

一种基于拟牛顿法的 CS 投影矩阵优化算法

郑 红, 李 振, 黄 盈

(北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院, 北京 100191)

摘 要: 压缩感知 (Compressed Sensing, CS) 理论中, 投影矩阵优化是一类通过提高观测数据信息量而改善性能的方法. 由于投影矩阵与稀疏字典内积构造的 Gram 矩阵必定奇异, 基于广义逆矩阵求解方法存在计算精度的问题. 本文提出了一种利用拟牛顿法的 CS 投影矩阵优化算法. 该算法分为两步: 一是利用阈值函数约束 Gram 矩阵非对角线元素, 使投影矩阵与稀疏字典的互相关系数逼近 Welch 界; 二是采用秩 2 校正得到 Hessian 阵逆近似去修正梯度搜索方向. 两个步骤交替执行, 直到解出符合优化要求的投影矩阵. 该算法始终保持下降性, 具有超线性收敛速度, 避免了矩阵函数二阶导数复杂的计算, 计算量较小. 实验结果表明, 当信号稀疏度或观测数据相同时, 本文算法的重构结果优于其他算法.

关键词: 压缩感知; 投影矩阵优化; Gram 矩阵; 拟牛顿法;

中图分类号: TN911.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2014)10-1977-06

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.10.017

An Optimization Method for CS Projection Matrix Based on Quasi-Newton Method

ZHENG Hong, LI Zhen, HUANG Ying

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China)

Abstract: In compressed sensing (CS for short) theory, the projection matrix optimization is a kind of approach of improving performance by increasing the amount of information of observational data. This paper presents a CS projection matrix optimization algorithm based on quasi-Newton method. The algorithm is divided into two steps. First, use threshold function to restrain the non-diagonal elements in order to make the Mutual Coherence between the projection matrix and sparse dictionary approximate Welch bound. Second, use Rank two to check and get Hessian matrix inverse to amend the direction of the gradient search. Two steps are alternately performed until the projection matrix which meets the requirement of the optimal solution is worked out. This algorithm always maintains descent and has a super-linear convergence rate, which requires less computation. Experimental results show that when signal sparse degree or observation data is identical, this proposed algorithm outperforms other algorithms.

Key words: compressed sensing; projection matrix optimization; Gram matrix; quasi-Newton method

1 引言

压缩感知 (Compressed Sensing, CS) 理论是一种不同于传统香农采样定理的信号欠采样理论, 其核心思想是: 利用信号先验稀疏性, 通过尽量少的观测信息恢复原信号^[1,2]. 因其为缓解信号采集和存储过程中海量数据压力提供了一种新的解决思路, 而受到众多研究人员的关注^[3~5]. 利用信号稀疏性, 构造一个 CS 系统包括两个步骤: 设计感知机构 (编码机构) 和选取合适的重构算法 (解码机构). 两个步骤缺一不可, 然而, 信号重构 (解码) 所需的数据量依赖于感知机构和稀疏字典之间的互

相关性和信号的稀疏度^[6]. 因此, 设计优秀的感知机构是首先需要解决的问题, 即: 如何使每个观测数据包含更多的信息, 或者说精确重构所需的观测数据更少.

常用投影矩阵优化方法帮助完成感知机构的设计, 它通过一系列步骤降低投影矩阵与稀疏字典的最差相似性^[7], 进而提高压缩感知重构性能. 这类方法首先通过投影矩阵与稀疏字典的内积构造一个 Gram 矩阵^[8], 然后通过研究 Gram 矩阵的特性使两者不相关, 最后解出满足该条件下的投影矩阵. 文献^[7]中, Elad 通过阈值函数减少 Gram 矩阵的非对角线元素, 该算法参数选择依靠经验, 迭代次数较多, 而且收缩操作可能引入新的

较大干扰. Xu 等^[9]通过等角紧框架 (Equiangular Tight Frame, ETF) 来逐步更新 Gram 矩阵, 让 Gram 矩阵的非对角线元素等于矩阵的最大互相关系数, 为了获得较好的性能, 此方法迭代次数也较多. Zhao 等^[10]用平均化 Gram 矩阵大于零的特征值的方法来逐步优化投影矩阵. 仿真实验结果表明上述方法可以不同程度地减小重建误差和压缩比. 然而, 这类方法均采用广义逆矩阵反解出投影矩阵, 由于 Gram 矩阵必然奇异, 所以也带来了计算精度的问题.

一类解决方法是用矩阵函数的无约束非线性最优化方法逼近. 文献[11]中, Vahid Abolghasemi 采用梯度下降法使 Gram 矩阵接近于单位阵. 然而, 单位矩阵是一种严格约束条件, 并不适合做逼近目标^[12]. 为解决该问题, 文献[12]选择了 Grassmanian 框架的变型作为 Gram 矩阵的逼近目标. 在此基础上, 提出了一种基于矩阵梯度的交替最小化算法. 上述方法用数学规划的方法来代替广义逆计算, 取得了不错的效果. 然而, 这类算法存在收敛速度慢, 搜索过程可能振荡的缺点.

为克服这些缺点, 本文将拟牛顿法推广到矩阵函数中, 提出了一种新的 CS 投影矩阵优化算法. 该算法迭代执行两步: 第一步, 通过投影矩阵和稀疏字典的内积构造 Gram 矩阵, 然后利用阈值函数将 Gram 矩阵非对角元素限制在 Welch 界附近. 第二步, 利用拟牛顿法计算出矩阵函数的 Hessian 阵逆近似及符合 Wolfe 准则的步长因子, 通过求解最优化问题得到新的投影矩阵. 本算法逼近速度较快, 稳健性好, 计算复杂度较低.

2 压缩感知背景

压缩感知是一种在保证信息不损失的前提下, 信号采集和压缩同时进行的方法. 其将信号投影到感知机构(投影矩阵)上, 利用这些投影得到的观测值将原始信号恢复出来. 使用压缩感知的前提: 被采样信号是稀疏信号. 虽然自然界中绝大部分信号都不是稀疏信号, 但是可以利用适当的稀疏字典, 使其具有稀疏性质. 因此, 本文只讨论 K -稀疏信号, 设 N 维信号 x 是在稀疏字典 Ψ 下的 K -稀疏信号 $x = \Psi\alpha$, 其中 $\|\alpha\|_0 = K, K \ll N$. CS 使用 $M \times N$ 的投影矩阵 $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M)$ 对其进行采样得到观测值 $y = (y_1, y_2, \dots, y_M)$. CS 采样框架可以表示为

$$y = \Phi x = \Phi \Psi \alpha \quad (1)$$

由于 $M \ll N$, 因此从观测值 y 重构出信号 \hat{x} 变成了求解如下最优化问题:

$$\min \|\alpha\|_0 \quad \text{s.t.} \quad y = \Phi \Psi \alpha \quad (2)$$

其中, $\|\alpha\|_0$ 表示 α 的 l_0 范数. 由上式的解 $\hat{\alpha}$, 得到重构信号 $\hat{x} = \Psi \hat{\alpha}$.

压缩感知的过程如图 1 所示, 由投影矩阵组成的编

码机构对信号 x 采集编码, 得到观测数据 y , 然后由重构算法利用投影矩阵和稀疏字典重构出信号估计 \hat{x} . 为了得到好的压缩感知重构效果, 我们期望投影矩阵 Φ 与稀疏字典 Ψ 不相关. 一种表达两个矩阵关系的常用刻画是互相关系数 (Mutual Coherence), 这里我们引用文献[7]中的定义:

$$\mu \{D\} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq i, j \leq k, i \neq j} \frac{|d_i^T d_j|}{\|d_i\| \cdot \|d_j\|} \quad (3)$$

其中, 矩阵 D 为 $\Phi\Psi$ 进行列单位化后的矩阵, d_i 为矩阵 D 的列向量. 互相关系数 μ 定义为矩阵 D 中任意两列内积的最大值. 令 Gram 矩阵 $Z = \Psi^T \Phi^T \Phi \Psi$, 互相关系数 μ 也可表示为 Gram 矩阵中非对角线元素的最大值, 即 $\mu = \max_{i \neq j} |\zeta_{ij}|$, 其中, $\zeta_{ij} = d_i^T d_j$ 是 Gram 矩阵的元素.

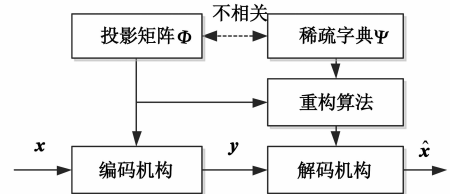


图1 压缩感知结构示意图

3 基于拟牛顿法的 CS 投影矩阵优化

为了克服第 1 节中指出的问题, 本文将拟牛顿法引入到矩阵函数优化问题中, 提出了一种基于拟牛顿法的压缩感知投影矩阵优化方法. 提出的算法延续了文献[7, 11, 12]的研究思路, 用 Hessian 阵逆近似对每次的梯度搜索方向进行修正, 使其搜索效率提高, 并且减少了搜索振荡的情况.

3.1 矩阵函数的梯度下降搜索

由第 2 节的定义可知, 互相关系数 μ 的物理意义是投影矩阵 Φ 与稀疏字典 Ψ 的最差相似性. 理所当然的期望其越小越好. 文献[13]给出了互相关系数 μ 的一个下界, 也叫 Welch 界, 即

$$\mu \geq \sqrt{\frac{N-M}{M(N-1)}} \quad (4)$$

其中, N 为信号维度, M 为观测数据个数. 为了保证没有过大的互相关系数, 这里对 Gram 矩阵 Z 的非对角线元素进行约束. 简单直接的解决方案是限制后的矩阵 Ω 具有单位对角线元素和符合下列条件的非对角线元素, 约束函数如下:

$$\forall i, j, i \neq j, \omega_{ij} = \begin{cases} \zeta_{ij}, & \text{if } |\zeta_{ij}| < \mu_E \\ \mu_E \cdot \text{sign}(\zeta_{ij}), & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

其中, ζ_{ij}, ω_{ij} 分别为矩阵 Z , 矩阵 Ω 的第 ij 元素, μ_E 为 Welch 界上的互相关系数. 约束后的矩阵 Ω 使最差相似性不大于 Welch 界. 下一步的任务是解出符合该条件的投影矩阵 Φ , 可以把该问题看作投影矩阵 Φ 作为变

量矩阵的无约束优化问题,如下式所示:

$$\min_{\Phi} \|\Psi^T \Phi^T \Phi \Psi - \Omega\|_F^2 \quad (6)$$

其中, $\|\cdot\|_F$ 为 Frobenius 范数. 令 $J(\Phi) = \|\Psi^T \Phi^T \Phi \Psi - \Omega\|_F^2$, 计算矩阵梯度:

$$g(\Phi) = \frac{\partial J(\Phi)}{\partial \Phi} \quad (7)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \Phi} \text{tr}\{(\Psi^T \Phi^T \Phi \Psi - \Omega)^T (\Psi^T \Phi^T \Phi \Psi - \Omega)\}$$

其中, $\text{tr}(\cdot)$ 为矩阵迹, 根据矩阵求导性质^[14]得到:

$$g(\Phi) = 4\Phi\Psi(\Psi^T \Phi^T \Phi \Psi - \Omega)\Psi^T \quad (8)$$

文献[11,12]以负梯度方向为搜索方向逼近目标. 其中, 文献[11]凭借经验选择步长因子, 文献[12]根据上一次迭代的步长因子计算新的步长因子. 该类方法实际上是把梯度下降法推广到矩阵函数中. 不足处是某些情况下, 负梯度方向并不是最优的搜索方向(如“山谷”目标函数会引起搜索振荡), 只具有线性收敛速度, 收敛速度慢. 当步长因子选择不恰当时, 算法可能不收敛.

3.2 拟牛顿条件

拟牛顿法是常用的改进方法, 其核心是利用 Hessian 矩阵逆的近似来修正搜索方向. 对于标量函数, 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 二次连续可微. 那么, f 在 $\mathbf{x}^{(k+1)}$ 处的二次 Taylor 展开式为

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}^{(k+1)}) + \mathbf{g}^{(k+1)T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k+1)}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k+1)})^T \mathbf{G}^{(k+1)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k+1)}) \quad (9)$$

对上式求导

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{g}^{(k+1)} + \mathbf{G}^{(k+1)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k+1)}) \quad (10)$$

令 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k)}$, 位移 $\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$, 梯度差 $\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k+1)} - \mathbf{g}^{(k)}$, 则有:

$$\mathbf{G}^{(k+1)} \mathbf{s}^{(k)} \approx \mathbf{y}^{(k)} \quad (11)$$

拟牛顿法目标是构造出 Hessian 矩阵的近似 $\mathbf{B}^{(k+1)}$ 满足这种关系式, 即:

$$\mathbf{B}^{(k+1)} \mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{y}^{(k)} \quad (12)$$

上式称作拟牛顿条件, 令 $\mathbf{H}^{(k+1)} = \mathbf{B}^{(k+1)^{-1}}$, 则得到另一种形式:

$$\mathbf{H}^{(k+1)} \mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{s}^{(k)} \quad (13)$$

本文将拟牛顿法的概念推广到矩阵函数中, 借鉴 DFP 法的思想, 即对满足拟牛顿条件的所有对称矩阵中施加额外的条件, 要求 $\mathbf{H}^{(k+1)}$ 在某种意义上要靠近当前矩阵 $\mathbf{H}^{(k)}$. 构造秩 2 校正公式, 利用待定系数法求解, 设

$$\mathbf{H}^{(k+1)} = \mathbf{H}^{(k)} + \mathbf{u}\mathbf{u}^T \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{v}\mathbf{v}^T \boldsymbol{\beta} \quad (14)$$

其中, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 为 $M \times N$ 矩阵, \mathbf{u}, \mathbf{v} 为 $M \times N$ 矩阵. 代入式(13)

$$\mathbf{H}^{(k+1)} \mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{y}^{(k)} + \mathbf{u}\mathbf{u}^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{y}^{(k)} + \mathbf{v}\mathbf{v}^T \boldsymbol{\beta} \mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{s}^{(k)} \quad (15)$$

这里 \mathbf{u}, \mathbf{v} 选择不唯一, 可选 $\mathbf{u} = \gamma \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{y}^{(k)}$, $\mathbf{v} = \theta \mathbf{s}^{(k)}$, 其中, γ, θ 是待定的标量参数.

$$\gamma^2 \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{y}^{(k)} \mathbf{y}^{(k)T} \mathbf{H}^{(k)T} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{y}^{(k)} + \theta^2 \mathbf{s}^{(k)} \mathbf{s}^{(k)T} \boldsymbol{\beta} \mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{s}^{(k)} - \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{y}^{(k)} \quad (16)$$

$$\mathbf{H}^{(k)} \mathbf{y}^{(k)} (\gamma^2 \mathbf{y}^{(k)T} \mathbf{H}^{(k)T} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{y}^{(k)} + \mathbf{I}) + \mathbf{s}^{(k)} (\theta^2 \mathbf{s}^{(k)T} \boldsymbol{\beta} \mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad (17)$$

利用待定系数法, 可得

$$\boldsymbol{\alpha} \gamma^2 = (-1) (\mathbf{y}^{(k)T} \mathbf{H}^{(k)T})^{-1} (\mathbf{y}^{(k)})^{-1} = (-1) (\mathbf{y}^{(k)} \mathbf{y}^{(k)T} \mathbf{H}^{(k)T})^{-1} \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\beta} \theta^2 = (\mathbf{s}^{(k)T})^{-1} (\mathbf{y}^{(k)})^{-1} = (\mathbf{y}^{(k)} \mathbf{s}^{(k)T})^{-1} \quad (19)$$

代入式(14), 得到

$$\mathbf{H}^{(k+1)} = \mathbf{H}^{(k)} - \mathbf{H}^{(k)} \mathbf{y}^{(k)} \mathbf{y}^{(k)T} \mathbf{H}^{(k)} (\mathbf{y}^{(k)} \mathbf{y}^{(k)T} \mathbf{H}^{(k)T})^{-1} + \mathbf{s}^{(k)} \mathbf{s}^{(k)T} (\mathbf{y}^{(k)} \mathbf{s}^{(k)T})^{-1} \quad (20)$$

令初始条件 $\mathbf{H}(0)$ 为单位阵, 即初始搜索方向 $\mathbf{p}^{(0)}$ 为负梯度方向, 第 k 次迭代的基本结构如下:

①置 $\mathbf{p}^{(k)} = -\mathbf{H}^{(k)} \mathbf{g}^{(k)}$;

②沿 $\mathbf{p}^{(k)}$ 作线搜索得到 $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \lambda_k \mathbf{p}^{(k)}$, λ_k 为步长因子;

③校正 $\mathbf{H}^{(k)}$ 得到 $\mathbf{H}^{(k+1)}$;

3.3 步长因子

本小节讨论本文算法的收敛性. 拟牛顿法当且仅当修正因子 $\mathbf{H}^{(k)}$ 的正定时, 即 $\mathbf{s}^{(k)}$ 和 $\mathbf{y}^{(k)}$ 满足曲率条件 $\mathbf{s}^{(k)T} \mathbf{y}^{(k)} > 0$ 时, 具有全局收敛性. 然而, 该条件对非凸函数并不是总是成立. 故在一般情况下, 要对确定的步长因子施加某种限制, 从而强迫成立. 事实上, 如果要求步长满足 Wolfe 准则, 就可保证成立. 有 $\mathbf{g}^{(k+1)T} \mathbf{s}^{(k)} > \sigma \mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{s}^{(k)}$, 利用位移 $\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$ 和梯度差 $\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k+1)} - \mathbf{g}^{(k)}$, 则

$$\mathbf{y}^{(k)T} \mathbf{s}^{(k)} \geq (\sigma - 1) \mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{s}^{(k)} = (\sigma - 1) \lambda_k \mathbf{g}^{(k)T} \mathbf{p}^{(k)} \quad (21)$$

因为 $\sigma < 1$ 且 $\mathbf{p}^{(k)}$ 是下降方向, 所以右端的项是正的, 从而曲率条件成立. 选择满足 Wolfe 准则的步长因子可保证修正因子 $\mathbf{H}^{(k)}$ 正定性. 本文采用经典的回溯 Armijo 搜索过程确定步长因子.

综上, 提出的算法步骤如算法 1 所示.

算法 1 本文算法

输入参数: 投影矩阵 $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 稀疏字典 $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 迭代次数 L , 收敛容忍 ϵ

(1) 迭代 l 从 1 到 L ;

(2) 计算 Gram 矩阵 $\Omega \leftarrow \Psi^T \Phi^T \Phi \Psi$;

(3) 使用公式(5)约束 Gram 矩阵 Ω ;

(4) 初始化 $\mathbf{H}^{(0)}$ 为单位矩阵, $k \leftarrow 0$;

(5) While $\|\mathbf{g}(\Phi)\|_2 > \epsilon$ do;

(6) 矩阵梯度 $\mathbf{g}(\Phi) \leftarrow 4\Phi\Psi(\Psi^T \Phi^T \Phi \Psi - \Omega)\Psi^T$;

- (7) 搜索方向 $\mathbf{p}^{(k)} \leftarrow -\mathbf{H}^{(k)} \mathbf{g}(\Phi)$;
- (8) 按照 Wolfe 条件沿方向 $\mathbf{p}^{(k)}$ 线性搜索求步长因子 α_k , 式(21);
- (9) $\Phi^{(k+1)} \leftarrow \Phi^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)}$;
- (10) $\mathbf{s}^{(k)} \leftarrow \Phi^{(k+1)} - \Phi^{(k)}$ 与 $\mathbf{y}^{(k)} \leftarrow \nabla_{\Phi} \mathbf{J}^{(k+1)} - \nabla_{\Phi} \mathbf{J}^{(k)}$;
- (11) 按照式(18)计算 $\mathbf{H}^{(k+1)}$;
- (12) 如果矩阵梯度小于容忍, 则执行下一步, 否则跳到第 6 步, $k \leftarrow k + 1$;
- (13) 如果迭代 $l > L$, 则跳出, 输出投影矩阵 $\Phi^{(k)}$, 否则跳到第 2 步。

4 实验与分析

提出的算法在本节中进行了验证. 其中, 初始投影矩阵选择高斯随机矩阵, 稀疏字典选择 DCT 变换矩阵, 重构算法采用 OMP 算法. 实验 1、实验 2 分别对一维信号、二维图像进行了压缩感知采样与重构. 图 2、图 3 可以看出, 在不改变观测值个数的情况下, 本文算法能够有效的提高重构效果. 实验 3 对比了不同算法的投影矩阵优化效果, 从图 4、图 5 中可以看出, 经过 Elad 方法、Vahid 方法对投影矩阵优化后, 压缩感知的性能均有提高, 但本文算法表现更好. 表 2 表明本文算法在提高重构精度的同时, 由于没有计算矩阵函数复杂的二阶导数, 所以增加的计算量不多. 测试环境为 Matlab R2011b、Pentium Dual-Core CPU E5200 和 1.96GB 内存.

4.1 一维信号压缩感知采样与重构

本小节测试一维稀疏信号的压缩感知采样与重构的效果. 首先, 用随机排列 (Randperm) 的方法生成非零项个数 $s = 25$, 长度 $n = 200$ 的稀疏信号, 分别用高斯投影矩阵和本文算法优化后的投影矩阵进行采样, 观测值个数均为 $m = 50$, 再利用 OMP 重构算法进行重构原信号. 优化参数迭代次数 $L = 200$, 容忍 $\epsilon = 1e - 6$. 实验结果如图 2.

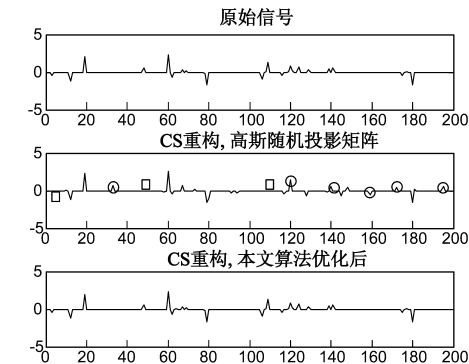


图2 本文算法优化投影矩阵后重构效果(一维信号)

可以看出, 本文算法优化后, CS 的重构效果有明显提高. 从上到下, 第 1 个子图为原信号 (随机的稀疏信号). 第 2 个子图为高斯随机投影矩阵采集, 用 OMP 算法重构的效果. 其中, 4 个主峰值得到准确重构, 但是

些细节出现了误差. 这说明采用高斯随机投影矩阵采集得到观测值包含的信息量不足, 或者说观测值个数不足. 例如, 原信号应该有的一些细节, 在重构信号中并没有出现, 图中用方块标出; 还有一些原信号为平滑, 在重构信号中出现了峰, 图中用小圈标出. 第 3 个子图为本文算法优化后投影矩阵采集, 用 OMP 算法重构的结果. 原信号得到了精确重构. 这说明在相同观测值个数的情况下, 本文算法优化后投影矩阵能够得到信息量更高的观测值, 从而提高 CS 的性能.

4.2 二维图像压缩感知采样与重构

本小节测试二维图像的压缩感知采样与重构的效果. 这里采用分辨率为 256×256 的灰度图像 Cameraman 作为测试对象. 将灰度图像归一化后, 转换为 65536×1 的列向量. 观测比例为 50%, 即投影矩阵为 32768×65536 . 与上一节类似, 分别用高斯投影矩阵和本文算法优化后的投影矩阵进行采样, 然后用 OMP 算法重构. 实验结果如图 3、表 1 所示.



图3 本文算法优化投影矩阵后重构效果(二维图像)

表 1 优化前后重构误差比较

投影矩阵	重构误差(%)
高斯随机投影矩阵(优化前)	15.65
本文算法(优化后)	9.63

图 3 中, 从上到下的三个子图分别是原始图像、高斯随机投影矩阵采集后重构图像结果、本文算法优化后投影矩阵后重构图像结果. 可以看出, 在 50% 的观测值下, 高斯随机投影矩阵和本文算法均能完整重构原图, 然而, 本文算法在一些细节上 (如大衣、天空) 重构的更加接近原图. 表 1 是重构误差的数值比较, 其中, 重构误差为 $\text{error} = \|\hat{\mathbf{I}} - \mathbf{I}\|_F / \|\mathbf{I}\|_F$, $\hat{\mathbf{I}}$ 为重构图像, \mathbf{I} 为原图像, $\|\cdot\|_F$ 为 Frobenius 范数. 从数值上可以看出, 本文算法优化后, 压缩感知重构精度增加, 这与上一小节一维信号的结论一致.

4.3 不同算法比较

前面两小节从实验角度验证了算法的有效性, 本小节将与一些经典算法进行比较. 用来比较的算法是文献[7]所述经典的基于 Gram 阈值的方法及文献[12]提出的基于梯度的交替最小化的方法.

首先测试各算法随着观测值个数增加的变化趋

势.随机生成 $N = 1000000$ 个稀疏信号(相当于 100 万次重复实验),长度 $n = 120$,每个稀疏向量包含 $T = 4$ 个数非零项.非零项位置随机分布,且稀疏信号之间也不同.观测值 m 的范围取值为 $[16, 40]$,步进为 1.分别用文献 [7] 算法 (Elad Method), 文献 [12] 算法 (Vahid Method), 以及本文算法采样,然后重构信号.当重构信号的误差大于 $1e - 3$ 时,计为 1 个重构错误.当重构错误大于 300 个时,迭代终止,可提前跳出循环.错误率结果采用对数表达形式,如下图 2 所示.

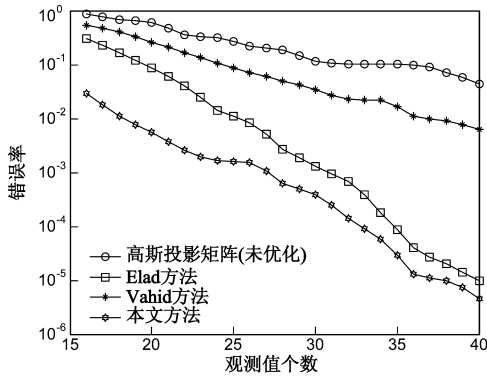


图4 不同算法重构错误率与观测值个数 m 的关系

图 4 的纵轴是错误率,即重构错误个数/实验次数,横轴为观测值个数.可以看出,所有曲线均随观测值个数的增加,错误率减少.这说明当观测值增多时,总信息量增加,信号重构的概率下降.但不同算法的下降趋势不同.圆形曲线为高斯随机投影矩阵,当观测值个数从 16 增加到 40 时,重构错误率仅降低一个数量级.星形曲线为文献 [12] 算法,矩形曲线为文献 [7] 算法,其效果优于高斯随机投影矩阵.本文算法为六边形曲线.以 10^{-2} 的重构误差精度为例,文献 [12] 算法需要 40 个观测值,文献 [7] 算法需要 24 个观测值,而本文算法只需 18 个,即本文算法使每个观测值的平均信息量得到更大提高.可以看出,本文算法明显优于同类算法.

接着测试的是各算法随着信号稀疏度的变化趋势.基本参数相同.不同的地方是,稀疏信号长度 $n = 120$,信号非零元素个数 T 的取值范围为 $[1, 7]$,观测值 m 固定为 25.错误结果仍采用对数表达形式,如图 5 所示.

从图 5 可以看出,所有曲线的错误率随信号非零元素个数 T 的增加而增加.这说明:信号非零元素个数越多(越不稀疏),重构难度越大.可以看出,本文优化后的投影矩阵(紫色曲线)性能有明显改进.例如:在 $T = 3$ 时,高斯投影矩阵重构误差精度为 10^{-1} 左右,而本文算法优化后略优于 Elad 方法,重构误差精度接近 10^{-3} .从稀疏适应性角度考虑,重构误差精度要求为 10^{-1} ,高斯投影矩阵只能采集非零元素 $T = 1$ 的信号,而本文算法

可采集非零元素 $T = 4$ 的信号.同样,优于同类其他算法.表 2 为三种方法的平均运行时间.可以看出, Vahid 方法的运行时间最快,这是由于其算法中只包括矩阵乘法和矩阵转置等简单步骤. Elad 方法次之.本文方法增加了计算修正因子的步骤,运行时间有所增加.但由于拟牛顿法的特点,避免了计算矩阵函数复杂的二阶导数,所以在提高了重构精度的同时,运行时间增加并不多.在参数不发生改变的情况下,压缩感知系统的投影矩阵一旦生成后很少改变,不要求实时更新,所以运算时间少许增加属于可以接受范围.

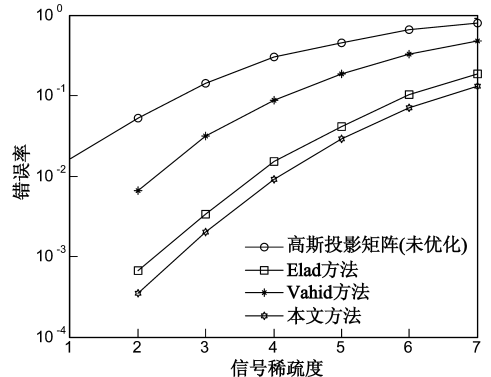


图5 不同算法重构错误率与信号稀疏度的关系

表 2 不同算法平均运行时间

投影矩阵优化算法	平均运行时间(s)
Elad 方法	8.135
Vahid 方法	5.374
本文方法	10.603

5 结论

投影矩阵(编码机构)作为压缩感知的前端,与信号重构(解码机构)具有同样重要的意义.投影矩阵优化问题是提高压缩感知性能的一种重要方法.本文深入分析了压缩感知投影矩阵优化问题,提出了 Gram 矩阵约束和矩阵函数优化逼近交替执行的投影矩阵优化方法.该算法在矩阵函数优化中引入拟牛顿法,构造出与稀疏字典更加不相关的投影矩阵,使得观测值包含更多的信息量,提高压缩感知的重构精度.实验结果表明了算法的有效性.本文的研究工作还有许多有待改进的地方.例如,如何完成超高分辨率图像(如遥感图像)的投影矩阵优化;投影矩阵优化与重构设计的有机结合(如文献 [14]),构造更高性能压缩感知等.

参考文献

[1] Donoho D L. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289 - 1306.

- [2] Candès E J, Wakin M B. An introduction to compressive sampling [J]. Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 21 – 30.
- [3] 石光明, 刘丹华, 高大化, 等. 压缩感知理论及其研究进展 [J]. 电子学报, 2009, 37(5): 1070 – 1081
ShiGuang-ming, Liu Dan-hua, Gao Da-hua, et al. Advances in theory and application of compressed sensing [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(5): 1070 – 1081. (in Chinese)
- [4] 杨海蓉, 张成, 丁大为, 等. 压缩传感理论与重构算法 [J]. 电子学报, 2011, 39(1): 142 – 148.
YangHai-rong, Zhang Cheng, Ding Da-wei, et al. The theory of compressed sensing and reconstruction algorithm [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(1): 142 – 148. (in Chinese)
- [5] 焦李成, 杨淑媛, 等. 压缩感知回顾与展望 [J]. 电子学报, 2011, 7(7): 1651 – 1662.
JIAO Li-cheng, YANG Shu-yuan, et al. Development and prospect of compressive sensing [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 7(7): 1651-1662. (in Chinese)
- [6] 戴琼海, 付长军, 季向阳. 压缩感知研究 [J]. 计算机学报, 2011, 34(3): 425 – 434.
DaiQiong-hai, Fu Chang-jun, Ji Xiangyang. Research on compressed sensing [J]. Chinese Journal of Computers, 2011, 34(3): 425 – 434. (in Chinese)
- [7] Elad M. Optimized projections for compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(12): 5695 – 5702.
- [8] Donoho D L, Elad M. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via ℓ_1 minimization [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2003, 100(5): 2197 – 2202.
- [9] Xu J, Pi Y, Cao Z. Optimized projection matrix for compressive sensing [J]. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, 2010, 2010: 43 – 51.
- [10] 赵瑞珍, 秦周, 胡绍海. 一种基于特征值分解的测量矩阵优化方法 [J]. 信号处理, 2012, 28(5): 653 – 658.
ZhaoRuizhen, Qin Zhou, Hu Shaohai. An optimization method for measurement matrix based on eigenvalue decomposition [J]. Signal Processing, 2012, 28(5): 653 – 658. (in Chinese)
- [11] Abolghasemi V, Ferdowsi S, Makkiabadi B, et al. On optimization of the measurement matrix for compressive sensing [A]. Proceedings of 18th European Signal Processing Conference [C]. Aalborg: EUSIPCO, 2010. 427 – 431.
- [12] Abolghasemi V, Ferdowsi S, Sanei S. A gradient-based alternating minimization approach for optimization of the measurement matrix in compressive sensing [J]. Signal Processing, 2012, 92(3): 999 – 1009.
- [13] Welch L. Lower bounds on the maximum cross correlation of signals [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1974, 20(3): 397 – 399.
- [14] Petersen K B, Pedersen M S. The Matrix Cookbook [EB/OL]. <http://matrixcookbook.com>, 2012 – 12 – 15.
- [15] 李佳, 王强, 沈毅, 等. 压缩感知中测量矩阵与重建算法的协同构造 [J]. 电子学报, 2013, 41(1): 29 – 34.
LiJia, Wang Qiang, Shen Yi, et al. Collaborative construction of measurement matrix and reconstruction algorithm in compressed sensing [J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(1): 29 – 34. (in Chinese)

作者简介



郑红女, 1961年出生于河北. 北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院教授、博士生导师. 主要从事模式识别、嵌入式系统、压缩感知等.

E-mail: julyanna@vip.sina.com



李振 (通信作者) 男, 1983年出生于河南濮阳. 2006年、2010年获得郑州大学工学学士和工学硕士学位, 现为北京航空航天大学博士研究生. 研究方向为压缩感知、图像处理、模式识别等.

E-mail: lizhen-buaa@126.com



黄盈男, 1987年生于湖北黄冈. 2009年、2012年获得南昌航空大学工学学士和工学硕士学位, 现为北京航空航天大学博士研究生. 研究方向为图像处理、模式识别等.