N \cos \theta_n \approx 0 \end{aligned} \quad (46)$$

在上述条件下有:

$$\mathbf{U} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{V} = \frac{\kappa^2}{N} \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N \sin \theta_n \sum_{n=1}^N \sin \theta_n & \sum_{n=1}^N \sin \theta_n \sum_{n=1}^N \cos \theta_n \\ \sum_{n=1}^N \sin \theta_n \sum_{n=1}^N \cos \theta_n & \sum_{n=1}^N \cos \theta_n \sum_{n=1}^N \cos \theta_n \end{bmatrix} \approx \mathbf{0}_2 \quad (47)$$

因此由式(45)和式(47)有:

$$\mathbf{Q}_u \approx \sigma^2 \mathbf{A}^{-1} = \frac{\sigma^2}{\kappa^2} \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N \sin^2 \theta_n & \sum_{n=1}^N \sin \theta_n \cos \theta_n \\ \sum_{n=1}^N \sin \theta_n \cos \theta_n & \sum_{n=1}^N \cos^2 \theta_n \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\approx \frac{2\sigma^2}{N\kappa^2} \mathbf{I}_2$$

算法对应的方位和俯仰角估计为:

$$\hat{\alpha} = \arctan(\mathbf{u}(1, 1) / \mathbf{u}(2, 1)) \quad (49)$$

$$\hat{\beta} = \arccos(\sqrt{\mathbf{u}(1, 1)^2 + \mathbf{u}(2, 1)^2}) \quad (50)$$

对上式求关于  $\mathbf{u}$  的全微分, 并注意到  $\mathbf{u}(1, 1)^2 + \mathbf{u}(2, 1)^2 = \cos^2 \beta$ ,  $\beta \in [0, \pi/2)$ , 可得:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} & -\frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \\ -\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} & -\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \end{bmatrix} \quad (51)$$

由此可得估计的误差方差为:

$$\text{MSE}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{Q}_u \frac{\partial \boldsymbol{\theta}^T}{\partial \mathbf{u}} \approx \frac{2\sigma^2}{N\kappa^2} \begin{bmatrix} 1/\cos^2 \beta & 0 \\ 0 & 1/\sin^2 \beta \end{bmatrix} \quad (52)$$

因此算法对应的方位和俯仰角估计误差为:

$$\sigma_{\hat{\alpha}} \approx \frac{\lambda\sigma}{\sqrt{2N\pi d \cos \beta}} \quad (53)$$

$$\sigma_{\hat{\beta}} \approx \frac{\lambda\sigma}{\sqrt{2N\pi d \sin \beta}} \quad (54)$$

由式(40)、(41)和式(53)、(54)的对比可以看到, 当相位差测量对应的转角在  $[-\pi, \pi]$  之间均匀或近似均匀分布且基线转过整周时, 本文算法 MSE 误差接近 CRLB.

## 5 仿真分析

为验证本文测向方法的性能, 采用 Monte Carlo 重复试验统计测向误差. 方位和俯仰角的均方根 (Root Mean Square, RMS) 误差定义为:

$$\text{RMS}(\alpha) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\alpha - \hat{\alpha}_l)^2} \quad (55)$$

$$\text{RMS}(\beta) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\beta - \hat{\beta}_l)^2} \quad (56)$$

其中,  $\hat{\alpha}_l$  和  $\hat{\beta}_l$  为单次仿真得到的方位和俯仰角估计值,  $M$  为 Monte Carlo 仿真次数, 仿真中为 500 次.

典型场景设置如下: 假设辐射源方位角  $70^\circ$ , 俯仰

角 30°, 信号频率 3GHz, 基线长度 1m, 转速 60r/min, 信号观测时间 1s.

**仿真一 CRLB 与 MSE**

图 2 给出了相位差测量误差 15°, 脉冲重频 200Hz, 观测时间 0.1s ~ 3s 内, 本文测向方法 MSE 与 CRLB 的数值比较.

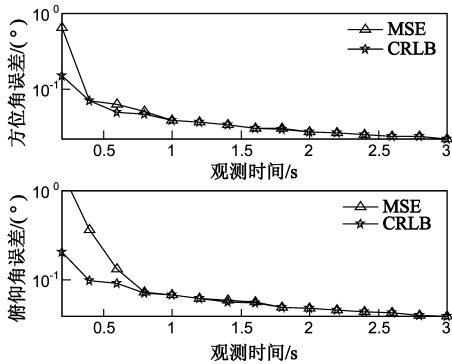


图2 测向算法理论精度与CRLB的比较

从图 2 中可以看到, 本文的测向方法 MSE 在 1s 附近(转过一整圈)接近 CRLB; 随着相位差观测时间超过 1s 后, 本文方法 MSE 接近 CRLB, 验证了前文中得到的结论.

**仿真二 不同重复频率下性能比较**

图 3 给出了相位差测量误差 15° 条件下, 不同脉冲重复频率下本文方法和文献[9]中方法的性能比较. 本文方法中利用转台角度相差 90° 的一组相位差得到初始值, 最大迭代步长设置为 5.

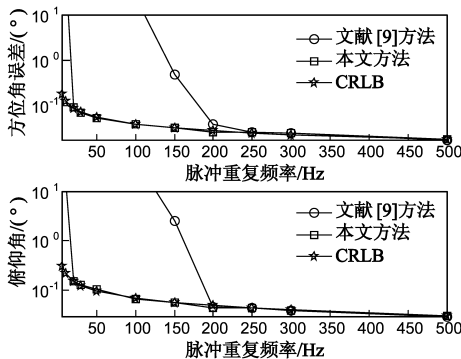


图3 不同脉冲重复频率下的测向性能

从图 3 中可以看到, 在低重频条件下, 相邻两次相位差之间存在相对模糊, 从而无法得到正确的余弦变化相位差序列, 导致文献[9]方法测向误差增大, 而本文方法在重频为 20Hz 条件下仍能有效测向.

**仿真三 相对无模糊——不同算法比较**

图 4 给出了脉冲重频 200Hz 条件下不同相位差误差条件下测向性能. 由引理可知, 在此重频下, 相邻相位差之间存在相对无模糊.

从图 4 可以看到, 文献[9]中的方法测向误差随着相位差误差增大而显著增大, 这是由于相位差测量误差增大(信号信噪比降低)后, 导致提取相位差余弦序列错误, 从而引起较大的测向误差, 而本文方法无需提取相位差余弦曲线的预处理, 因此在低信噪比条件下仍可接近 CRLB.

**仿真四 相对模糊——不同算法比较**

在脉冲重频为 100Hz 条件下, 相位差之间存在相对模糊, 文献[9]的测向方法不再适用. 在此条件下, 图 5 给出了利用相关干涉仪方法<sup>[14]</sup>、PSO 方法<sup>[16]</sup>以及本文方法的性能比较. 相关干涉仪方法中选取本文方法初始点作为搜索网格; PSO 方法中方位角搜索范围为  $[-\pi, \pi)$ , 俯仰角搜索范围为  $[0, \pi/2)$ , 粒子数量与本文方法初始点数量相同为 316, 最大迭代步数为 400, 惯性权重  $\omega$  由 0.9 递减到 0.6, 学习率  $c_1$  和  $c_2$  均为 2.1, 采用本文方法中的代价函数. 图 5(a) 给出了相位差存在相对模糊条件下, 不同算法的方位和俯仰角测量精度; 图 5(b) 给出了对应的测向解模糊概率.

表 1 中给出了三种测向方法在相位差误差 10° 条件下的运算时间. 计算机操作系统为 Microsoft Windows XP, 硬件配置为 Intel® Core™ i5 CPU 750 @ 2.67GHz, 2.66GHz, 内存 3.24GB, 使用 Matlab® 软件进行仿真计算.

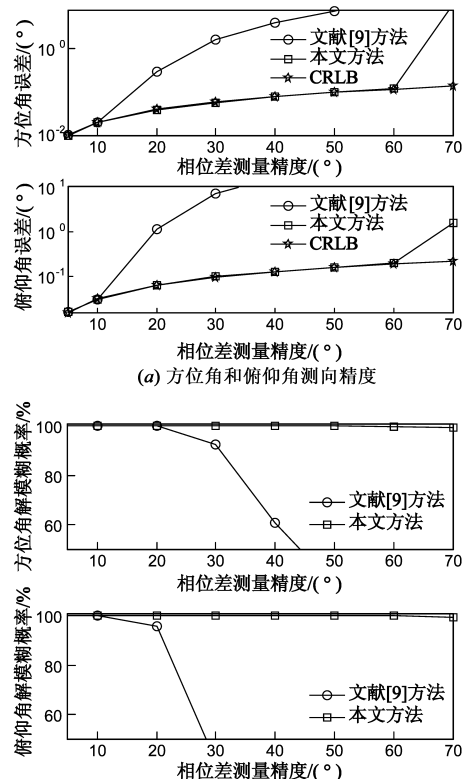


图4 相对无模糊条件下的测向性能

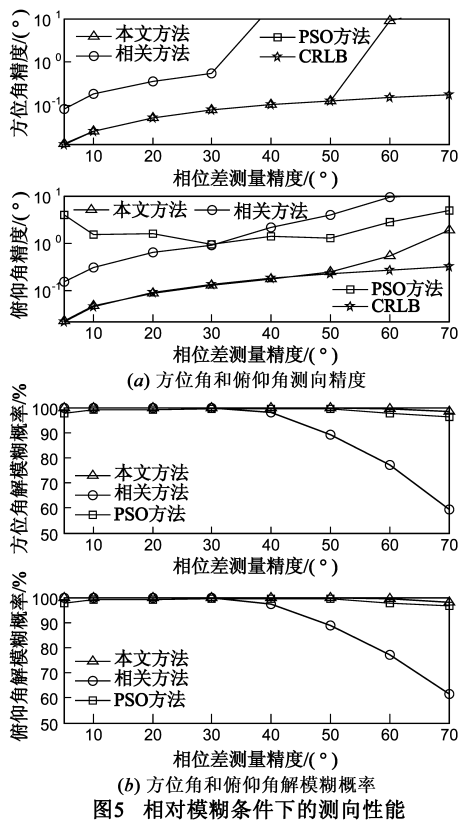


表 1 不同测向算法运算时间

	本文方法	相关方法	PSO方法
耗时	0.07s	0.005s	1.09s

从图 5 和表 1 中仿真结果可以看到,由于网格的选择方式,使得相关干涉仪耗时最少,但存在较大的测向偏差,只有将网格划分得足够小才能得到较好的结果,但会造成计算量显著增加. PSO 方法由于采用随机搜索策略,方位角出现较大的测量野值,俯仰角存在较大偏差,且运算时间在三种方法中最大. 本文方法性能可接近 CRLB 且运算耗时较小.

#### 仿真五 相对模糊——不同粒子数量下算法比较

图 6 给出了脉冲重频为 100Hz 条件下,粒子数量  $P = 474$ 、 $P = 632$  和  $P = 948$  下 PSO 方法和本文方法性能的比较. 图 6(a) 给出了相位差存在相对模糊条件下,不同粒子数量下 PSO 测向与本文方法的方位和俯仰角测量精度;图 6(b) 给出了对应的测向解模糊概率.

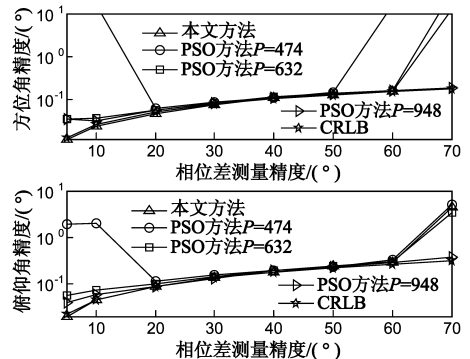
表 2 中给出了在相位差误差  $10^\circ$  条件下,不同粒子数量 PSO 方法和本文方法运算时间比较.

表 2 不同粒子数量测向算法运算时间

	本文方法	$P = 474$	$P = 632$	$P = 948$
耗时	0.07s	1.68s	2.28s	3.30s

从图 6 仿真结果可以看到,随着粒子数量的增大,

PSO 方法性能在相位差误差  $20^\circ \sim 60^\circ$  之间,和本文方法性能相同;在相位差误差  $60^\circ \sim 70^\circ$ ,且粒子数量  $P = 948$  时优于本文算法;但在相位差误差  $5^\circ \sim 20^\circ$  仍不能达到 CRLB. 从表 2 中可以看到,随着粒子数量的增大,运算时间也显著增加.



## 6 结论

利用旋转长基线干涉仪测向,具有系统结构简单,测向精度较高等特点. 在分析了旋转基线相位干涉仪测向模型基础之上,推导了无模糊测向条件. 提出的一种多假设伪线性最小二乘测向方法,运算量较小,通过理论分析和数字仿真表明测向估计精度可接近 CRLB.

## 参考文献

- [1] Yang R, Foo P H, et al. RF emitter geolocation using amplitude comparison with auto-calibrated relative antenna gains[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System, 2011, 47(3): 2098-2110.
  - [2] Schmidt R. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1986, 34(3): 276-280.
  - [3] Macphie R H, Yoon T H. On using the compound interferometer to obtain the power pattern of a conventional receiving array[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2009, 57(10): 3356-3359.
  - [4] Jacobs E, Ralston E W. Ambiguity resolution in interferometry[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1981, 17: 766-780.
  - [5] Shieh C S, Lin C T. Direction of arrival estimation based on phase differences using neural fuzzy network[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2000, 48(7): 1115-1124.
  - [6] 龚享钰, 皇甫堪, 等. 基于相位干涉仪阵列二次相位差的波达角估计算法研究[J]. 电子学报, 2005, 33(3): 444-446.
- Gong Xiangyi, HuangFu Kan, et al. A new algorithm for esti-

- mation of direction of arrival based on second – order difference of phase of interferometer array[J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(3): 444 – 446. (in Chinese)
- [7] Peng H M, Chang F R, et al. Rotation method for direction finding via GPS carrier phases[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2000, 36(1): 72 – 84.
- [8] 李腾, 郭福成, 等. 基于旋转干涉仪模糊相位差的多假设 NLS 定位算法[J]. 电子与信息学报, 2012, 34(4): 956 – 962.  
Li Teng, Guo Fucheng, et al. Multiple hypothesis NLS location algorithm based on ambiguous phase difference measured by a rotating interferometer[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2012, 34(4): 956 – 962. (in Chinese)
- [9] Kawase S. Radio interferometer for geosynchronous satellite direction finding[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System, 2007, 43(2): 443 – 449.
- [10] 任志成. 旋转式相位干涉仪克服测角模糊原理分析[J]. 制导与引信, 1989, 4: 67 – 76.  
Ren Zhicheng. Analysis to resolve the angle-measure ambiguity for rotating phase interferometer[J]. Guidance & Fuze, 1989, 4: 67 – 76. (in Chinese)
- [11] 沈康. 一种旋转式相位干涉仪测角系统研究[J]. 现代电子技术, 2011, 34(15): 26 – 28.  
Shen Kang. Study on angle measuring system based on rotated phase interferometer[J]. Modern Electronics Technique, 2011, 34(15): 26 – 28. (in Chinese)
- [12] 司伟建, 程伟. 旋转干涉仪解模糊方法研究及实现[J]. 火箭与制导学报, 2010, 30(3): 199 – 202.  
Si Weijian, Cheng Wei. Study on solving ambiguity method of rolling interferometer and implementation[J]. Journal of Projectile, Rockets, Missile and Guidance, 2010, 30(3): 199 – 202. (in Chinese)
- [13] 刘鲁涛, 司锡才. 开环旋转相位干涉仪 DOA 算法分析[J]. 解放军理工大学学报, 2011, 12(5): 419 – 424.  
Liu Lutao, Si Xicai. Analysis of DOA algorithm by open loop method of rotating phase interferometer system[J]. Journal of PLA University of Science and Technology, 2011, 12(5): 419 – 424. (in Chinese)
- [14] 李淳, 廖桂生, 等. 改进的相关干涉仪测向处理方法[J]. 西安电子科技大学学报, 2006, 33(3): 400 – 403.  
Li Chun, Liao Guisheng, et al. A DF method for the improved correlative interferometer[J]. Journal of Xidian University, 2006, 33(3): 400 – 403. (in Chinese).
- [15] Oispuu M, Nickel U. Direct detection and position determination of multiple sources with intermittent emission[J]. Signal Processing, 2010, 90: 3056 – 3064.
- [16] 孙俊, 方伟, 等. 量子行为粒子群优化: 原理及其应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2011. 50 – 51.
- [17] van den Bergh F. A new locally convergent particle swarm optimizer[A]. IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics[C]. Tunisia; IEEE Press, 2002. 96 – 101.
- [18] Kay S M. Fundamentals of Statistical Signal Processing, Estimation Theory[M]. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1993. 30 – 36.
- [19] Stoica P, Moses R L, et al. Maximum likelihood estimation of the parameters of multiple sinusoids from noisy measurements[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1989, 37: 378 – 392
- [20] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004. 68 – 70.

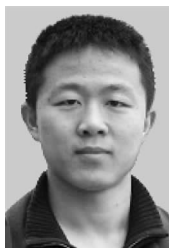
### 作者简介



张 敏 男, 1984 年 11 月生于四川成都. 分别于 2007 年和 2009 年获得北京理工大学和国防科学技术大学工学学士和硕士学位. 现为国防科学技术大学电子科学与工程学院博士研究生. 研究方向为无源定位、空间信息处理技术等.  
E-mail: zhangmin1984@126.com



郭福成 男, 1975 年 5 月生于江西龙南. 现为国防科学技术大学电子科学与工程学院教授、硕士生导师, 获军队科技进步三等奖一项, 国防专利两项, 撰写专著两部. 研究方向为无源定位、综合电子战和空间信息处理技术等.  
E-mail: gfcly@21cn.com



李 腾 男, 1984 年 12 月生于河南信阳. 于 2012 年获得国防科学技术大学工学博士学位. 现为海军装备研究院工程师. 主要研究方向为无源定位、综合电子战技术和系统论证等.

周一宇 男, 1948 年 10 月生于上海. 现为国防科学技术大学电子科学与工程学院教授、博士生导师. 主要研究方向为无源定位技术、综合电子战和空间信息处理技术等.