具比例时滞杂交双向联想记忆神经网络的全局指数稳定性

周立群
(天津师范大学数学科学学院,天津 300387)

摘 要： 对一类具比例时滞杂交双向联想记忆神经网络进行研究,利用 Brouwer 不动点定理证明该网络的平衡点的存在唯一性.利用变换将具比例时滞杂交双向联想记忆神经网络变换成等价的具不等常时滞与变系数杂交双向联想记忆神经网络.利用不等式技巧建立一拟 Halanay 型不等式系统,进而得到了确保该系统全局指数稳定的时滞独立的充分条件.并给出两个算例验证所得结论的正确性.

关键词： 联想记忆；神经网络；比例时滞；Brouwer 不动点定理；全局指数稳定性
中图分类号： O175.13；TP183 **文献标识码：** A **文章编号：** 0372-2112 (2014)01-0096-06
电子学报 URL： http://www.ejournal.org.cn **DOI：** 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.01.015

Global Exponential Stability in Hybrid Bidirectional Associative Memory Neural Networks with Proportional Delays

ZHOU Li-qun
(*School of Mathematics Science, Tianjin Normal University, Tianjin 300387, China*)

Abstract： In this paper, a class of hybrid bidirectional associative memory neural networks with proportional delays is studied. In virtue of Brouwer fixed point theorem, the existence and uniqueness of equilibrium of the system are proved. The transformation transforms the neural networks with proportional delays into the neural networks with unequal constant delays and variable coefficients. By applying inequality techniques, a system of the quasi Halanay-type inequalities is established, and a delay-independent sufficient condition is derived for ensuring the global exponential stability of equilibrium of the system. And two examples are given to illustrate the effectiveness of obtained results.

Key words： bidirectional associative memory; neural networks; proportional delays; Brouwer fixed point theorem; global exponential stability

1 引言

1988年,Kosko 提出双向联想记忆(BAM)神经网络[1],其在信号处理,模式识别、并行计算、联想记忆和解决复杂的优化问题等领域有着广泛的应用[2~5].由于在应用时通常要求 BAM 神经网络的平衡点是全局稳定的,又由于时滞是不可避免的,因此各种时滞 BAM 神经网络的各种稳定性被进行了深入研究[6~15].时滞 BAM 神经网络的稳定性研究主要集中在具常时滞的[6,14,15],时变时滞的[8,10,13],分布时滞的[7,11,12],混合时滞的[9]等.其研究方法主要有 Lyapunov 方法[7~15]、LIM[10,17]、M－矩阵理论[11,12]、同胚理论[8]、Halanay 型不等式[6,7]等,以 Lyapunov 方法为最多,但是 Lyapunov 泛函的构造是相当困难的.另外,比例时滞也是一种客观存在,如在计算机网络的 QoS 路由设计时通常要求比例时滞保证的.比例时滞系统作为一种重要的数学模型在物理、生物系统,控制理论等领域起着重要的作用.但目前在神经网络研究中考虑比例时滞的情况还比较少[16~18],文献[16,17]分别利用非线性测度和构造合适 Lyapunov 泛函方法研究了具比例时滞细胞神经网络的指数稳定性.文献[18]利用内积的性质研究一类具比例时滞细胞神经网络的散逸性.本文针对上述情况,在文献[6,7]应用 Halanay 型不等式技巧研究时滞杂交 BAM 神经网络收敛性的启发下,利用 Brouwer 不动点定理及不等式分析

收稿日期:2012-07-20;修回日期:2013-08-06;责任编辑:孙瑶
基金项目:国家自然科学基金(No.61374009);天津市高等学校科技发展基金(No.20100813);天津师范大学博士基金(No.52LX34)

技巧研究一类具比例时滞杂交 BAM 神经网络的平衡点的存在唯一性及全局指数稳定性.

2 预备知识

考虑如下 BAM 神经网络模型

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = -a_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{m} c_{ji} f_j(y_j(t)) \\ \qquad + \sum_{j=1}^{m} c_{ji}^{\tau} f_j(y_j(p_j t)) + I_i \\ \dot{y}_j(t) = -b_j y_j(t) + \sum_{i=1}^{n} d_{ij} g_i(x_i(t)) \\ \qquad + \sum_{i=1}^{n} d_{ij}^{\tau} g_i(x_i(q_i t)) + J_j \end{cases} \tag{1}$$

其中 $t \geq 1, i = 1,2,\cdots,n, j = 1,2,\cdots,m$. $a_i > 0$ 和 $b_j > 0$,分别表示 I 层第 i 个和 J 层第 j 个神经元的放电速度;$x_i(t)$ 和 $y_j(t)$ 分别表示 I 层第 i 个和 J 层第 j 个神经元的膜电位;$c_{ji}, c_{ji}^{\tau}, d_{ij}, d_{ij}^{\tau}$ 表示突触联结权,表示信号的延迟和无延迟传播是同时出现的. p_j, q_i 称为比例时滞因子,满足 $0 < p_j, q_i < 1$, $q_i t = t - (1 - q_i)t$, $p_j t = t - (1 - p_j)t$,其中 $(1 - q_i)t, (1 - p_j)t$ 是轴突信号传输比例时滞函数,它们与时间成比例,故称比例时滞. 且当 $t \to +\infty$ 时 $(1 - q_i)t \to +\infty, (1 - p_j)t \to +\infty$; I_i 和 J_j 表示外部常数输入;$g_i(\cdot)$ 和 $f_j(\cdot)$ 是非线性输出函数.

设系统(1)满足如下初始条件.

$$\begin{cases} x_i(s) = x_{i0}, & s \in [q_i, 1] \\ y_j(s) = y_{j0}, & s \in [p_i, 1] \end{cases} \tag{2}$$

其中 $x_{i0}, y_{j0}(i = 1,2,\cdots,n, j = 1,2,\cdots,m)$ 是常数.

假设输出函数 $g_i(\cdot), f_j(\cdot)$ 满足下列条件:

$$\begin{cases} g_i, f_j: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ |g_i(u) - g_i(v)| \leq L_i |u - v| \\ |f_j(u) - f_j(v)| \leq M_j |u - v| \\ |g_i(u)| \leq A_i < +\infty, |f_j(v)| \leq B_j < +\infty \end{cases} \tag{3}$$

其中 $i = 1,2,\cdots,n$, $j = 1,2,\cdots,m$, $u, v \in \mathbf{R}$, L_i, M_j 是 Lipschitz 常数.

注 1　模型(1)与文献[6-15]中的模型都不相同,式(1)中的时滞项是无界时滞函数,即当 $t \to +\infty$ 时,$(1 - q_i)t, (1 - p_j)t \to +\infty$,因此以往文献的稳定性结果都不能直接应用于式(1).

作变换

$$u_i(t) = x_i(e^t), v_j(t) = y_j(e^t) \tag{4}$$

式(4)对 t 求导,得

$$\begin{cases} \dot{x}_i(e^t) = \dot{u}_i(t) \cdot e^{-t} \\ \dot{y}_i(e^t) = \dot{v}_j(t) \cdot e^{-t} \end{cases} \tag{5}$$

在式(1)中,用 e^t 替代 t,得

$$\begin{cases} \dot{x}_i(e^t) = -a_i x_i(e^t) + \sum_{j=1}^{m} c_{ji} f_j(y_j(e^t)) \\ \qquad + \sum_{j=1}^{m} c_{ji}^{\tau} f_j(y_j(p_j e^t)) + I_i \\ \dot{y}_j(e^t) = -b_j y_j(e^t) + \sum_{i=1}^{n} d_{ij} g_i(x_i(e^t)) \\ \qquad + \sum_{i=1}^{n} d_{ij}^{\tau} g_i(x_i(q_i e^t)) + J_j \end{cases} \tag{6}$$

由式(4),有

$$\begin{cases} x_i(q_i e^t) = x_i(e^{t + \ln q_i}) \\ \quad = u_i(t + \ln q_i) = u_i(t - \sigma_i) \\ y_j(p_j e^t) = y_j(e^{t + \ln p_j}) \\ \quad = v_j(t + \ln p_j) = v_j(t - \tau_j) \end{cases} \tag{7}$$

这里 $\sigma_i = -\ln q_i > 0$, $\tau_j = -\ln p_j > 0$. 将式(5)和(7)代入式(6),得

$$\begin{cases} \dot{u}_i(t) = e^t\{-a_i u_i(t) + \sum_{j=1}^{m} c_{ji} f_j(v_j(t)) \\ \qquad + \sum_{j=1}^{m} c_{ji}^{\tau} f_j(v_j(t - \tau_j)) + I_i\} \\ \dot{v}_j(t) = e^t\{-b_j v_j(t) + \sum_{i=1}^{n} d_{ij} g_i(u_i(t)) \\ \qquad + \sum_{i=1}^{n} d_{ij}^{\tau} g_i(u_i(t - \sigma_i)) + J_j\} \end{cases} \tag{8}$$

其中 $t \geq 0$. 此时模型(8)的初始条件为

$$\begin{cases} u_i(s) = \varphi_i(s), & s \in [-\sigma_i, 0] \\ v_j(s) = \psi_j(s), & s \in [-\tau_j, 0] \end{cases} \tag{9}$$

其中 $\varphi_i \in C([-\sigma_i, 0], \mathbf{R})$ 和 $\boldsymbol{\psi}_j \in C([-\tau_j, 0], \mathbf{R})$. 有 $\varphi = (\boldsymbol{\varphi}_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)^{\mathrm{T}} \in C([-\sigma_i, 0], \mathbf{R}^n)$, $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)^{\mathrm{T}} \in C([-\tau_j, 0], \mathbf{R}^n)$. 对于 $t \geq 0$,系统(8)的解记为 $[\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}(t)]^{\mathrm{T}}$. 这里

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}(t) = [u_1(t, \varphi), u_2(t, \varphi), \cdots, u_n(t, \varphi)]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{v}(t) = [v_1(t, \psi), v_2(t, \psi), \cdots, v_m(t, \psi)]^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

注 2　模型(8)的系数是无界时变函数,而文献[14]中的模型的系数是有界时变函数,因此式(8)与文献[14]中的模型不同.

3 主要结果

定理 1　若条件(3)成立,且满足

$$\begin{cases} a_i > \sum_{j=1}^{m} (|c_{ji}| + |c_{ji}^{\tau}|) M_j, & i = 1,2,\cdots,n \\ b_j > \sum_{i=1}^{n} (|d_{ij}| + |d_{ij}^{\tau}|) L_i, & j = 1,2,\cdots,m \end{cases} \tag{10}$$

则系统(1)的平衡点存在且唯一.

证明　记系统(1)的平衡点为 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{x}^* = [x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{y}^* = [y_1^*, y_2^*, \cdots y_m^*]^{\mathrm{T}}$ 且

$$\begin{cases} x_i^* = a_i^{-1}[\sum_{j=1}^{m}(c_{ji}+c_{ji}^{\tau})f_j(y_j^*)+I_i] \\ y_j^* = b_j^{-1}[\sum_{i=1}^{n}(d_{ij}+d_{ij}^{\tau})g_i(x_i^*)+J_j] \end{cases} \tag{11}$$

定义映射 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\theta})=[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta}),\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta})]^{\mathrm{T}}$,其中

$$\boldsymbol{\theta}=[x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m]\in\mathbf{R}^{n+m},$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta})=[F_1(\boldsymbol{\theta}),F_2(\boldsymbol{\theta}),\cdots,F_n(\boldsymbol{\theta})]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta})=[G_1(\boldsymbol{\theta}),G_2(\boldsymbol{\theta}),\cdots,G_m(\boldsymbol{\theta})]^{\mathrm{T}},$$

$$\begin{cases} x_i=F_i(\boldsymbol{\theta})=a_i^{-1}[\sum_{j=1}^{m}(c_{ji}+c_{ji}^{\tau})f_j(y_j)+I_i] \\ y_j=G_j(\boldsymbol{\theta})=b_j^{-1}[\sum_{i=1}^{n}(d_{ij}+d_{ij}^{\tau})g_i(x_i)+J_j] \end{cases}$$

应用式(3),得

$$\begin{cases} |F_i(\boldsymbol{\theta})|\le a_i^{-1}[\sum_{j=1}^{m}(|c_{ji}|+|c_{ji}^{\tau}|)B_j+|I_i|]\le\gamma \\ |G_j(\boldsymbol{\theta})|\le b_j^{-1}[\sum_{i=1}^{n}(|d_{ij}|+|d_{ij}^{\tau}|)A_i+|J_j|]\le\gamma \end{cases}$$

其中 $\gamma=\max\{\gamma_1,\gamma_2\}$,且 γ_1,γ_2 分别为

$$\begin{cases} \gamma_1=\max\limits_{1\le i\le n}\{a_i^{-1}[\sum_{j=1}^{m}(|c_{ji}|+|c_{ji}^{\tau}|)B_j+|I_i|]\} \\ \gamma_2=\max\limits_{1\le j\le m}\{b_j^{-1}[\sum_{i=1}^{n}(|d_{ij}|+|d_{ij}^{\tau}|)A_i+|J_j|]\} \end{cases}$$

由此可以得出

$$[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]^{\mathrm{T}}\in[-\gamma,\gamma]^{n+m}$$

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\theta})=[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta}),\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta})]^{\mathrm{T}}\in[-\gamma,\gamma]^{n+m}$$

其中 $\boldsymbol{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{y}=[y_1,y_2,\cdots,y_m]^{\mathrm{T}}$.

由 $g_i(\cdot)$ 和 $f_j(\cdot)$ 的连续性,可以判断出映射 Q:$[-\gamma,\gamma]^{n+m}\to[-\gamma,\gamma]^{n+m}$ 是连续的,由 Brouwer 不动点定理可知,映射 Q 至少存在的一个不动点 $[\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*]^{\mathrm{T}}\in[-\gamma,\gamma]^{n+m}$,且是式(1)的平衡点.

下证平衡点的唯一性.假设系统(1)存在另外一个平衡点 $[\boldsymbol{x}^{**},\boldsymbol{y}^{**}]^{\mathrm{T}}$.我们断言有 $x_i^*=x_i^{**}$,$y_j^*=y_j^{**}$,$i=1,2,\cdots,n$,$j=1,2,\cdots,m$.假设上述断言不成立.

情况 1 若假设存在 $\boldsymbol{x}^*$ 和 $\boldsymbol{x}^{**}$ 的分量 x_d^* 和 x_d^{**} 使 $x_d^*\ne x_d^{**}$,而 $\boldsymbol{y}^*=\boldsymbol{y}^{**}$,利用式(3),(11)得

$$\begin{cases} a_i|x_i^*-x_i^{**}|\le\sum_{j=1}^{m}(|c_{ji}|+|c_{ji}^{\tau}|)M_j|y_j^*-y_j^{**}| \\ b_j|y_j^*-y_j^{**}|\le\sum_{i=1}^{n}(|d_{ij}|+|d_{ij}^{\tau}|)L_i|x_i^*-x_i^{**}| \end{cases}$$

可以得出

$$a_d|x_d^*-x_d^{**}|\le 0$$

$$0\le(|d_{kj}|+|d_{kj}^{\tau}|)L_d|x_d^*-x_d^{**}|$$

$$j=1,2,\cdots,m$$

上述结论与假设 $x_d^*\ne x_d^{**}$ 矛盾.

情况 2 若假设 $\boldsymbol{x}^*\ne\boldsymbol{x}^{**}$,$\boldsymbol{y}^*\ne\boldsymbol{y}^{**}$,必存在 $\boldsymbol{x}^*$ 和 $\boldsymbol{x}^{**}$ 的分量 x_d^* 和 x_d^{**} 使得 $x_d^*\ne x_d^{**}$;存在 $\boldsymbol{y}^*$ 和 $\boldsymbol{y}^{**}$ 的分量 y_k^* 和 y_k^{**} 使得 $y_k^*\ne y_k^{**}$,而其余分量对应相等,由式(3),(11)及式(10)得出

$$\begin{aligned} |x_d^*-x_d^{**}| &\le a_d^{-1}\sum_{j=1}^{m}(|c_{jd}|+|c_{jd}^{\tau}|)M_j|y_j^*-y_j^{**}| \\ &\le a_d^{-1}(|c_{kd}|+|c_{kd}^{\tau}|)M_k|y_k^*-y_k^{**}| \\ &< |y_k^*-y_k^{**}| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |y_k^*-y_k^{**}| &\le b_k^{-1}\sum_{i=1}^{n}(|d_{ik}|+|d_{ik}^{\tau}|)L_i|x_i^*-x_i^{**}| \\ &\le b_k^{-1}(|d_{dk}|+|d_{dk}^{\tau}|)L_d|x_d^*-x_d^{**}| \\ &< |x_d^*-x_d^{**}| \end{aligned}$$

上面两个式子矛盾.

综上可知我们的断言是成立的.即系统(1)的平衡点 $[\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*]^{\mathrm{T}}$ 是唯一的. 证毕

设

$$\begin{cases} K_1=\max\limits_{1\le i\le n}\sup\limits_{-\sigma_i\le t\le 0}|u_i(t)-u_i^*| \\ K_2=\max\limits_{1\le j\le m}\sup\limits_{-\tau_j\le t\le 0}|v_j(t)-v_j^*| \end{cases} \tag{12}$$

这里 K_1 或 K_2 是正数.例如,如果 $K_1>0$,我们假设 $K_2=0$;当 $K_2=0$ 时,这意味着 $v_j(t)=v_j^*$,$j=1,2,\cdots,m$,$t\in[-\tau_j,0]$.

定理 2 若条件(3)与(10)成立,则系统(8)的平衡点存在且唯一.且存在常数 $\eta>0$ 使得,当 $t\in(0,+\infty)$,有下式成立

$$\begin{cases} |u_i(t)-u_i^*|\le K\mathrm{e}^{-\eta t},i=1,2,\cdots,n \\ |v_j(t)-v_j^*|\le K\mathrm{e}^{-\eta t},j=1,2,\cdots,m \end{cases} \tag{13}$$

这里 $K=\max\{K_1,K_2\}>0$,K_1,K_2 由式(12)定义.

证明 由于系统(1)与(8)等价(见文献[17]),且满足条件(3)与(10),由定理 1 可知系统(8)的平衡点 $[\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*]^{\mathrm{T}}$ 存在且唯一.下面证明系统(8)的平衡点 $[\boldsymbol{u}^*,\boldsymbol{v}^*]^{\mathrm{T}}$ 的全局指数稳定性.

由式(8),对 $t>0$,$i=1,2,\cdots,n$,$j=1,2,\cdots,m$,有

$$\begin{cases} D^+|u_i(t)-u_i^*|\le\mathrm{e}^t\{-a_i|u_i(t)-u_i^*| \\ \qquad +\sum_{j=1}^{m}|c_{ji}|M_j|v_j(t)-v_j^*| \\ \qquad +\sum_{j=1}^{m}|c_{ji}^{\tau}|M_j|v_j(t-\tau_j)-v_j^*|\} \\ D^+|v_j(t)-v_j^*|\le\mathrm{e}^t\{-b_j|v_j(t)-v_j^*| \\ \qquad +\sum_{i=1}^{n}|d_{ij}|L_i|u_i(t)-u_i^*| \\ \qquad +\sum_{i=1}^{n}|d_{ij}^{\tau}|L_i|u_i(t-\sigma_i)-u_i^*|\} \end{cases} \tag{14}$$

这里对 D^+ 表示右上 Dini 导数.

定义函数 $\Phi_i(\cdot)$,$\Psi_j(\cdot)$ 如下:

$$\begin{cases}\Phi_i(\mu_i) = a_i - \mu_i - \sum_{j=1}^{m}(|c_{ji}| + |c_{ji}^{\tau}|)M_j e^{\mu_i\tau_j} \\ \Psi_j(v_j) = b_j - v_j - \sum_{i=1}^{n}(|d_{ij}| + |d_{ij}^{\tau}|)L_i e^{v_j\sigma_i}\end{cases} \tag{15}$$

其中 $v_j, \mu_i \in [0, +\infty)$. 由式(10),可以得出

$$\begin{cases}a_i - \sum_{j=1}^{m}(|c_{ji}| + |c_{ji}^{\tau}|)M_j \geq \xi \\ b_j - \sum_{i=1}^{n}(|d_{ij}| + |d_{ij}^{\tau}|)L_i \geq \xi\end{cases} \tag{16}$$

其中 $\xi = \min\{\xi_1, \xi_2\}$,并且

$$\begin{cases}\xi_1 = \min_{1\leq i\leq n}\{a_i - \sum_{j=1}^{m}(|c_{ji}| + |c_{ji}^{\tau}|)M_j\} > 0 \\ \xi_2 = \min_{1\leq j\leq m}\{b_j - \sum_{i=1}^{n}(|d_{ij}| + |d_{ij}^{\tau}|)L_i\} > 0\end{cases} \tag{17}$$

根据式(15)和式(16)可得出 $\Phi_i(0)\geq\xi, \Psi_i(0)\geq\xi$,注意到函数 $\Phi_i(\mu_i), \Psi_j(v_j)$ 在 $[0, +\infty)$ 都是连续函数,并且 $\Phi_i(\mu_i)\to-\infty, \Psi_j(v_j)\to\infty$ 当 $\mu_i\to+\infty, v_j\to+\infty$. 因此存在连续常数 $\tilde{\mu}_i\in(0, +\infty)$, $\tilde{v}_j\in(0, +\infty)$, $i = 1,2,\cdots,n$, $j = 1,2,\cdots,m$,使得

$$\begin{cases}\Phi_i(\tilde{\mu}_i) = a_i - \tilde{\mu}_i - \sum_{j=1}^{m}(|c_{ji}| + |c_{ji}^{\tau}|)M_j e^{\tilde{u}_i\tau_j} = 0 \\ \Psi_j(\tilde{v}_j) = b_j - \tilde{v}_j - \sum_{i=1}^{n}(|d_{ij}| + |d_{ij}^{\tau}|)L_i e^{\tilde{v}_j\sigma_i} = 0\end{cases}$$

成立,选择 $\eta = \min_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m}\{\tilde{\mu}_i, \tilde{v}_j\}$,显然有 $\eta > 0$,且使得

$$\begin{cases}\Phi_i(\eta) = a_i - \eta - \sum_{j=1}^{m}(|c_{ji}| + |c_{ji}^{\tau}|)M_j e^{\eta\tau_j} \geq 0 \\ \Psi_j(\eta) = b_j - \eta - \sum_{i=1}^{n}(|d_{ij}| + |d_{ij}^{\tau}|)L_i e^{\eta\sigma_i} \geq 0\end{cases} \tag{18}$$

定义函数 $U_i(\cdot)$ 和 $V_j(\cdot)$ 为

$$\begin{cases}U_i(t) = e^{\eta t}|u_i(t) - u_i^*|, t\in[-\sigma_i, +\infty) \\ V_j(t) = e^{\eta t}|v_j(t) - v_j^*|, t\in[-\tau_j, +\infty)\end{cases} \tag{19}$$

由式(14)和(19),对 $t > 0$,有

$$\begin{aligned}D^+U_i(t) &= \eta e^{\eta t}|u_i(t) - u_i^*| + e^{\eta t}D^+|u_i(t) - u_i^*| \\ &\leq \eta U_i(t) + e^t\{-a_i e^{\eta t}|u_i(t) - u_i^*| \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m}|c_{ji}|M_j e^{\eta t}|v_j(t) - v_j^*|\} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m}|c_{ji}^{\tau}|M_j e^{\eta t}|v_j(t-\tau_j) - v_j^*|\} \\ &= \eta U_i(t) - a_i e^t U_i(t) + e^t\sum_{j=1}^{m}|c_{ji}|M_j V_j(t) \\ &\quad + e^t\sum_{j=1}^{m}|c_{ji}^{\tau}|M_j V_j(t-\tau_j)e^{\eta\tau_j} \\ &\leq -(a_i e^t - \eta)U_i(t) \\ &\quad + e^t\sum_{j=1}^{m}(|c_{ji}| + |c_{ji}^{\tau}|)M_j e^{\eta\tau_j}\cdot\sup_{s\in[t-\tau_j, t]}V_j(s) \\ &\leq -(a_i - \eta)e^t U_i(t) \\ &\quad + e^t\sum_{j=1}^{m}(|c_{ji}| + |c_{ji}^{\tau}|)M_j e^{\eta\tau_j}\cdot\sup_{s\in[t-\tau_j, t]}V_j(s)\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}D^+V_j(t) &\leq \eta V_j(t) + e^t\{-b_j V_j(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}|d_{ij}|L_i U_i(t) + \sum_{i=1}^{n}|d_{ij}^{\tau}|L_i U_i(t-\sigma_i)e^{\eta\sigma_i}\} \\ &\leq -(b_j - \eta)e^t V_j(t) \\ &\quad + e^t\sum_{i=1}^{n}(|d_{ij}| + |d_{ij}^{\tau}|)L_i e^{\eta\sigma_i}\cdot\sup_{s\in[t-\sigma_i, t]}U_i(s)\end{aligned}$$

即

$$\begin{cases}D^+U_i(t) \leq -(a_i - \eta)e^t U_i(t) \\ \qquad + e^t\sum_{j=1}^{m}(|c_{ji}| + |c_{ji}^{\tau}|)M_j e^{\eta\tau_j}\cdot\sup_{s\in[t-\tau_j, t]}V_j(s) \\ D^+V_j(t) \leq -(b_j - \eta)e^t V_j(t) \\ \qquad + e^t\sum_{i=1}^{n}(|d_{ij}| + |d_{ij}^{\tau}|)L_i e^{\eta\sigma_i}\cdot\sup_{s\in[t-\sigma_i, t]}U_i(s)\end{cases} \tag{20}$$

由式(19),有

$$\begin{cases}U_i(t) \leq \max_{1\leq i\leq n}\sup_{-\sigma_i\leq t\leq 0}|u_i(t) - u_i^*| \\ V_j(t) \leq \max_{1\leq j\leq m}\sup_{-\tau_j\leq t\leq 0}|v_j(t) - v_j^*|\end{cases} \tag{21}$$

根据式(21)可以看出

$U_i(t)\leq K, t\in[-\sigma_i, 0]$; $V_j(t)\leq K, t\in[-\tau_j, 0]$

我们断言:

$$U_i(t)\leq K,\quad V_j(t)\leq K,\quad \forall\, i, j, t\geq 0 \tag{22}$$

假设式(22)不成立,则必定存在 $U_i(\cdot)$ 的分量 $U_k(\cdot)$ 和 $t_1 > 0$,使得

$$\begin{aligned}&U_k(t)\leq K,\quad t\in[-\sigma_k, t_1), \\ &U_k(t_1) = K,\quad D^+U_k(t_1) > 0\end{aligned} \tag{23}$$

而

$$\begin{cases}U_i(t)\leq K, i\neq k, t\in[-\sigma_i, t_1] \\ V_j(t)\leq K, t\in[-\tau_j, t_1]\end{cases} \tag{24}$$

将式(23)和式(24)代入式(20),可以得到

$$\begin{aligned}&0 < D^+U_k(t_1) \\ &\leq[-(a_k - \eta) + \sum_{j=1}^{m}(|c_{ji}| + |c_{ji}^{\tau}|)M_j e^{\eta\tau_j}]\cdot Ke^{t_1}\end{aligned}$$

应用式(18),得出 $0 < D^+U_k(t_1)\leq 0$ 矛盾. 由此可得出式(22)成立,因此将式(19)代入式(22),有式(13)成立. 即式(8)的平衡点是全局指数稳定的.　　证毕

注 3　由系统(1)与(8)的等价性可知,在条件(3)与(10)成立的条件下,系统(1)的平衡点 $[\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*]^{\mathrm{T}}$ 是全局指数稳定的.

注 4　本文中式(20)不同于文献[6]中的 Halanay 型不等式系统式(22),也不同于文献[7]中 Halanay 型不

等式系统式(24).在文献[6]的式(22)与文献[7]的式(24)中,都不含有 e^t,而本文中式(20)含有 e^t.这里估且称式(20)为拟 Halanay 型不等式系统.

4 算例

例 1 考虑如下比例时滞 BAM 神经网络

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=-3x_1(t)+\tanh(y_1(0.5t))+\tanh(y_2(0.5t))+1\\ \dot{x}_2(t)=-4x_2(t)+\tanh(y_1(0.5t))+2\tanh(y_2(0.5t))-1\\ \dot{y}_1(t)=-3y_1(t)+\tanh(x_1(0.5t))+\tanh(x_2(0.5t))+3\\ \dot{y}_2(t)=-5y_2(t)+\tanh(x_1(0.5t))+2\tanh(x_2(0.5t))+4\end{cases}\tag{25}$$

有 $M_1=M_2=L_1=L_2=1$.经计算得

$$\begin{cases}a_i-\sum_{j=1}^{m}(|c_{ji}|+|c_{ji}^{\tau}|)M_j=1>0,\ i=1,2\\ b_j-\sum_{i=1}^{n}(|d_{ij}|+|d_{ij}^{\tau}|)L_i=1>0,\ j=1,2\end{cases}$$

满足定理 2 的条件,因此式(25)有唯一全局指数稳定平衡点.用 Matlab 计算该平衡点为(0.8962,-0.4237,1.2522,1.2202).图 1 给出了模型(25)以(1,2,-1,-2)为初值的时间响应曲线.

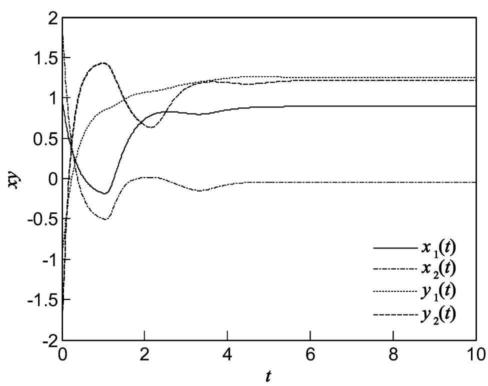

图1 系统(25)在初始值(1,2,-1,-2)的运动轨迹

例 2 考虑下面的模型

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=-5x_1(t)+\tanh(0.5y_1(0.5t))\\ \qquad +\tanh(0.25y_2(0.5t))+10\\ \dot{x}_2(t)=-7x_1(t)-\tanh(0.5y_1(0.5t))\\ \qquad +2\tanh(0.25y_2(0.5t))+20\\ \dot{y}_1(t)=-y_1(t)+\tanh(x_1(0.5t))\\ \qquad -\tanh(x_2(0.5t))-10\\ \dot{y}_2(t)=-2y_2(t)+3\tanh(x_1(0.5t))\\ \qquad +\tanh(x_2(0.5t))-20\end{cases}\tag{26}$$

经验证满足定理 2 的条件.计算其指数稳定的平衡点为(1.6068,2.7240,-10.0687,-8.1203).图 2 是系统(26)从(0.2,0.5,-0.2,-0.5)初始的时间响应曲线.另外,这个例子与文献[6]中的例子,除时滞项不同外,其余完全相同.但是文献[6]的条件只是适用于常时滞的情况,本文的结果适用于无界的比例时滞函数,因此本文的结果发展了文献[6]的结果.

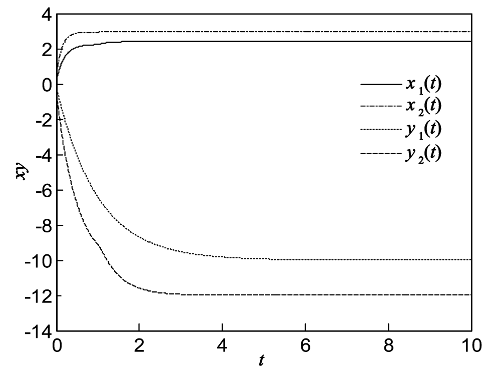

图2 系统(26)在初始值(0.2,0.5,-0.2,-0.5)的运动轨迹

5 结论

在输出函数满足全局 Lipschitz 连续有界的条件下,利用不等式技巧建立了一拟 Halanay 型不等式系统,进而研究了一类具比例时滞杂交 BAM 神经网络的全局指数稳定性.克服了 Lyapunov 方法中 Lyapunov 泛函构造的困难性.同时这种方法可用于其他类型的具比例时滞神经网络的稳定性的研究.进一步工作,可将具比例时滞的 BAM 神经网络应用到计算机网络中的 QoS 路由决策中去,建立基于比例时滞的 BAM 神经网络 QoS 路由算法.

参考文献

[1] Kosko B. Bidirectional associative memories[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1988, 18(10):49-60.

[2] 于海斌,薛劲松,王浩波,徐心和.双向联想记忆神经网络的一种编码策略[J].电子学报,1997,25(5):6-10.
Yu Hai-bin, Xue Jin-song, Wang Hao-bo, Xu Xin-he. A new coding strategy for bidirectional associative memories[J]. Acta Electronica Sinica, 1997, 25(5):6-10. (in Chinese)

[3] 许志雄,郑承义,叶臻,谢铭培.复值多状态双向联想记忆神经网络[J].电子学报,1999,27(5):118-120.
Xu Zhi-xiong, Zheng Cheng-yi, Ye Zhen, Xie Ming-pei. Complex-valued multistate bidirectional associative memory[J]. Acta Electronica Sinica, 1999, 27(5):118-120. (in Chinese)

[4] 王利生,谈正,张志军.连续双向联想记忆网络局部指数稳定的充要条件[J].电子学报,1999,27(7):119-121.
Wang Li-sheng, Tan Zheng, Zhang Zhi-jun. Sufficient and necessary condition for local exponential stability of bidirectional continuous time associate memory neural networks[J]. Acta Electronica Sinica, 1999, 27(7):119-121. (in Chinese)

[5] 陈松灿,蔡骏.多重加权改进型指数双向联想记忆网络及其决策性能[J].电子学报,2008,36(1):81-85.
Chen Song-can,Cai Jun.Multiple weighted improved exponential bidirectional as sociative memory model[J].Acta Electronica Sinica,2008,36(1):81-85.(in Chinese)
[6] 张伟,廖晓峰,李学明.时滞杂交双向联想记忆神经网络的全局指数稳定性[J].计算机发展与研究,2003,40(10):1410-1413.
Zhang Wei,Liao Xiao-feng,Li Xue-ming.Global exponential stability in hybrid bidirectional associative memory neural networks with time delays[J].Journal of Computer Research and Development,2003,40(10):1409-1413.(in Chinese)
[7] Liao Xiao-feng, Wong Kwok-wo. Convergence dynamics of hybrid bidirectional associative memory neural networks with distributed delays[J].Physics Letters A,2003,316(1-2):55-64.
[8] Zhang Li-juan,Shi Bao.Exponential stability of BAM neural networks with time-varying delays[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing,2009,30(1-2):385-396.
[9] Samidurai R,Sakthivel R,Anthoni S M.Global asymptotic stability of BAM neural networks with mixed delays and impulses [J].Applied Mathematics and Computation,2009,212(1):113-119.
[10] Hu Liang,Liu Hao,Zhao Ying-bo.New stability criteria for BAM neural networks with time-varying delays [J].Neurocomputing,2009,72(13-15):3245-3252.
[11] Wu Ran-chao.Exponential convergence of BAM neural networks with time-varying coefficients and distributed delays [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, 11 (1):562-573.
[12] Li Yong-kun,Gao Shan.Global exponential stability for impulsive BAM neural networks with distributed delays on time scales[J].Neural Processing Letters,2010,31(1):65-91.
[13] Zhang Z,Yang Y,Huang Y.Global exponential stability of interval general BAM neural networks with reaction-diffusion terms and multiple time-varying delays[J].Neural Networks,2011,24 (5):457-465.
[14] Zhang Zheng-qiu, Liu Kaiyu, Yang Yan. New LMI-based condition on global asymptotic stability concerning BAM neural networks of neutral type [J]. Neurocomputing, 2012, 81 (4):24-32.
[15] Zhang Z,Liu W,Zhou D.Global asymptotic stability to a generalized Cohen-Grossberg BAM neural networks of neutral type delays[J].Neural Networks,2012,25(1):94-105.
[16] 张迎迎,周立群.一类具多比例延时的细胞神经网络的指数稳定性[J].电子学报,2012,40(6):1159-1163.
Zhang Ying-ying,Zhou Li-qun.Exponential stability of a class of cellular neural networks with multi-pantograph delays[J].Acta Electronica Sinica,2012,40(6):1159-1163.(in Chinese)
[17] Zhou Li-qun.Delay-dependent exponential stability of cellular neural networks with multi-proportional delays [OL]. Neural Processing Letters,2012,DOI:10.1007/s11063-012-9271-8.
[18] Zhou Li-qun.Dissipativity of a class of cellular neural networks with proportional delays [J]. Nonlinear Dynamics, 2013,73(3):1895-1903.

作者简介

周立群　女,1972 年 9 出生,黑龙江省齐齐哈尔市人,副教授.2004 年与 2007 年在哈尔滨工业大学获得理学硕士和工学博士学位.主要从事神经网络的理论及应用研究.
E-mail:zhouliqun20000@163.com