模态逻辑系统 S5 中极大相容理论的结构刻画

李壁镜
（宝鸡文理学院数学系，陕西宝鸡 721013）

摘　要： 在模态逻辑系统 S5 中提出了任意一模态公式关于一个极大相容理论的存在状态及状态描述等一系列概念，并且借助状态描述这一工具研究了相容理论的相容扩张，最后给出了模态逻辑系统 S5 中极大相容理论的一个结构刻画，证明了任何一个极大相容理论都是所有简单合取式和简单析取式的相容存在状态之集的理论闭包.

关键词： 模态逻辑；极大相容理论；存在状态；状态描述

中图分类号： O141　**文献标识码：** A　**文章编号：** 0372-2112（2014）08-1551-05

电子学报 URL： http://www.ejournal.org.cn　**DOI：** 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.08.014

Characterization of Maximal Consistent Theories in Modal Logic S5

LI Bi-jing
（*Mathematical Department*, *Baoji University of Arts and Sciences*, *Baoji*, *Shaanxi* 721013, *China*）

Abstract： The present paper proposes the definitions of state description and existing state for a formula with respect to a maximal consistent theory. Some important properties of consistent theory are obtained by using state description as the tool. Then, it is proved that maximal consistent theory is just the theoretical closure of consistent exist state of all simple disjunctive formulas and conjunctive ones.

Key words： modal logic; maximal consistent theory; existing state; state description

1　引言

模态逻辑[1~3]是逻辑学的重要的分支，它的理论、思想、技术和方法在计算机科学[4]、知识表示及推理[5]、模型检测[6]、经济博弈论[7]以及哲学[8]等方面都有重要应用.

由若干逻辑公式组成的集合称为逻辑理论，简称理论.无论是在经典逻辑系统，还是在多值、模糊值逻辑系统，甚至模态逻辑系统中，判定一个逻辑理论是否相容都是相应逻辑系统的重要问题.文献[9～12]在几个特定的逻辑系统中定义了逻辑理论的相容度，由此断定一个相容的逻辑系统在多大程度上相容.可惜的是，这些概念和结论都无法刻画极大相容理论.另一方面，每一个相容理论都可扩充成极大相容理论，它在模态逻辑[1~3]和知识推理[5]中起着举足轻重的作用：在证明一个逻辑系统的完备性（甚至强完备性）时，借助极大相容理论这一工具的证明方法不仅巧妙，而且适用性广.具体做法如下：让每个极大相容理论代表一个可能世界，从而构成一个新的可能世界之集 W^*，同时，适当的定义这些极大相容理论之间的二元关系 R^*，以及原子公式与极大相容理论之间的映射关系 V^*，从而建立了一个典型模型 $M^*=(W^*, R^*, V^*)$，最终得到逻辑系统的强完备性.

关于极大相容理论的研究已有一些好的结论：在经典逻辑系统 L 中，一个理论是极大相容理论的充要条件是它是文字序列的逻辑闭包，且在极大相容理论之集上可建立紧 Hausdorff 拓扑空间（文献[13]）；基于逻辑系统 L^* 的强完备性，文献[14]给出了极大相容理论的结构刻画，证明了极大相容理论是某些特定理论的闭包，文献[15]指出极大相容理论集与赋值集 Ω_3 之间存在一一对应关系；文献[16]证明了三值 Lukasiewicz 闭理论和极大相容理论集上 Cantor 空间中的拓扑闭集存在一一对应关系.

然而，以上关于相容理论的研究讨论都不曾涉及模态逻辑系统，由于模态逻辑系统比上述提到系统从语言形式上增加了模态词◇和□，从而导致生成的公式比

收稿日期：2013-07-08；修回日期：2013-12-13；责任编辑：李勇锋
基金项目：国家自然科学青年基金（No.11001158）；宝鸡文理学院重点科研项目（No.ZK1047）

较复杂,本文就尝试在常见的、性质较好的模态逻辑系统 S5 中讨论相容理论的性质,最后得出极大相容理论的结构刻画定理.

2 模态逻辑系统 S5 及其逻辑理论

为了行文简洁,本文将模态逻辑系统 S5 简称为 S5.

2.1 模态逻辑 S5

定义 1[3] 设◇是一元模态词,Φ 是若干原子命题之集,S5 的公式构成如下:

$$\varphi := p \mid \bot \mid \neg \varphi \mid \varphi_1 \vee \varphi_2 \mid \Diamond\varphi, p\in\Phi$$

用 $Form(\Diamond,\Phi)$记全体基于 Φ 的模态公式之集.□表示与◇的对偶模态词,即$\Box\varphi=\neg\Diamond\neg\varphi$. $\varphi\wedge\psi=\neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)$,$\varphi\to\psi=\neg\varphi\vee\psi$.

定义 2[3] S5 的模型 $M=(W,R,V)$,这里 W 是非空集,$\omega\in W$ 称为可能世界,R 是 W 上的等价关系,映 $V:\Phi\to P(W)$为赋值.

定义 3[3] 设 M 是 S5 的模型,$\omega\in W$,$\varphi\in Form(\Diamond,\Phi)$,若 φ 在可能世界 ω 里为真,则称 ω 满足 φ,记 $\omega\vDash\varphi$,可归纳地定义为:

(ⅰ)$\omega\vDash p\Leftrightarrow\omega\in V(p),p\in\Phi$;

(ⅱ)$\omega\vDash\bot$永远不成立;

(ⅲ)$\omega\vDash\neg\varphi\Leftrightarrow M,\omega\vDash\varphi$ 不成立;

(ⅳ)$\omega\vDash\varphi\vee\psi\Leftrightarrow\omega\vDash\varphi$ 或$\omega\vDash\psi$;

(ⅴ)$\omega\vDash\Diamond\varphi\Leftrightarrow\exists u\in W,R\omega u,s.t.u\vDash\varphi$;

(ⅵ)$\omega\vDash\Box\varphi\Leftrightarrow$若 $R\omega u$,则 $u\vDash\varphi$.

定义 4[3] S5 的公理包括全体模态重言式,$\neg\bot$以及下面的公理:

(K^*)(分配公理)$\Box(\varphi\to\psi)\to(\Box\varphi\to\Box\psi)$

(4)(传递公理)$\Diamond\Diamond\varphi\to\Diamond\varphi$

(T)(自反公理)$\varphi\to\Diamond\varphi$;($T'$):$\Box\varphi\to\varphi$.

(5)(对称公理)$\Diamond\varphi\to\Box\Diamond\varphi$

S5 中的推理规则有两条:

(i)MP 规则;(ii)Gen 规则:由 φ 可得$\Box\varphi$.

定义 5[3] S5-证明是一个有限模态公式序列 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$,且$\forall i\le n$,$\varphi_i$ 是 S5 中的公理,或者存在 $j(j<i)$,使 φ_i 是由φ_j 运用 Gen 规则而得的公式,或者存在 $j,k(j,k<i)$,使 φ_i 由 φ_j 和 φ_k 运用 MP 规则而得的公式,则称 φ_n 是 S5-定理,记为$\vdash\varphi_n$.

定义 6[3] 若 $\Gamma\subset Form(\Diamond,\Phi)$,则称 Γ 为理论.若 Γ 非空,对公式 φ,$\exists\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n\in\Gamma$ 使得$\vdash\psi_1\wedge\psi_2\wedge\cdots\wedge\psi_n\to\varphi$ 成立,那么称 φ 可由Γ 导出或φ 是Γ-结论,记 $\Gamma\vdash\varphi$.全体 Γ-结论之集称为Γ 的理论闭包,记为 $D(\Gamma)$.

设 M 是模型,$\omega\in W$,Γ 是理论,如果对每个模型 M 和每个可能世界ω,当 $M,\omega\vDash\Gamma$ 时,都有 $M,\omega\vDash\varphi$,则称 Γ 语义蕴涵φ,记为 $\Gamma\vDash\varphi$.

定理 1[3] S5 中,$\Gamma\cup\{\varphi\}\subseteq Form(\Diamond,\Phi)$,则有 $\Gamma\vdash\varphi$ 当且仅当$\Gamma\vDash\varphi$.

定义 7[3] 设 Γ 是理论,如果 $\Gamma\vdash\bot$,则称 Γ 不相容,否则相容.若 Γ 是相容理论,并且是极大的,即$\forall\varphi\notin\Gamma$,有 $\Gamma\cup\{\varphi\}\vdash\bot$,则称 Γ 是极大相容理论.

命题 1[3] 设 Γ 是 S5 的极大相容理论,则有

(i)若 φ 是 S5-定理,则有 $\varphi\in\Gamma$;

(ii)若 $\Gamma\vdash\varphi$,则有 $\varphi\in\Gamma$;

(iii)Γ 关于 MP 运算封闭;

(iv)对任意公式 φ,有 $\varphi\in\Gamma$ 或$\neg\varphi\in\Gamma$ 成立;

(v)若 $\varphi\vee\psi\in\Gamma$,则有 $\varphi\in\Gamma$ 或$\psi\in\Gamma$ 成立;

(vi)若 $\varphi\in\Gamma$ 且$\varphi\Box\psi$,则有 $\psi\in\Gamma$;

(vii)若 $\varphi,\psi\in\Gamma$,则有 $\varphi\wedge\psi\in\Gamma$.

2.2 系统 S5 中的等价公式

定义 8[3] 称不含模态词的公式为 0 度公式,称 $\xi=\Box\varphi$ 或$\xi=\Diamond\psi$ 为最简 1 度模态公式,其中 φ 和ψ 为 0 度公式.称有限多个最简 1 度公式或 0 度公式的合取(析取)为简单模态合取(析取)式.

定义 9[3] 称$(\xi_{11}\wedge\cdots\wedge\xi_{1,i(1)})\vee\cdots\vee(\xi_{n1}\wedge\cdots\wedge\xi_{n,i(n)})$为模态析取范式.若将上式中的$\vee$和$\wedge$互换位置,则所得的公式为模态合取范式,这里 $\xi_{k,j}$为最简 1 度模态公式或为 0 度模态公式($k=1,\cdots,n,j=1,\cdots,i(k)$).

定理 2[3] 在 S5 中,有下列等价公式$\Diamond\Diamond\varphi\Box\Diamond\varphi$;$\Box\Box\varphi\Box\Box\varphi$;$\Box\Diamond\varphi\Box\Diamond\varphi$;$\Diamond\Box\varphi\Box\Box\varphi$;$\Box(\varphi\vee\Box\psi)\Box\Box\varphi\vee\Box\psi$;$\Diamond(\varphi\wedge\Diamond\psi)\Box\Diamond\varphi\wedge\Diamond$;$\psi\Box(\varphi\wedge\psi)\Box\Box\psi\wedge\Box\psi$;$\Diamond(\varphi\vee\psi)\Box\Diamond\varphi\vee\Diamond\psi$.

定理 3[3] 在 S5 中,每个模态公式都等价于一个模态析取范式,或者模态合取范式.

命题 2 在 S5 中,$\varphi,\psi\in Form(\Diamond,\Phi)$,若$\vdash\varphi\to\psi$,则有$\vdash\Box\varphi\to\Box\psi$,$\vdash\Diamond\varphi\to\Diamond\psi$.

证明 若$\vdash\varphi\to\psi$,使用推广规则,再和(K^*)使用 MP 规则可得结论;若$\vdash\varphi\to\psi$,由逆否命题与原命题等价知$\vdash\neg\psi\to\neg\varphi$,再用刚证的结论,得$\vdash\Box\neg\psi\to\Box\neg\varphi$,再由逆否命题与原命题等价可得结论.

定理 4 在 S5 中,$\varphi,\psi\in Form(\Diamond,\Phi)$,则有下面的公式等价

$$\Diamond(\varphi\wedge\Box\psi)\Box\Diamond\varphi\wedge\Box\psi;\Box(\varphi\vee\Diamond\psi)\Box\Box\varphi\vee\Diamond\psi$$

证明

$\Diamond(\varphi\wedge\Box\psi)\Box\Diamond(\varphi\wedge\Diamond\Box\psi)\Box\Diamond\varphi\wedge\Diamond\Box\psi\Box\Diamond\varphi\wedge\Box\psi$;$\Box(\varphi\vee\Diamond\psi)\Box\Box(\varphi\vee\Box\Diamond\psi)\Box\Box\varphi\vee\Box\Diamond\psi\Box\Box\varphi\vee\Diamond\psi$

2.3 系统 S5 中公式的状态描述

定义 10 称集合

$STATE=(0,0,0),(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)$

为 S5 的状态描述之集.它只包含了四个元素,每一个元素都是一个三维 0-1 向量,称为一个状态描述.

定义 11　设 $\varphi\in Form(\Diamond,\Phi)$,任一状态描述 $\alpha=(\alpha^{(1)},\alpha^{(2)},\alpha^{(3)})$,则称集合

$$\varphi(\alpha)=\{(\Box\varphi)^{\alpha^{(1)}},\varphi^{\alpha^{(2)}},(\Diamond\varphi)^{\alpha^{(3)}}\}$$

为公式 φ 在状态描述 α 下的存在状态集,其中 $\psi^0=\neg\psi,\psi^1=\psi$.

定义 12　在状态描述集 $STATE$ 上定义一元运算 $\neg$,如下:

$\neg(0,0,0)=(1,1,1);\neg(0,0,1)=(0,1,1)$

$\neg(0,1,1)=(0,0,1);\neg(1,1,1)=(0,0,0)$

定理 5　设 $\varphi\in Form(\Diamond,\Phi)$,$\alpha$ 是状态描述,则有 $(\neg\varphi)(\neg\alpha)=\varphi(\alpha)$.

证明　α 共有 4 种情形,选一种予以证明.若 $\alpha=(0,1,1)$,根据定义 12 知 $\neg\alpha=(0,0,1)$,那么有 $(\neg\varphi)(\neg\alpha)=(\neg\varphi)(0,0,1)=\{(\Box\neg\varphi)^0,(\neg\varphi)^0,(\Diamond\neg\varphi)^1\}=\{\Diamond\varphi,\varphi,\neg\Box\varphi\}=\varphi(\alpha)$.

定义 13　设 Γ 是 S5 的极大相容理论,$\varphi\in Form(\Diamond,\Phi)$,$\Gamma: Form(\Diamond,\Phi)\to STATE$,可定义为 $\Gamma(\varphi)=\alpha$ 当且仅当 $\varphi(\alpha)\subseteq\Gamma$,这时称 $\Gamma(\varphi)$ 为公式 φ 在 Γ 中的状态描述.

定理 6　设 Γ 是 S5 的一个极大相容理论,$\forall\varphi\in Form(\Diamond,\Phi)$,有 $\Gamma(\varphi)=\neg(\Gamma(\neg\varphi))$.

证明　由极大相容理论的性质(命题 1(iv))容易证明.

注 1　上式中等号右端的两个 $\neg$ 含义不同:第一个出现的是描述状态集上的对合对应,而第二个出现的是公式间的逻辑连接词;定理 6 揭示了在同一个极大相容理论下,模态公式 φ 的描述状态如果是 α,那么公式 $\neg\varphi$ 的描述状态只能是 $\neg\alpha$.

3　极大相容理论的结构刻画

命题 3　设 $A,B\in F(S)$,若 Σ 是既非重言式又非矛盾式的全体简单合取式和简单析取式的任意一相容的存在状态之集,则有如下结论成立:

(i)若 $\Box A\notin D(\Sigma)$,则 $D(\Sigma)\cup\{\Box A\}$ 不相容;

(ii)若 $\Diamond B\notin D(\Sigma)$,则 $D(\Sigma)\cup\{\Diamond B\}$ 不相容.

证明　(i)证明若 $\Box A\notin D(\Sigma)$,因为 A 是经典逻辑公式,所以 A 等价于一个合取范式.不妨设 $A=A_1\wedge A_2\wedge A_3$,其中 A_1,A_2,A_3 都是由原子公式或其否定通过析取连接而成的经典的简单析取式.由于 $\Box A_1\wedge\Box A_2\wedge\Box A_3\Box\Box A\notin D(\Sigma)$,得 $\Box A$ 的合取项中至少有一项不属于 $D(\Sigma)$.不妨设 $\Box A_2\notin D(\Sigma)$,因为 $A_2\in\Delta$,所以 A_2 在 Σ 中的状态描述 α 是确定的,且 $\alpha^{(1)}=0$ 即 $\neg\Box A_2\in D(\Sigma)$,得 $D(\Sigma)\cup\{\Box A_2\}$ 不相容,那么 $D(\Sigma)\cup\{\Box A\}$ 也不相容.

(ii)若 $\Diamond B\notin D(\Sigma)$,因 B 是经典公式,所以 B 等价于一析取范式.设 $B=B_1\vee B_2\vee B_3$,其中 B_1,B_2,B_3 都是经典的简单合取式.因为 $\Diamond B_1\vee\Diamond B_2\vee\Diamond B_3\Box\Diamond B\notin D(\Sigma)$,所以 $\Diamond B_i\notin D(\Sigma)(i=1,2,3)$,又 $B_i\in\Delta(i=1,2,3)$ 它们的状态描述是确定的,且第三分量 $\alpha^{(3)}=0$,所以有 $\neg\Diamond B_i\in D(\Sigma)$,从而 $\neg\Diamond B_1\wedge\neg\Diamond B_2\wedge\neg\Diamond B_3\in D(\Sigma)$,那么 $D(\Sigma)\cup\{\Diamond B\}$ 就不相容.

定理 7　设 Σ 是既非重言式又非矛盾式的经典简单合取式和经典的简单析取式的任意一存在状态之集,若 Σ 是相容的,则 $D(\Sigma)$ 就是一个极大相容理论.

证明

(1)相容性.因为 Σ 相容,从而它的逻辑闭包 $D(\Sigma)$ 也是相容的.

(2)极大性.只需证明若 $\forall\varphi\notin D(\Sigma)$,则有 $D(\Sigma)\cup\{\varphi\}$ 不相容.下面我们按公式中所含逻辑连接词的个数做归纳证明.若 φ 中不含逻辑连接词,即 $\varphi=p_i(p_i\in S)$,因为 $p_i\in\Delta$,所以 p_i 在 Σ 中的状态描述是确定的,即 p_i 与 $\neg p_i$ 有且只有一个属于 Σ,由条件可知 $\neg p_i\in\Sigma$,那么 $D(\Sigma)\cup\{\varphi\}$ 不相容;若 φ 中包含一个逻辑连接词,即 $\varphi=\neg p_i$ 或 $\varphi=\Box p_i$ 或 $\varphi=\Diamond p_i$ 或 $\varphi=p_i\to p_j$ 或 $\varphi=p_i\wedge p_j$ 或 $\varphi=p_i\vee p_j$,而以上可能出现的公式都是状态描述集 $S(\Lambda)$ 中的元素,从而它们在 Σ 中的存在状态是确定的,那么 φ 与 $\neg\varphi$ 有且只有一个属于 Σ,从而知若 $\varphi\notin\Sigma$,则一定有 $\neg\varphi\in\Sigma$,从而 $\Sigma\cup\{\varphi\}$ 不相容;假设 φ 中含 k 个逻辑连接词时结论已成立,下面证 $k+1$ 时也成立.

(i)若 $\varphi=\neg\psi$,且 ψ 含有 k 个逻辑连接词.若 $\psi\in D(\Sigma)$,则有 $D(\Sigma)\cup\{\neg\psi\}$ 不相容;若 $\psi\notin D(\Sigma)$,则由 ψ 含有 k 个逻辑连接词知 $D(\Sigma)\cup\{\psi\}$ 不相容,即 $D(\Sigma)\vdash\neg\psi$,又因为 $D(\Sigma)$ 是闭理论,所以 $\neg\varphi\in D(\Sigma)$,这与已知矛盾,故此情形不成立.综上分析 $D(\Sigma)\cup\{\varphi\}$ 不相容.

(ii)若 $\varphi=\psi_1\to\psi_2$,且 ψ_1,ψ_2 中的逻辑连接词小于 k 个,由于 $\psi_1\to\psi_2=\neg\psi_1\vee\psi_2$ 且 $\varphi\notin D(\Sigma)$ 知 $\neg\psi_1,\psi_2\notin D(\Sigma)$.对 $\neg\psi_1,\psi_2$ 分别用归纳假设,知 $D(\Sigma)\cup\{\neg\psi_i\}(i=1,2)$ 都不相容.又由 $\psi_1,\neg\psi_2\in D(\Sigma)$(闭理论)知 $\psi_1\wedge\neg\psi_2\Box\neg\varphi\in D(\Sigma)$,$D(\Sigma)\cup\{\varphi\}$ 容.

(iii)若 $\varphi=\Box\psi$,且 ψ 含有 k 个逻辑连接词.若 $\psi\notin D(\Sigma)$,则由归纳假设知 $D(\Sigma)\cup\{\psi\}$ 不相容,即 $|\exists\chi_1,\cdots,\chi_n\in\Sigma$, s.t. $\chi_1\wedge\cdots\wedge\chi_n\wedge\psi\Box\bot$,又由公理$(T')$知 $\chi_1\wedge\cdots\wedge\chi_n\wedge\Box\psi\Box\bot$,从而 $D(\Sigma)\cup\{\Box\psi\}$ 不相容.若 $\psi\in D(\Sigma)$ 且 $\Box\psi\notin D(\Sigma)$,因为在 S5 中,每个模态公式都可以化为模态析取(合取)范式,所以把 ψ 化为

模态合取范式，设 $\psi=\bigwedge\limits_{k=1}^{n}\bigvee\limits_{j=1}^{i(k)}\xi_{kj}$，其中 $\xi_{kj}(k=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,i(k))$ 是最简 1 度模态公式或 0 度模态公式. 那么由定理 2 知 $\varphi=\square\psi=\square(\bigwedge\limits_{k=1}^{n}\bigvee\limits_{j=1}^{i(k)}\xi_{kj})=\bigwedge\limits_{k=1}^{n}\square(\bigvee\limits_{j=1}^{i(k)}\xi_{kj})$，若每个简单析取项 $\bigvee\limits_{j=1}^{i(k)}\xi_{kj}(k=1,2,\cdots,n)$ 中的每一析取项 $\xi_{kj}(j=1,2,\cdots,i(k))$ 都是最简 1 度公式，则由定理 2 和 4 知 $\square(\bigvee\limits_{j=1}^{i(k)}\xi_{kj})\square(\bigvee\limits_{j=1}^{i(k)}\square\xi_{kj})\square\bigvee\limits_{j=1}^{i(k)}\xi_{kj}$，即 $\square\psi\square\psi$，则有 $\varphi=\square\psi\square\psi\in D(\Sigma)$，与已知矛盾. 故至少存在 ψ 的一个简单析取式(不妨设 $k=1$)，它里面包含有最简 0 度公式，且 $\bigvee\limits_{j=1}^{i(1)}\xi_{1j}\in D(\Sigma)$，而 $\square(\bigvee\limits_{j=1}^{i(1)}\xi_{1j})\notin D(\Sigma)$，下面对 $\bigvee\limits_{j=1}^{i(1)}\xi_{1j}$ 分两种情形讨论：若 $\bigvee\limits_{j=1}^{i(1)}\xi_{1j}=A$，$A$ 不含模态词，则由上述分析知 $\square A\notin D(\Sigma)$，再由命题 3 得 $D(\Sigma)\cup\{\square A\}$ 不相容，$D(\Sigma)\cup\{\square\psi\}$ 不相容；若 $\bigvee\limits_{j=1}^{i(1)}\xi_{1j}=A\vee(\bigvee\limits_{m=1}^{M}\square B_m)\vee(\bigvee\limits_{n=1}^{N}\Diamond C_n)$，其中 $A,B_m,C_n\in F(S)$，且 $\square(\bigvee\limits_{j=1}^{i(1)}\xi_{1j})\notin D(\Sigma)$，由定理 2 和定理 4 知 $\square A,\square B_m,\Diamond C_n\notin D(\Sigma)$，再对上述公式运用命题 3 可得 $\{\square A\}\cup D(\Sigma)$ $\{\square B_m\}\cup D(\Sigma)$，$\{\Diamond C_n\}\cup D(\Sigma)(m=1,2,\cdots,M;n=1,2,\cdots,N)$ 都是不相容的，所以 $D(\Sigma)\cup\{\square(\bigvee\limits_{j=1}^{i(1)}\xi_{1j})\}$ 也不相容，综上分析知 $D(\Sigma)\cup\{\varphi\}$ 不相容.

(ⅳ)若 $\varphi=\Diamond\psi$，其中 ψ 所含逻辑连接词的个数不超过 k 个，若 $\psi\in D(\Sigma)$，由公理(T)知 $\Diamond\psi\in D(\Sigma)$，这与已知条件矛盾，故只能是 $\psi,\Diamond\psi\notin D(\Sigma)$. 下面证明 $D(\Sigma)\cup\{\Diamond\psi\}$ 不相容. 把 ψ 化为模态析取范式，即 $\psi=\bigvee\limits_{k=1}^{n}\bigwedge\limits_{j=1}^{i(k)}\xi_{kj}$，则有 $\Diamond\psi\square\Diamond(\bigvee\limits_{k=1}^{n}\bigwedge\limits_{j=1}^{i(k)}\xi_{kj})\square\bigvee\limits_{k=1}^{n}(\Diamond\bigwedge\limits_{j=1}^{i(k)}\xi_{kj})$，又因为 $\Diamond\psi\notin D(\Sigma)$，得 $\Diamond\bigwedge\limits_{j=1}^{i(k)}\xi_{kj}\notin D(\Sigma)$，$(k=1,2,\cdots,n)$. 若 $\bigwedge\limits_{j=1}^{i(k)}\xi_{kj}=A$ (A 不含模态词)，则由上述条件知 $\Diamond\psi\notin D(\Sigma)$，由命题 3 得 $D(\Sigma)\cup\{\square A\}$ 不相容；若 $\bigwedge\limits_{j=1}^{i(k)}\xi_{kj}=A\wedge(\bigwedge\limits_{m=1}^{M}\square B_m)\vee(\bigwedge\limits_{n=1}^{N}\Diamond C_n)$，则可得 $\Diamond(\bigvee\limits_{j=1}^{i(k)}\xi_{kj})=\Diamond A\wedge(\bigwedge\limits_{m=1}^{M}\square B_m)\wedge(\bigwedge\limits_{n=1}^{N}\Diamond C_n)\notin D(\Sigma)$，那么至少有一合取项不在 $D(\Sigma)$ 中，不妨就设为 $\square B_m\notin D(\Sigma)$，则由命题 3 知 $\{\square B_m\}\cup D(\Sigma)$ 不相容，那么 $\{\Diamond(\bigwedge\limits_{j=1}^{i(k)}\xi_{kj})\}\cup D(\Sigma)$ 不相容. 综上两种情形知，对于公式 ψ 的每一个析取项，都有 $D(\Sigma)\cup\{\Diamond(\bigwedge\limits_{j=1}^{i(k)}\xi_{kj})\}$ 不相容，那么 $D(\Sigma)\cup\{\bigvee\limits_{k=1}^{n}\Diamond(\bigwedge\limits_{j=1}^{i(k)}\xi_{kj})\}$ 不相容，即 $D(\Sigma)\cup\{\Diamond\psi\}$ 不相容.

(ⅴ)若 $\varphi=\psi_1\vee\psi_2$，其中 ψ_1,ψ_2 所含逻辑连接词的个数都不超过 k 个，由 $\varphi\notin D(\Sigma)$ 知 $\psi_i\notin D(\Sigma)(i=1,2)$，分别使用归纳假设，得 $D(\Sigma)\cup\{\psi_i\}$ 不相容，得 $D(\Sigma)\cup\{\varphi\}$ 不相容.

综上五种情形，我们证得 $D(\Sigma)$ 是极大相容理论.

定理 8 (极大相容理论的刻画定理)若 Γ 是极大相容理论，则它是所有经典简单合取式和经典的简单析取式的某一相容存在状态之集的理论闭包，即存在经典简单合取式和经典的简单析取式的某一相容存在状态之集 Σ，使得 $\Gamma=D(\Sigma)$.

证明 经典的简单合取式和简单析取式 ψ 在已知的极大相容理论 Γ 下，都有确定的状态描述 α，把他们对应的存在状态之集都并起来得 $\Sigma=\bigcup\limits_{\psi\in\Delta}\psi(\alpha)\subset\Gamma$ 是相容的，且 $D(\Sigma)\subset\Gamma$ 由定理 7 知 $D(\Sigma)$ 是极大相容理论，即 $\Gamma=D(\Sigma)$.

参考文献

[1] Blackburn P, Rijke M, Venema Y. Modal Logic[M]. Oxford : Cambridge University Press, 2001. 1 – 50.

[2] Hughes G E, Cresswell M J. A New Introduction to Modal Logic[M]. London: Routledge Press, 1996. 19 – 46.

[3] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理(第二版)[M]. 北京:科学出版社, 2007.

[4] Benalycherif L, McIsaac A. A semantic condition for data independence and applications in hardware verification[J]. Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 2009, 250(1): 39 – 54.

[5] Fagin R, Halpern J Y, Moses Y, et al. Reasoning about Knowledge[M]. Cambridge: the MIT Press, 1995.

[6] Clarke E M, Grumberg O, Peled D A. Model Checking[M]. Cambridge: The MIT Press, 1999.

[7] Bruin B D. Overmathematisation in game theory: Pitting the Nash equilibrium refinement programme against the epistemic programme[J]. Studiesin History and Philosophy of Science (Part A), 2009, 40(3): 290 – 300.

[8] 周北海. 模态逻辑与哲学[J]. 北京航空航天大学学报(社会科学版), 2000, 13(3): 32 – 36.

[9] Gottwald S, Novak V. On the consistency of fuzzy theories [A]. Proceedings of the Seventh IFSA World Congress[C]. Prague, Czech Republic, 1997. 168 – 171.

[10] Novak V, Perfilieva I, Mockor J. Mathematical Principles of Fuzzy Logic[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1999.

[11] Zhou H J, Wang G J. Generalized consistency degrees of theories w r t formulas in several standard complete logic systems [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(15): 2058 – 2073.

[12] 王国俊. 一类一阶逻辑公式中的公理化真度理论及其应用[J]. 中国科学信息科学, 2012, 42(5): 648 – 662.
Wang Guojun. Axiomatic theory of truth degree for a class of first-order formulas and its application[J]. Scientia Sinica Informationis, 2012, 45(5): 648 – 662. (in Chinese)

[13] 王国俊, 王伟, 宋建社. 命题逻辑中极大和谐理论之集上的拓扑与 Cantor 三分集[J]. 陕西师范大学学报(自然科

学版),2007,35(2):1 – 5.
Wang Guojun, Wang Wei, Song Jianshe. Topology on the set of maximal consistent propositional theories and the Cantor ternary set[J]. Journal of Shaanxi Normal University (Natural Science Edition), 2007, 35(2):1 – 5. (in Chinese)

[14] 周红军,王国俊. 系统 L^* 中极大相容理论的结构刻画和紧致性定理[J]. 模糊系统与数学,2008,22(4):8 – 14.
Zhou Hongjun, Wang Guojun. Structure characterizations of maximal consistent theories over L^* and compactness theorem [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2008, 22(4): 8 – 14. (in Chinese)

[15] Zhou H J, Wang G J. Characterizations of maximal consistent theories in the formal deductive system L^* (NM-logic) and Cantor Space[J]. Fuzzy Sets and System, 2007, 158(23): 2591 – 2604.

[16] Zhou H J, Wang G J. Three and two-valued Lukasiewicz theories in the formal deductive system L^* (NM-logic)[J]. Fuzzy Sets and System, 2008, 159(23): 2971 – 2982.

作者简介

李璧镜　女,理学博士,1981 年 10 月生于陕西宝鸡,宝鸡文理学院讲师. 主要研究模态逻辑和不确定性推理.
E-mail: lbj2007@163.com