

# 时域积分方程 MOT 算法的推迟位时间卷积数值积分新方法

贾苗苗,赵延文,郑宇腾,蔡强明

(电子科技大学电子工程学院,四川成都 611731)

**摘 要:** 通过变量代换平滑三角形上推迟位(标量位函数和矢量位函数)并消除推迟矢量位旋度的奇异性,使得采用数值积分法就能够精确快速地计算任意正则时间基函数与推迟位函数及推迟矢量位旋度之间的时间卷积运算,可用于基于任意类型时间基函数的时域电场、时域磁场及其混合场积分方程时间步进(MOT)算法.与时间卷积运算的解析法对比分析表明,该时间卷积数值积分方法能够精确快速地计算基于任意类型时间基函数和不同时间步长条件下时域积分方程 MOT 算法的阻抗矩阵元素;而具体的计算实例也表明,阻抗矩阵的精确计算显著地提升了时域积分方程 MOT 算法的后时稳定性和求解精度.

**关键词:** 时域积分方程;时间步进算法;后时不稳定性

**中图分类号:** TN911.23 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2015)01-0151-09

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2015.01.024

## A Novel Numerical Integration Method for Convolution with the Retarded Potentials in Time-Domain Integral Equation MOT Algorithm

JIA Miao-miao, ZHAO Yan-wen, ZHENG Yu-teng, CAI Qiang-ming

(School of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu, Sichuan 611731, China)

**Abstract:** A novel variable transformation is presented to smooth and eliminate the singularity of the retarded potential (scalar and vector potential) and the curl of the vector potential by variable substitution. So the convolution between any regular time basis function and retarded potential (or its curl) can be calculated quickly and accurately using the numerical integration method, the advantage is that it can be used in the MOT algorithm of the time-domain field integral equations, no matter how the time basis functions are. Compared to the analytical time convolution method, this numerical integration method can accurately and quickly calculate the impedance matrix elements of MOT algorithm with any type of time basis functions and different time-step, and as several numerical results will demonstrate, this novel numerical method can largely improve the accuracy and the stability of the MOT algorithm.

**Key words:** time-domain integral equations (TDIE); marching-on-in time (MOT) algorithm; late-time instability

## 1 引言

因同时兼备时域方法和积分方程法的优点,时域积分方程(TDIE)法越来越被广泛地用于求解时域宽带电磁散射和辐射问题.求解时域积分方程的时间步进(MOT)算法的计算效率(计算量和内存需求)、求解精度和后时稳定性一直是学者们研究和关心的三大主要问题.采用诸如时域平面波算法(PWTD)<sup>[1]</sup>、时域自适应积分法(TDAIM)<sup>[2]</sup>等快速算法及高阶方法<sup>[3]</sup>可以有效地降低 MOT 算法的计算量和内存需求.国内外许多学者对用 MOT 算法求解 TDIE 的后时稳定性问题做了广泛而深入的研究并在近年来取得了非常显著的进展<sup>[4~11]</sup>.基于显式时间步进(Explicit MOT, EMOT)算法<sup>[4]</sup>

基础之上的电流在空间或/和时间上平均、电荷在空间上的平均等滤波技术<sup>[5,6]</sup>被认为可以部分滤除高频成份对后时稳定性的影响,但是这些方法在计算量有所增加的同时,计算精度却有所下降,而且更为严重的是当散射体尺寸较大或几何结构复杂时该方法失效;采用隐式时间步进(Implicit MOT, IMOT)算法<sup>[7]</sup>和选取适当的时间基函数<sup>[8~11]</sup>也可提高 MOT 算法的后时稳定性;精确计算阻抗矩阵元素可同时改善 MOT 算法的后时稳定性和求解精度<sup>[12~20]</sup>.

实际上,阻抗矩阵的精确快速计算是获得精确稳定 MOT 算法的基础和最关键因素,近年来学者们提出了能精确计算时域阻抗矩阵的多种数值或解析方法<sup>[12~20]</sup>.文献[17]和[19]给出了基于 RWG 基函数的源

三角形上内层积分解析解并推导出了多项式插值时间基函数与推迟位函数(推迟矢量位和标量位)及推迟矢量位旋度之间时间卷积的解析表达式,提高了时域阻抗矩阵的计算精度并大幅度改善了 MOT 算法的求解精度和后时稳定性.然而,该方法仅适用于多项式插值时间基函数,且多项式阶数越高、时间卷积解析表达式就越复杂.对于非多项式时间基函数<sup>[9,10]</sup>的时间卷积运算须采用数值积分法,但由于推迟位函数的不光滑特性以及推迟矢量位旋度的奇异性<sup>[16,18,21]</sup>将导致数值积分法的积分精度差、收敛慢及计算量增大.本文通过变量代换平滑三角形上推迟位(标量位函数和矢量位函数)并消除推迟矢量位旋度的奇异性,采用数值积分法(如高斯积分法)就可以快速地精确计算任意正则时间基函数与推迟位函数及推迟矢量位旋度之间的时间卷积运算,并可用于精确快速计算基于任意类型时间基函数和不同时间步长条件下时域电场、时域磁场及其混合场积分方程时间步进(MOT)算法的阻抗矩阵.在此基础上,通过计算实例,分析和探讨了时域电场、时域磁场及其混合场积分方程时间步进(MOT)算法的求解精度和后时稳定性.

## 2 理想导体目标时域积分方程的 MOT 算法

假设  $S$  为位于均匀背景介质中的理想导体表面,则瞬态入射电场  $\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}, t)$  或入射磁场  $\mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}, t)$  将在理想导体表面  $S$  上产生感应电流  $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t)$ , 而  $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t)$  又要产生散射电场  $\mathbf{E}^{\text{scat}}(\mathbf{r}, t)$  和磁场  $\mathbf{H}^{\text{scat}}(\mathbf{r}, t)$ . 利用理想导体表面上切向电场和切向磁场的边界条件,

$$\mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

以及总电场  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{\text{scat}}(\mathbf{r}, t)$  和总磁场  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}^{\text{scat}}(\mathbf{r}, t)$  可以得到时域电场积分方程(TDEFIE)和时域磁场积分方程(TDMFIE)分别为,

$$\mathbf{n} \times \mathbf{n} \times [\partial_t^i \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \nabla \partial_t^{i-1} \Phi(\mathbf{r}, t)] = \mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) \quad (2)$$

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t) - \mathbf{n} \times \mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{n} \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) \quad (3)$$

而矢量位函数  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  和标量位函数  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  分别为,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \mathbf{J}_s(\mathbf{r}', t) * \frac{\delta(t - \frac{R}{c})}{R} dS' \quad (4)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_S \nabla' \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{r}', t) * \frac{\delta(t - \frac{R}{c})}{R} dS' \quad (5)$$

其中,符号“\*”表示时间卷积,  $\mathbf{n}$  为理想导体表面的外法向单位矢量,  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  表示场点  $\mathbf{r}$  与源点  $\mathbf{r}'$  之间的距离,  $\epsilon$  和  $\mu$  分别为散射体周围背景介质介电常数和磁导率且  $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$  为电磁波在其中的传播速度,而  $\eta$

$= \sqrt{\mu/\epsilon}$  为背景介质的波阻抗;并采用了缩写关系,

$$\begin{cases} \partial_t^i F(t) = \int_0^t F(t') dt', & i = -1 \\ \partial_t^i F(t) = F(t), & i = 0 \\ \partial_t^i F(t) = \frac{\partial^i F(t)}{\partial t^i}, & i = 1, 2 \end{cases} \quad (6)$$

由方程(2)和方程(3)加权求和可得时域混合场积分方程(TDCFIE)为,

$$\text{TDCFIE} = w_{\text{cfe}} \text{TDEFIE} + (1 - w_{\text{cfe}}) \text{TDMFIE} \quad (7)$$

其中加权系数  $w_{\text{cfe}} \in [0, 1]$ , 当  $w_{\text{cfe}} = 1$  或 0 时混合场积分方程分别退化为时域电场积分方程或时域磁场积分方程.

为利用时域积分方程法数值求解未知面电流  $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t)$ , 首先将电流  $\mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t)$  用空间面基函数  $\mathbf{f}_n^s(\mathbf{r})$  ( $n = 1, 2, \dots, N_s$ ) 和时间基函数  $T_l(t) = T(t - l\Delta_t)$  ( $l = 1, 2, \dots, N_t$ ) 展开为,

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r}, t) = \sum_{n=1}^{N_s} \sum_{l=1}^{N_t} I_n^l [T_l(t) \mathbf{f}_n^s(\mathbf{r})] \quad (8)$$

其中,  $I_n^l$  为与时空基函数  $T_l(t) \mathbf{f}_n^s(\mathbf{r})$  相关的待求加权系数.这里,时间基函数  $T_l(t)$  主要采用三角时间基函数<sup>[4]</sup>(本文给出的方法与时间基函数类型无关,其他类型时间基函数<sup>[8~10]</sup>的处理过程几乎相同),并选取时间步长  $\Delta_t = \frac{C_t}{(10f_{\text{max}})}$ ;而采用平面三角形拟合理想导电目标表面且空间面基函数  $\mathbf{f}_n^s(\mathbf{r})$  采用 RWG 基函数<sup>[22]</sup>.为了以后阐述方便,采用字母  $p$  统一地表示 RWG 基函数正/负三角形  $S_n^\pm$  所对应的“+”号或“-”号,并定义符号函数关系,

$$\text{sgn}(S_n^p) = \begin{cases} +1, & \mathbf{r} \in S_n^+ (p = +) \\ -1, & \mathbf{r} \in S_n^- (p = -) \end{cases} \quad (9)$$

则可以将 RWG 基函数简略地表示成为

$$\mathbf{f}_n^s(\mathbf{r}) = \sum_p \text{sgn}(S_n^p) \frac{l_n}{2A_n^p} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_n^p) \quad (10)$$

其中,  $l_n$  为正/负平面三角形  $S_n^+$  和  $S_n^-$  之间的公共边长度,  $A_n^p$  表示三角形  $S_n^p$  的面积,  $\mathbf{r}_n^p$  表示三角形  $S_n^p$  上 RWG 基函数自由节点的空间坐标(如图 1 所示).

将式(8)和式(10)代入时域混合场积分方程(7),并在时间  $t = t_k = k\Delta_t$  上采用点匹配法、空间上采用伽略

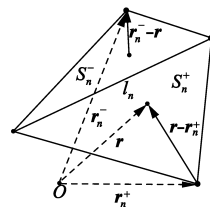


图1 RWG基函数的三角形贴片对及其与公共边的几何关系

金法,则方程(7)可以离散成为在时间步上递推的矩阵方程及其对应的右端向量和阻抗矩阵元素分别为,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0^c \cdot \mathbf{I}^k &= \mathbf{V}_k^{\text{inc},c} - \sum_{l=1}^{k-1} \mathbf{M}_l^c \cdot \mathbf{I}^{k-l} \\ \mathbf{M}_l^c &= w_{\text{cfie}} \mathbf{M}_l^e + (1 - w_{\text{cfie}}) \mathbf{M}_l^h \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_k^{\text{inc},c} &= w_{\text{cfie}} \mathbf{V}_k^{\text{inc},e} + (1 - w_{\text{cfie}}) \mathbf{V}_k^{\text{inc},h} \\ \mathbf{V}_k^{\text{inc},e}(m) &= \eta^{-1} \int_{S_m} \mathbf{f}_m^s(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}, t_k) dS \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_k^{\text{inc},h}(m) = \eta^{-1} \int_{S_m} \mathbf{f}_m^s(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \times \eta \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}, t_k) dS \quad (12)$$

$$\begin{aligned} M_l^e(m, n) &= \int_{S_m} \mathbf{f}_m^s(\mathbf{r}) \cdot [\partial_t^l T(l\Delta_t) * \mathbf{E}_n(\mathbf{r}, t)] dS \\ &+ \int_{S_m} \nabla \cdot \mathbf{f}_m^s(\mathbf{r}) [c^2 \partial_t^{-1} T(l\Delta_t) * \Phi_n(\mathbf{r}, t)] dS, \\ & \quad l = 0, 1, \dots \\ M_l^h(m, n) &= T(l\Delta_t) \int_{S_m} \mathbf{f}_m^s(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_n^s(\mathbf{r}) dS \\ &- \int_{S_m} \mathbf{f}_m^s(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \times [cT(l\Delta_t) * \mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t)] dS, \\ & \quad l = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (13)$$

其中,

$$\begin{aligned} \Phi_n(\mathbf{r}, t) &= \sum_p \frac{\text{sgn}(S_n^p) l_n}{4\pi A_n^p} \frac{1}{c} \int_{S_n^p} \underbrace{\frac{\delta(t - \frac{R}{c})}{R}}_{\Phi_n^p(\mathbf{r}, t)} dS' \\ \mathbf{E}_n(\mathbf{r}, t) &= \sum_p \frac{\text{sgn}(S_n^p) l_n}{8\pi A_n^p} \frac{1}{c} \int_{S_n^p} \underbrace{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_n^p) \frac{\delta(t - \frac{R}{c})}{R}}_{\mathbf{E}_n^p(\mathbf{r}, t)} dS' \\ \mathbf{H}_n(\mathbf{r}, t) &= \sum_p \frac{\text{sgn}(S_n^p) l_n}{8\pi A_n^p} \nabla \times \frac{1}{c} \int_{S_n^p} \underbrace{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_n^p) \frac{\delta(t - \frac{R}{c})}{R}}_{\mathbf{H}_n^p(\mathbf{r}, t)} dS' \end{aligned} \quad (14)$$

为了精确计算时域阻抗矩阵  $\mathbf{M}_l^c$ ,除精确计算积分式(14)之外,还应精确计算式(13)的时间卷积运算.文献[16,18,19]给出了精确地计算积分式(14)的详细过程,并推导出了基于多项式时间基函数的式(13)中时间卷积的解析表达式.因  $\Phi_n^p(\mathbf{r}, t)$  和  $\mathbf{E}_n^p(\mathbf{r}, t)$  及  $\mathbf{H}_n^p(\mathbf{r}, t)$  仍然存在光滑性差(拐点和不连续性)或奇异性,故式(13)的时间卷积数值积分法收敛性差或无法直接精确计算.下面,通过变量代换平滑函数  $\Phi_n^p(\mathbf{r}, t)$  和  $\mathbf{E}_n^p(\mathbf{r}, t)$  并消除函数  $\mathbf{H}_n^p(\mathbf{r}, t)$  的奇异性,以便采用数值积分法就能够精确快速地计算任意正则时间函数(如时间基函数及其导数或积分)与函数  $\Phi_n^p(\mathbf{r}, t)$  和  $\mathbf{E}_n^p(\mathbf{r}, t)$  及  $\mathbf{H}_n^p(\mathbf{r}, t)$  之间的时间卷积运算.

### 3 时间卷积的精确快速数值计算方法

设源三角形  $S_n^p$  三个顶点的全局坐标为  $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ ,并以  $\mathbf{r}_1$  为坐标原点建立笛卡儿局部坐标系  $(u, v, w)$ (如图 2(a)所示)且将其坐标单位矢量定义为,

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}, \hat{\mathbf{w}} = \frac{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)}{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)|}, \hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{w}} \times \hat{\mathbf{u}} \quad (15)$$

在该局部坐标系下场点  $\mathbf{r}$ (用  $o$  表示)和源点  $\mathbf{r}'$  所对应的局部坐标可分别表示为  $(u, v, w)$  和  $(u', v', w' = 0)$ .若进一步令  $\boldsymbol{\rho} = u\hat{\mathbf{u}} + v\hat{\mathbf{v}}$  和  $\boldsymbol{\rho}' = u'\hat{\mathbf{u}} + v'\hat{\mathbf{v}}$ ,则空间 RWG 基函数式(10)可表示为,

$$\mathbf{f}_n^s(\mathbf{r}') = \sum_p \text{sgn}(S_n^p) \frac{l_n}{2A_n^p} (\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}_n^p) \quad (16)$$

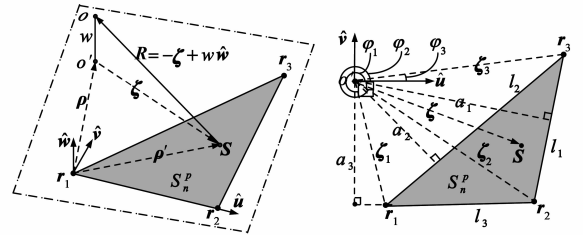


图2 源三角形  $S_n^p$  的局部坐标系及其相关空间几何关系

这样,可将矢量函数  $\mathbf{E}_n^p(\mathbf{r}, t)$  写成,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_n^p(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int_{S_n^p} [(\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}) + (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n^p)] \frac{\delta(t - \frac{R}{c})}{R} dS' \\ &= \mathbf{U}_e(\mathbf{r}, t) + (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n^p) \psi_e(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (17)$$

其中,

$$\begin{aligned} \psi_e(\mathbf{r}, t) &= \Phi_n^p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{S_n^p} \frac{\delta(t - \frac{R}{c})}{R} dS' \\ \mathbf{U}_e(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int_{S_n^p} (\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}) \frac{\delta(t - \frac{R}{c})}{R} dS' \end{aligned} \quad (18)$$

而利用矢量恒等式  $\nabla \times (\varphi \mathbf{A}) = \nabla \varphi \times \mathbf{A} + \varphi \nabla \times \mathbf{A}$  及  $\nabla \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_n^p) = 0$ ,则有

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_n^p(\mathbf{r}, t) &= \hat{\mathbf{w}} \times (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n^p) \psi_h(\mathbf{r}, t) \\ &+ [(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_n^p) + w\hat{\mathbf{w}}] \times \mathbf{U}_h(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (19)$$

其中,

$$\begin{aligned} \psi_h(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int_{S_n^p} \frac{w}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{\delta(t - \frac{R}{c})}{R} \right] dS' \\ \mathbf{U}_h(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int_{S_n^p} (\boldsymbol{\rho}' - \boldsymbol{\rho}) \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{\delta(t - \frac{R}{c})}{R} \right] dS' \end{aligned} \quad (20)$$

若以场点  $o$  投影点  $o'$  为坐标原点建立局部圆柱坐标系  $(\zeta, \varphi, w)$  且其单位坐标矢量为  $(\hat{\zeta}, \hat{\varphi}, \hat{w})$ , 在该坐标系下有  $\zeta = \rho' - \rho, \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = -\zeta + w\hat{w}$  且  $\zeta\sqrt{R^2 - d^2} (d = |\mathbf{w}|), d\zeta = R dR / \zeta$  (如图 2(b) 所示) 且有

$$\begin{aligned} \zeta &= \rho' - \rho \\ &= \hat{u}(u' - u) + \hat{v}(v' - v) \\ &= \hat{u}\zeta \cos\varphi + \hat{v}\zeta \sin\varphi \\ \int_{S_n^o} dS' &= \int_{S_n^o} \zeta d\zeta d\varphi \\ &= \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} R \left( \int_{\varphi_{\text{low}}(\zeta)}^{\varphi_{\text{upp}}(\zeta)} d\varphi \right) dR \end{aligned} \quad (21)$$

其中,  $R_{\min}$  和  $R_{\max}$  分别为场点  $o$  到源三角形  $S_n^o$  的最小距离和最大距离,  $\varphi_{\text{low}}(\zeta)$  和  $\varphi_{\text{upp}}(\zeta)$  分别表示以场点  $o$  的投影点  $o'$  为中心、以  $\zeta$  为半径的圆与源三角形  $S_n^o$  相交圆弧段所对应的  $\varphi$  向最小及最大角度. 设  $l_i (i = 1, 2, 3)$  为三角形边  $C_i$  的长度,  $a_i$  及  $\zeta_{i, \min}$  和  $\zeta_{i, \max} (i = 1, 2, 3)$  分别为场点  $o$  的投影点  $o'$  到三角形边  $C_i$  的垂直距离及边  $C_i$  两个端点的较小和较大距离, 若设

$$\begin{aligned} R_{i, \max} &= \sqrt{\zeta_{i, \max}^2 + d^2} \\ R_{i, \min} &= \begin{cases} \sqrt{\zeta_{i, \min}^2 + d^2}, & \sqrt{\zeta_{i, \min}^2 + l_i^2} / \zeta_{i, \max} \leq 1 \\ \sqrt{a_i^2 + d^2}, & \sqrt{\zeta_{i, \min}^2 + l_i^2} / \zeta_{i, \max} > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

则最小距离  $R_{\min}$  和最大距离  $R_{\max}$  可分别表示为,

$$\begin{aligned} R_{\max} &= \max[R_{1, \max}, R_{2, \max}, R_{3, \max}] \\ R_{\min} &= \begin{cases} d, & o' \in S_n^o \\ \min[R_{1, \min}, R_{2, \min}, R_{3, \min}], & o' \notin S_n^o \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

基于源三角形  $S_n^o$  的面积坐标系下, 若  $\xi_i (i = 1, 2, 3)$  为对应于  $\zeta$  的面积坐标, 并定义符号函数  $\text{sgn}(\xi_i)$  为,

$$\text{sgn}(\xi_i) = \begin{cases} +1, & \xi_i > 0 \\ 0, & \xi_i = 0 \\ -1, & \xi_i < 0 \end{cases} \quad (24)$$

则将式(21)代入式(18)和式(20)可得<sup>[15, 16, 18, 19]</sup>,

$$\begin{aligned} \psi_e(\mathbf{r}, t) &= \begin{cases} \sum_{i=1}^3 \text{sgn}(\xi_i) \alpha_i(\zeta) \Big|_{R=\alpha}, & R_{\min} \leq R \leq R_{\max} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \\ \mathbf{U}_e(\mathbf{r}, t) &= \begin{cases} \sum_{i=1}^3 \text{sgn}(\xi_i) \underbrace{[\zeta \mathbf{e}_i(\zeta)]}_{U_{e,i}(\mathbf{r}, t)} \Big|_{R=\alpha}, & R_{\min} \leq R \leq R_{\max} \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases} \\ \psi_h(\mathbf{r}, t) &= -D_a \text{sgn}(w) \delta(t - d/c) \\ &\quad - \sum_{i=1}^3 \text{sgn}(\xi_i) \underbrace{[w \zeta^{-1} \partial_{\zeta} \alpha_i(\zeta)]}_{\psi_{h,i}(\mathbf{r}, t)} \Big|_{R=\alpha} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\mathbf{U}_h(\mathbf{r}, t) = - \sum_{i=1}^3 \text{sgn}(\xi_i) \underbrace{[\zeta^{-1} \mathbf{e}_i(\zeta) + \partial_{\zeta} \mathbf{e}_i(\zeta)]}_{U_{h,i}(\mathbf{r}, t)} \Big|_{R=\alpha} \quad (26)$$

其中, 矢量函数  $\mathbf{e}_i(\zeta) = \hat{u}e_{u,i}(\zeta) - \hat{v}e_{v,i}(\zeta)$ , 而  $\alpha_i(\zeta), e_{u,i}(\zeta), e_{v,i}(\zeta)$  及  $\partial_{\zeta} \alpha_i(\zeta), \partial_{\zeta} \mathbf{e}_i(\zeta)$  的具体表达式参见文献[16, 18], 且符号函数  $\text{sgn}(w)$  和  $D_a$  分别定义为,

$$\text{sgn}(w) = \begin{cases} +1, & w \geq 0 \\ -1, & w < 0 \end{cases} \quad (27)$$

$$D_a = \sum_{i=1}^3 \text{sgn}(\xi_i) \alpha_i(0^+) \quad (28)$$

式(28)表明, 当场点  $o$  的投影点  $o'$  位于源三角形  $S_n^o$  之外时总有  $D_a \equiv 0$ , 而投影点  $o'$  位于源三角形  $S_n^o$  的内部、边内及顶点时  $D_a$  分别等于  $2\pi, \pi$  和所在顶点的内顶角<sup>[20]</sup>.

若用函数  $F(\mathbf{r}, t)$  统一地分别表示标量函数  $\psi_e(\mathbf{r}, t)$  和  $\psi_h(\mathbf{r}, t)$  或矢量函数  $\mathbf{U}_e(\mathbf{r}, t)$  和  $\mathbf{U}_h(\mathbf{r}, t)$  并定义其时间卷积运算  $\tilde{F}^i(\mathbf{r}, t)$  为,

$$\begin{aligned} \tilde{F}^j(\mathbf{r}, t) &= (c\Delta_t)^{1-j} [\Delta_t^{j-1} \partial_t^j T(t) * F(\mathbf{r}, t)] \\ &= (c\Delta_t)^{1-j} \int \Delta_t^{j-1} F(\mathbf{r}, t) \partial_t^j T(t - \tau) d\tau \\ &= \sum_{i=1}^3 \text{sgn}(\xi_i) \tilde{F}_i^j(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (29)$$

其中  $\tilde{F}_i^j(\mathbf{r}, t) = (c\Delta_t)^{1-j} \int \Delta_t^{j-1} F_i(\mathbf{r}, t) \partial_t^j T(t - \tau) d\tau$ , 而基于式(29)容易获得式(13)中的时间卷积运算. 当  $T(t)$  为多项式插值时间基函数时, 文献[16]和[18]推导出了  $\tilde{F}_i^j(\mathbf{r}, t)$  的解析表达式; 不过, 多项式阶数越高, 该解析表达式越复杂且计算量越大. 对于非多项式插值时间基函数  $T(t)$ <sup>[9, 10]</sup>, 时间卷积式(29)并没有对应的解析表达式, 只能采用数值积分法计算. 由于  $\alpha_i(\zeta)$  和  $\mathbf{e}_i(\zeta)$  在  $\zeta = \zeta_i$  处存在拐点<sup>[16, 21]</sup>, 时间卷积  $\tilde{\psi}_e^j(\mathbf{r}, t)$  和  $\tilde{\mathbf{U}}_e^j(\mathbf{r}, t)$  的数值积分法(如 1D 高斯积分法)的收敛性较差、计算量较大; 而  $\partial_{\zeta} \alpha_i(\zeta)$  和  $\partial_{\zeta} \mathbf{e}_i(\zeta)$  在  $\zeta = 0$  和  $\zeta = a_i$  处所存在的奇异性<sup>[16, 21]</sup>, 使得直接的数值积分法不能精确计算时间卷积  $\tilde{\psi}_h^j(\mathbf{r}, t)$  和  $\tilde{\mathbf{U}}_h^j(\mathbf{r}, t)$ . 为平滑  $\alpha_i(\zeta)$  和  $\mathbf{e}_i(\zeta)$  并消除  $\partial_{\zeta} \alpha_i(\zeta)$  和  $\partial_{\zeta} \mathbf{e}_i(\zeta)$  的奇异性, 以提高时间卷积式(29)数值积分运算的积分精度和收敛特性, 设  $\tau = \eta \Delta_t$  并采用如下的分段积分法及相应的变量代换法可以将卷积式(29)分区间地表示成为,

$$(1) \eta_d < \eta < \eta_{\min} (\eta_{\min} = \frac{R_{\min}}{c\Delta_t}), \eta_d = |\eta_w|, \eta_w = w/(c\Delta_t):$$

若场点  $o$  的投影点  $o'$  位于源三角形  $S_n^o$  外部 ( $\psi_e(\mathbf{r}, t) = \psi_h(\mathbf{r}, t) = 0, \mathbf{U}_e(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}_h(\mathbf{r}, t) = 0$ )、边内及顶点 ( $\eta_d = \eta_{\min}$  即该积分区间消失), 时间卷积(29)均为零; 若场点  $o$  的投影点  $o'$  位于  $S_n^o$  内部, 有  $\psi_h(\mathbf{r}, t) = 0, \mathbf{U}_e(\mathbf{r}, t) = \mathbf{U}_h(\mathbf{r}, t) = 0$ , 而仅需计算的  $\tilde{\psi}_e^j(\mathbf{r}, t)$  可表

示为,

$$\tilde{\varphi}_e^j(\mathbf{r}, t) = D_{\alpha} (c\Delta_t)^{1-j} \int_{\eta_d}^{\eta_{\min}} \Delta_t^j \partial_t^j T(t - \eta\Delta_t) d\eta \quad (30)$$

(2)  $\eta_{\min} \leq \eta \leq \eta_{i, \min}$  ( $\eta_{i, \min} = R_{i, \min} / (c\Delta_t)$ ): 此时  $\alpha_i(\zeta)$ ,  $\mathbf{e}_i(\zeta)$  为与  $\zeta$  无关的常数有  $\varphi_h(\mathbf{r}, t) = 0$ ;  $\tilde{\varphi}_h^j(\mathbf{r}, t) = 0$ , 而  $\tilde{\varphi}_e^j(\mathbf{r}, t)$  可表示为,

$$\tilde{\varphi}_e^j(\mathbf{r}, t) = (c\Delta_t)^{1-j} \sum_{i=1}^3 \text{sgn}(\xi_i) \alpha_i \int_{\eta_{\min}}^{\eta_{i, \min}} \Delta_t^j \partial_t^j T(t - \eta\Delta_t) d\eta \quad (31)$$

为平滑卷积  $\tilde{U}_{e, i}^j(\mathbf{r}, t)$  的被积函数并消除卷积  $\tilde{U}_{h, i}^j(\mathbf{r}, t)$  的被积函数奇异性, 设  $\eta = \eta_d + \gamma^2$ , 有  $d\eta = 2\gamma d\gamma$ ,  $\zeta = c\Delta_t \gamma \sqrt{2\eta_d + \gamma^2}$ , 则卷积  $\tilde{U}_{e, i}^j(\mathbf{r}, t)$  和  $\tilde{U}_{h, i}^j(\mathbf{r}, t)$  可分别表示为,

$$\tilde{U}_{e, i}^j(\mathbf{r}, t) = 2(c\Delta_t)^{1-j} \mathbf{e}_i \int_{\sqrt{\eta_{\min} - \eta_d}}^{\sqrt{\eta_{i, \min} - \eta_d}} \gamma^2 \sqrt{2\eta_d + \gamma^2} \Delta_t^j \partial_t^j T(t - \eta\Delta_t) d\gamma \quad (32)$$

$$\tilde{U}_{h, i}^j(\mathbf{r}, t) = 2(c\Delta_t)^{1-j} \mathbf{e}_i \int_{\sqrt{\eta_{\min} - \eta_d}}^{\sqrt{\eta_{i, \min} - \eta_d}} \frac{\Delta_t^j \partial_t^j T(t - \eta\Delta_t)}{\sqrt{2\eta_d + \gamma^2}} d\gamma \quad (33)$$

可以证明<sup>[16, 18, 19]</sup>, 当  $d \rightarrow 0$  且  $R_{\min} \rightarrow d$  (即场点  $o$  趋近于非共面场源三角形的公共边或公共顶点) 时时间卷积 (33) 仍然存在 (对数) 奇异性. 若选取位于场三角形内部的面高斯积分节点可避开此奇异性, 也可采用适用于对数奇异性积分的数值积分法<sup>[23]</sup>.

(3)  $\eta_{i, \min} \leq \eta \leq \eta_{i, \max}$  ( $\eta_{i, \max} = \frac{R_{i, \max}}{c\Delta_t}$ ): 设  $\eta = \eta_{A, i} + \gamma^2$  ( $\eta_{A, i} = \frac{\sqrt{a_i^2 + d^2}}{c\Delta_t}$ ), 有  $d\eta = 2\gamma d\gamma$ ,  $\zeta = c\Delta_t \cdot \sqrt{\eta_{A, i}^2 + 2\eta_{A, i}\gamma^2 + \gamma^4}$  ( $\eta_{A, i} = \frac{a_i}{c\Delta_t}$ ), 则各卷积可分别表示为,

$$\tilde{\varphi}_{e, i}^j(\mathbf{r}, t) = 2(c\Delta_t)^{1-j} \int_{\sqrt{\eta_{i, \min} - \eta_{A, i}}}^{\sqrt{\eta_{i, \max} - \eta_{A, i}}} \gamma \alpha_i(\zeta) \Delta_t^j \partial_t^j T(t - \eta\Delta_t) d\gamma \quad (34)$$

$$\tilde{U}_{e, i}^j(\mathbf{r}, t) = 2(c\Delta_t)^{1-j} \int_{\sqrt{\eta_{i, \min} - \eta_{A, i}}}^{\sqrt{\eta_{i, \max} - \eta_{A, i}}} \gamma \zeta \mathbf{e}_i(\zeta) \Delta_t^j \partial_t^j T(t - \eta\Delta_t) d\gamma \quad (35)$$

$$\tilde{\varphi}_{h, i}^j(\mathbf{r}, t) = 2(c\Delta_t)^{1-j} \int_{\sqrt{\eta_{i, \min} - \eta_{A, i}}}^{\sqrt{\eta_{i, \max} - \eta_{A, i}}} \frac{\eta_{A, i} \Delta_t^j \partial_t^j T(t - \eta\Delta_t)}{(\eta_{A, i}^2 + 2\eta_{A, i}\gamma^2 + \gamma^4) \sqrt{2\eta_{A, i} + \gamma^2}} d\gamma \quad (36)$$

$$\tilde{U}_{h, i}^j(\mathbf{r}, t) = 2(c\Delta_t)^{1-j} \int_{\sqrt{\eta_{i, \min} - \eta_{A, i}}}^{\sqrt{\eta_{i, \max} - \eta_{A, i}}} \frac{\Delta_t^j \partial_t^j T(t - \eta\Delta_t)}{\sqrt{\eta_{A, i}^2 + 2\eta_{A, i}\gamma^2 + \gamma^4}}$$

$$\cdot \left[ \gamma \mathbf{e}_i(\zeta) - \frac{\eta_{A, i} \tilde{\mathbf{E}}_i(\zeta)}{\sqrt{2\eta_{A, i} + \gamma^2}} \right] d\gamma \quad (37)$$

其中  $\partial_{\zeta} \mathbf{e}_i(\zeta) = \tilde{\mathbf{E}}_i(\zeta) \partial_{\zeta} \alpha_i(\zeta)$  并基于文献<sup>[16]</sup>的式 (38) ~ (44) 可易于得到  $\tilde{\mathbf{E}}_i(\zeta)$  的具体表达式. 若函数  $\partial_t^j T(t - \eta\Delta_t)$  及其导数在积分区间内不连续, 则积分式 (30) ~ (37) 需进一步采用时间上的分段积分法, 以提高数值积分运算的积分精度和收敛特性. 采用上述变量代换及分段积分法之后, 对任意类型的时间基函数, 采用数值积分法就能精确快速计算时间卷积 (30) ~ (37), 实现了时域积分方程 MOT 算法的阻抗矩阵元素式 (13) 的精确计算. 而另一个优点在于, 其处理过程不随所采用的时间基函数类型和 MOT 算法时间步长的改变而变化.

表 1 时间卷积的数值积分法与解析法之间的均方根误差 ( $\times 10^{-6}$ )

$\Delta_t$ (ns)	高斯积分节点数目	$\tilde{\varphi}_e^1(\mathbf{r}, t)$	$\tilde{\varphi}_e^{-1}(\mathbf{r}, t)$	$\tilde{U}_{e, u}^1(\mathbf{r}, t)$	$\tilde{U}_h^0(\mathbf{r}, t)$	$\tilde{U}_{h, u}^0(\mathbf{r}, t)$
1.00	3	0.271	3.621	1.306	0.345	0.250
	5	1.748	2.927	0.969	0.171	0.270
	7	1.173	8.185	0.636	0.302	0.313
0.50	3	2.511	4.743	1.814	0.321	0.549
	5	1.860	3.061	0.980	0.378	0.370
	7	1.462	1.327	1.050	0.328	0.380
0.25	3	1.889	6.117	1.605	0.596	1.067
	5	1.985	3.861	1.093	0.481	0.604
	7	1.758	5.534	1.115	0.480	0.604

为验证上述时间卷积数值积分法的计算精度与效率, 设源三角形  $S_n^o$  的三个顶点坐标分别为  $(-5.20, 6.14, 6.03)$ ,  $(-8.61, 5.36, 12.17)$  和  $(1.0, 1.732, 0.0)$ , 场点  $\mathbf{r}$  的坐标为  $(0.5, 2.0, 0.001)$ , 时间步长  $\Delta_t = 0.25\text{ns}$ . 当时间卷积运算的 1D 高斯积分节点数目分别为 3, 5 和 7 时, 表 1 给出了计算  $\tilde{\varphi}_e^1(\mathbf{r}, t)$ ,  $\tilde{\varphi}_e^{-1}(\mathbf{r}, t)$  和  $\tilde{\varphi}_h^0(\mathbf{r}, t)$  以及  $\tilde{U}_e^1(\mathbf{r}, t)$  和  $\tilde{U}_h^0(\mathbf{r}, t)$  的  $u$  分量  $\tilde{U}_{e, u}^1(\mathbf{r}, t)$  和  $\tilde{U}_{h, u}^0(\mathbf{r}, t)$  的高斯积分法与解析法<sup>[16, 18]</sup>之间的均方根误差. 从表 1 可以看出, 两种方法结果吻合得非常好且均方根误差总是  $< 10^{-5}$ , 采用较少高斯积分节点数目 (如 3 点 1D 高斯积分法) 和不同的时间步长均可获得非常高的数值积分精度. 另外, 若选取 1 阶插值时间基函数 (即三角时间基函数) 且高斯积分节点为 5 时, 数值积分法的计算时间仍略少于解析法, 由此可知本文的数值积分法在保持高精度的同时计算量较少.

#### 4 数值计算实例及讨论分析

下面通过具体计算实例来考察和验证本文方法的正确性和有效性. 为了尽量排除其它因素对时间步进算法求解精度和时稳定性不利的影响, 采用了双精

度计算以降低数值截断误差. 矩阵方程求解采用 LU 分解的直接解法以避免迭代解法(如 CG 迭代解法)所产生的方程求解误差(如收敛域值不足够小等). 采用较细的网格剖分以减少目标几何建模所产生的误差, 且频域积分方程矩量法在各不同频率点上的网格剖分与 TDIE 的 MOT 算法相同, 即使较高频率点的矩量法结果与精确值相比可能存在一定的误差; 而时域混合场积分方程的加权因子  $w_{\text{cfe}}$  总是选为 0.2. 入射波采用以下的调制高斯平面波,

$$\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{p}} \cos[2\pi f_0(t - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}}/c)] \cdot e^{-(t-t_p - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}}/c)^2/(2\sigma^2)} \quad (38)$$

其中,  $f_0$  为入射波脉冲的中心频率, 且  $\sigma = 7/(2\pi f_{\text{bw}})$  ( $f_{\text{bw}}$  称为入射波的脉冲宽度),  $t_p = 8\sigma$ , 则入射波在频率点  $f = f_0 \pm f_{\text{bw}}$  处的能量比在  $f = f_0$  时要低 160dB, 并将入射波频率成分相对值下降到约  $10^{-5}$  时的较高频率设置为最高频率  $f_{\text{max}}$ ;  $\hat{\mathbf{k}}$  和  $\hat{\mathbf{p}}$  分别为入射波的传播方向和极化方向, 不做特殊说明本文所有例子中均选取  $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{e}_x$ ,  $\hat{\mathbf{k}} = -\mathbf{e}_z$ .

因采用平面三角形网格剖分理想导电立方体的几

何建模误差小且其内谐振频率可解析地获得(如边长为 1m 的理想导电立方体目标的前几个内谐振频率分别为约 212.1MHz、259.8MHz、335.4MHz、…), 首先以边长为 1m 的理想导电立方体目标为例且被剖分成 696 个三角形贴片、共 1044 个未知量.

若选取  $f_0 = 120\text{MHz}$  且  $f_{\text{bw}} = 80\text{MHz}$ , 可避开低频成分及目标内谐振对时域电场积分方程和时域磁场积分方程 MOT 算法求解过程的影响, 有利于单独分析阻抗矩阵的计算精度对时域积分方程 MOT 算法后时稳定性和求解精度的影响. 由图 3(a) 和 (b) 可以看出, 在精确计算时域阻抗矩阵条件下, 若无低频成分且入射波带宽内不包含目标内谐振频率, 不论是时域电场、时域磁场或时域混合场积分方程的 MOT 算法的后时均非常稳定、未见发散现象; 同时, 整个入射波频率带宽范围内各个频点上的双站 RCS 与频域积分方程矩量法结果也吻合得非常好、具有非常高的求解精度(如图 3(c) ~ (f) 所示), 即使相对幅度非常低 ( $< 10^{-8}$ ) 的低频点  $f = 40\text{MHz}$  和 高频点  $f = 200\text{MHz}$  时的 RCS 也仍然与频域积分方程矩量法结果吻合得非常好.

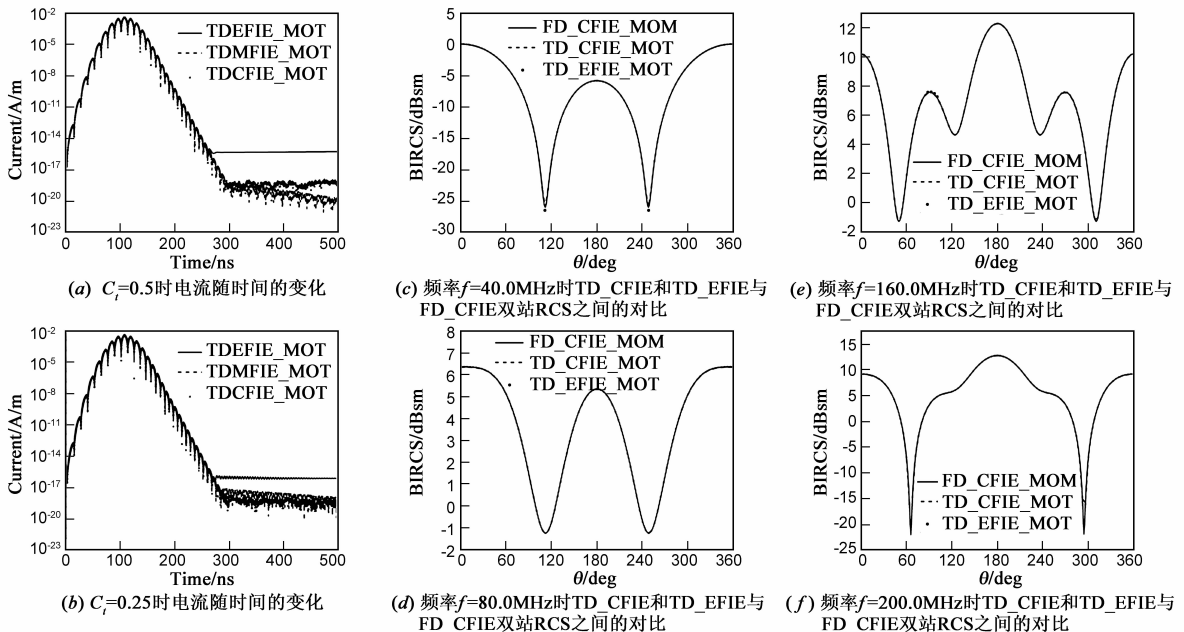


图3 边长为1.0m的理想导电立方体目标时域积分方程MOT算法的后时稳定性和求解精度分析以及与频域积分方程矩量法对比: 无低频成分和无内谐振存在

在考察和分析精确计算时域阻抗矩阵条件下时域积分方程 MOT 算法后时稳定性和求解精度的基础上, 下面考察目标内谐振频率成分对 MOT 算法后时稳定性和求解精度的影响. 在上一个例子基础上选取  $f_0 = 200\text{MHz}$  且  $f_{\text{bw}} = 80\text{MHz}$ . 此时入射波频带内包含了频率分别为 212.1MHz 和 259.8MHz 的两个谐振频率点. 由图 4(a) 和 (f) 可以看出, 时域混合场积分方程时间步进算

法的后时仍然非常稳定的, 且与频域积分方程矩量法结果吻合得非常好. 由图 4(a) 和 (b) 还可以看出, 在精确计算时域阻抗矩阵条件下, 若入射波带宽内包含了目标内谐振频率点, 采用了不同时间步长的时域电场、时域磁场或混合场积分方程 MOT 算法后时仍然是非常稳定的; 尽管时域电场或时域磁场积分方程 MOT 算法求解的电流幅度与正确值相比要大较多的数量级, 却

并未有明显的发散现象,但是却导致了相对幅度较小的频率成分所对应的雷达双站散射截面与频域积分方程矩量法相比出现了较大的误差(甚至可能是错误的结果);另外,由图 4(a)和(b)可以看到,时域电场和磁场积分方程的电流在时间早期( $t \leq 120\text{ns}$ 左右)与混合场积分方程仍然吻合较好、其误差出现在时间较晚期,这也正是目标产生了谐振的表征.由于时间早期电流包含有较多高频成分、时间晚期电流包含较多低频成分,尽管  $f = 180\text{MHz}$  和  $f = 260\text{MHz}$  两个频率成分的相对幅度相同,因而较低的频率点  $f = 180\text{MHz}$  的双站 RCS (如图 4(c))却比较高频率点  $f = 260\text{MHz}$  的误差更大

(如图 4(f)).

这样,不论是否存在低频成分、也不管入射波频带内是否包含了目标内谐振频率点,只要采用隐式时间步进算法并精确计算时域阻抗矩阵,求解时域混合场积分方程的 MOT 算法时间后期非常稳定且计算结果也十分精确.在此意义上讲,隐式时间步进算法的采用和精确计算时域阻抗矩阵的实现是采用 MOT 算法能够精确稳定地求解时域积分方程的最大贡献和最为重要的研究进展(尽管并不能够从数学上证明,它们就是 TDIE 的 MOT 算法后时绝对稳定的充分条件).

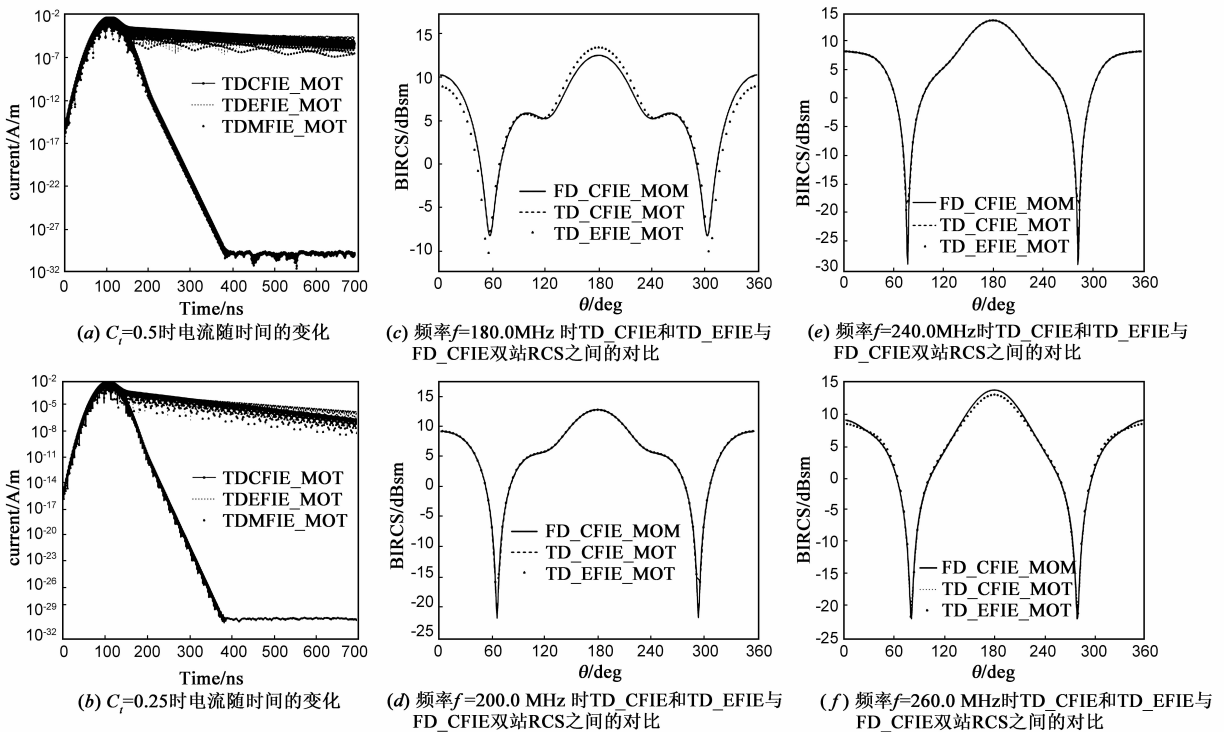


图4 边长为1.0m的理想导电立方体目标时域积分方程MOT算法的后时稳定性和求解精度分析以及与频域积分方程矩量法对比:无低频成分但有内谐振存在

为进一步证明该方法在求解精度和确保后时稳定性的能力,将长度为2.52m、最大宽度为0.97588m、最大高度为0.32m的理想导体杏仁核剖分成为1530个三角形、共2295个未知量.选取  $f_0 = 220\text{MHz}$  且  $f_{\text{bw}} = 80\text{MHz}$  的入射波、时间步长  $\Delta_t = 0.08\text{ns}$ ,并分别采用了1阶和2阶插值多项式时间基函数.图5给出了时域电场、磁场和混合场积分方程(加权系数为0.8)MOT算法的电流随时间的变化关系及其对双站 RCS 与频域积分方程矩量法之间的对比.由图5可以看出,采用了1阶和2阶插值多项式时间基函数的时域电场、磁场和混合场积分方程 MOT 算法的后时仍然均非常稳定,且双站 RCS

与频域积分方程矩量法结果仍然吻合得非常好、具有非常高的求解精度.

从前面的几个计算实例并通过大量的计算实例表明,在精确计算时域阻抗矩阵的条件下采用不同的时间步长并不会明显影响时间步进算法的后时稳定性,较大的时间步长并不能够提升时间步进算法的后时稳定性,反而过大的时间步长将降低其计算精度.当时间步长较大时基于传统的内外层积分均采用高斯积分法的 TDIE-MOT 算法表现出后时更为稳定的特性,是因为较大时间步长有利于阻抗矩阵的精确计算.

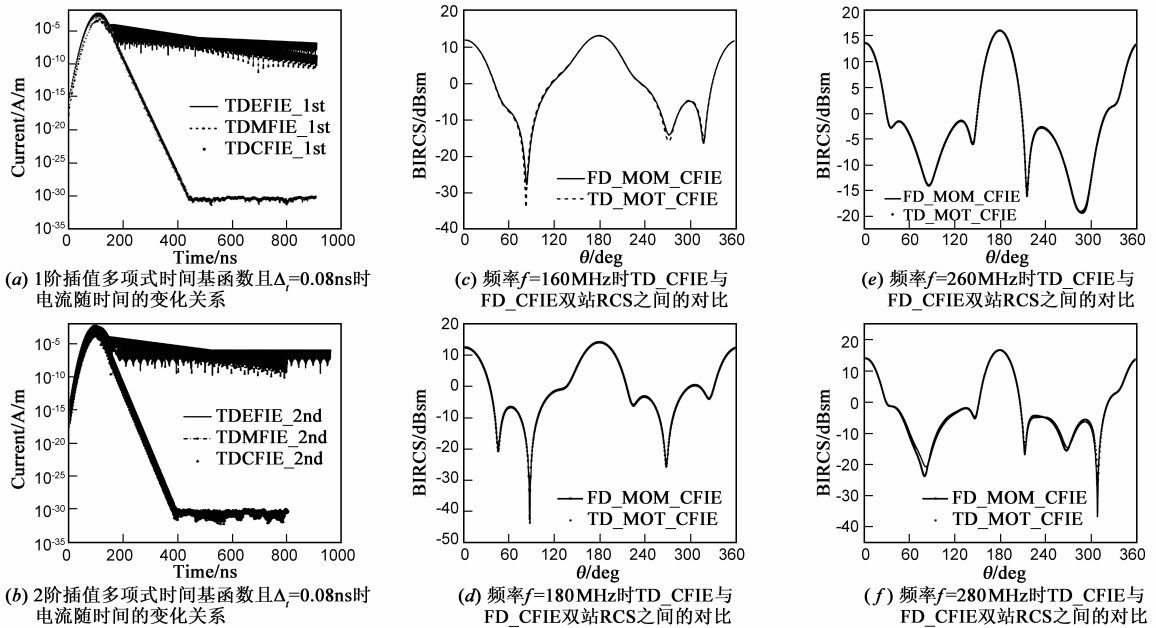


图5 杏仁核时域积分方程MOT算法的后时稳定性和求解精度分析以及与频域积分方程矩量法对比

## 5 结束语

通过变量代换平滑三角形上推迟位(标量位函数和矢量位函数)并消除推迟矢量位旋度的奇异性,采用1D数值积分法就能够快速地精确计算任意类型时间基函数与推迟位函数及推迟矢量位旋度之间的时间卷积运算,实现了基于任意类型时间基函数和不同时间步长条件下时域(电场/磁场/混合场)积分方程MOT算法阻抗矩阵元素的精确计算(由于篇幅的限制,尽管文中仅给出了二阶时间基函数<sup>[8]</sup>的计算实例,而对其他类型的时间基函数<sup>[9,10]</sup>的处理过程与三角形时间基函数<sup>[4]</sup>几乎相同)。通过计算实例表明,时域阻抗矩阵的精确计算大幅度地提高了MOT算法的求解精度和后时稳定性,便于在更大范围内选取MOT算法的时间步长。

## 参考文献

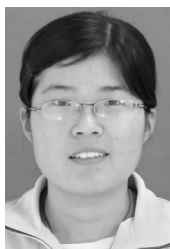
- [1] Shanker B, Ergin A A, et al. Fast analysis of transient electromagnetic scattering phenomena using the multilevel plane wave time domain algorithm [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2003, 51(3): 628 – 641.
- [2] Yilmaz A E, Jin Jian-Ming, Eric Michielssen. Time domain adaptive integral method for surface integral equations [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2004, 52(10): 2692 – 2708.
- [3] 任仪, 赵延文, 聂在平, 马文敏. 基于高阶叠层矢量基函数的时域电磁场积分方程方法[J]. 电子学报, 2008, 36(3): 516 – 519.  
Ren Yi, Zhao Yanwen, Nie Zaiping, Ma Wenmin. Time-domain integral equations using higher order hierarchical vector basis

functions [J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(3): 516 – 519. (in Chinese)

- [4] Rao S M, Wilton D R. Transient scattering by conducting surfaces of arbitrary shape [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1991, 39(1): 56 – 61.
- [5] Vechinski D, Rao S M. A stable procedure to calculate the transient scattering by conducting surfaces of arbitrary shape [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1992, 40(6): 661 – 665.
- [6] Davies P J, Duncan D B. Averaging techniques for time-marching schemes for retarded potential integral equations [J]. Applied Numerical Mathematics, 1997, 23(3): 291 – 310.
- [7] Dodson S J, Walker S P, Bluck M J. Implicit and stability of time domain integral equation scattering analysis [J]. Applied Computational Electromagnetics Society Journal, 1997, 13(1): 291 – 301.
- [8] Manara G, et al. A space-time discretization criterion for a stable time-marching solution of the electric field integral equation [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1997, 45(3): 527 – 532.
- [9] Weile D S, Pisharody G, Chen N W, Shanker B, Michielssen E. A novel scheme for the solution of the time-domain integral equations of electromagnetics [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2004, 52(1): 283 – 295.
- [10] Hu J L, Chan C H, Xu Y. A new temporal basis function for the time-domain integral equation method [J]. IEEE Microwave Wireless Components Letters, 2001, 11(1): 465 – 466.
- [11] Wang P, Xia M Y, Jin J M, Zhou L Z. Time-domain integral equation solvers using quadratic B-spline temporal basis

- functions [J]. *Microwave Optical Technology Letter*, 2007, 49(5): 1154 – 1159.
- [12] Pingenot J, Chakraborty S, Jandhyala V. Polar integration for exact space-time quadrature in time-domain integral equations [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2006, 54(10): 3037 – 3042.
- [13] Shanker B, Lu M, Michielssen E. Time domain integral equation analysis of scattering from composite bodies via exact evaluation of radiation fields [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2009, 57(5): 1506 – 1520.
- [14] Shi Y F, Xia M Y, Chen R S, Michielssen E, Lu Mingyu. Stable electric field TDIE solvers via quasi-exact evaluation of MOT matrix elements [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2011, 59(2): 574 – 585.
- [15] Yücel A C, Ergin A A. Exact evaluation of retarded-time potential integrals for the RWG bases [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2006, 54(5): 1496 – 1502.
- [16] Ülkü H A, Ergin A A. Analytical evaluation of transient magnetic fields due to RWG current bases [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2007, 55(12): 3565 – 3575.
- [17] 赵庆广, 赵延文, 毕海燕, 聂在平. 利用时间步进算法精确稳定求解时域积分方程 [J]. *电子学报*, 2008, 36(6): 1135 – 1139.  
Zhao Qingguang, Zhao Yanwen, Bi Haiyan, Nie Zaiping. Accurate and stable solution of time-domain integral equation using marching on in time method [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2008, 36(6): 1135 – 1139. (in Chinese)
- [18] Ülkü H A, Ergin A A. Application of analytical retarded-time potential expressions to the solution of time domain integrals equations [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2011, 59(11): 4123 – 4131
- [19] Ülkü H A, Ergin A A. On the singularity of the closed-form expression of the magnetic field in time domain [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2011, 59(2): 691 – 694.
- [20] Pray A J, Nair N V, Shanker B. Stability properties of the time domain electric field integral equation using a separable approximation for the convolution with the retarded potential [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2012, 60(8): 3772 – 3781.
- [21] Zhu M D, Zhou X L, Yin W Y. Radial integration scheme for handling weakly singular and near-singular potential integrals [J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2011, 10(1): 792 – 795.
- [22] Rao S M, Wilton D R, Glisson A W. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1982, 30(3): 408 – 418.
- [23] Ma J, Rokhlin V, Wandzura S. Generalized Gaussian quadrature rules for systems of arbitrary functions [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1996, 33(3): 971 – 996.

### 作者简介



**贾苗苗** 女, 1986 年出生于山东, 电子科技大学博士研究生. 主要研究兴趣包括时域积分方程法及其快速算法、电磁散射与逆散射等.

E-mail: mmiaojia@126.com



**赵延文** 男, 1965 年出生于四川, 电子科技大学教授, 博士生导师, 中国电子学会高级会员. 主要研究兴趣包括计算电磁学、非均匀介质中的场与波、电磁散射与逆散射等, 在国内外发表学术论文 100 余篇, 并获国家科技进步二等奖 1 项、省部级科技进步奖 2 项.

E-mail: ywzhao@uestc.edu.cn

**郑宇腾** 男, 1988 年出生于甘肃兰州, 电子科技大学博士研究生. 主要研究兴趣包括频域积分方程矩量法及其快速算法、电磁散射与逆散射等.

**蔡强明** 男, 1987 年出生于四川仪陇, 电子科技大学博士研究生. 主要研究兴趣包括计算电磁学、电磁散射与逆散射等.