

# 强跟踪自适应平方根容积卡尔曼滤波算法

徐树生<sup>1</sup>, 林孝工<sup>2</sup>, 李新飞<sup>2</sup>

(1. 青岛农业大学机电工程学院, 山东青岛 266109; 2. 哈尔滨工程大学自动化学院, 黑龙江哈尔滨 150001)

**摘要:** 针对强跟踪滤波器(STF)的理论局限性及不良测量导致的滤波性能下降问题,提出了一种强跟踪自适应平方根容积卡尔曼滤波(SRCKF)算法.利用新息协方差匹配原理,建立对不良测量具有鲁棒性的自适应 SRCKF.基于 STF 的理论框架,采用自适应 SRCKF 代替扩展卡尔曼滤波构建强跟踪自适应 SRCKF.该算法兼具 STF 与自适应 SRCKF 的优点,在系统同时存在模型不确定性及不良测量时具有良好的滤波性能.仿真实验验证了所建算法的有效性.

**关键词:** 强跟踪滤波器;平方根容积卡尔曼滤波;自适应滤波;鲁棒性

**中图分类号:** TP273 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2014)12-2394-07

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn> **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.12.009

## Strong Tracking Adaptive Square-Root Cubature Kalman Filter Algorithm

XU Shu-sheng<sup>1</sup>, LIN Xiao-gong<sup>2</sup>, LI Xin-fei<sup>2</sup>

(1. College of Electromechanical Engineering, Qingdao Agricultural University, Qingdao, Shandong 266109, China;

2. College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin, Heilongjiang 150001, China)

**Abstract:** To overcome problems that malfunctions in the measurement system lead to degradation of performance of strong tracking filter (STF) and inherent disadvantages of STF, an adaptive square-root cubature Kalman filter (SRCKF) algorithm is proposed. With innovation covariance matching techniques an adaptive SRCKF is built, which is insensitive to measurement malfunctions. Strong tracking adaptive SRCKF views STF as the basic theory framework and makes adaptive SRCKF to replace extended Kalman filter (EKF), so it has the advantages of STF and adaptive SRCKF. In case of model uncertainty of system and measurement malfunctions, the proposed algorithm has strong robustness and high accuracy. Simulation results show the effectiveness of the presented algorithm.

**Key words:** strong tracking filter; square-root cubature Kalman filter; adaptive filter; robust

## 1 引言

非线性系统状态估计在目标跟踪、导航、信息处理等领域具有重要的应用,先后发展了扩展卡尔曼滤波(EKF)、无迹卡尔曼滤波(Unscented Kalman Filter, UKF)、容积卡尔曼滤波(Cubature Kalman Filter, CKF)等多种非线性滤波方法<sup>[1~4]</sup>.其中,由 Arasaratnam 等人<sup>[5]</sup>最近采用球面径向容积准则进行相应的数值积分运算而提出的 CKF 算法,不仅克服了 EKF 和 UKF 在强非线性系统中的应用局限性,而且滤波精度高于中心差分卡尔曼滤波(Central Difference Kalman Filter, CDKF)和粒子滤波,在目标追踪等领域得到了迅速应用<sup>[6~8]</sup>.为了提高 CKF 的滤波性能,在 CKF 滤波过程中引入误差协方差阵的平方根,保证了 CKF 误差协方差阵的对称性和正(半)定

性,构成了 SRCKF 算法.

SRCKF 算法不具有对测量条件变化和系统模型不确定性的自适应性,不良的测量或系统模型的变化会影响滤波性能甚至导致滤波故障.为了克服不良测量对 UKF 或 CKF 滤波的影响,可以基于新息协方差匹配技术建立自适应 UKF<sup>[9]</sup>、鲁棒 CKF<sup>[10]</sup>,从而提高 UKF 和 CKF 对系统不良测量的鲁棒性.针对系统模型的不确定性对滤波的影响,文献[11]提出一种带次优渐消因子的 EKF,称之为强跟踪滤波器(STF),有效解决了 EKF 在模型不确定时的滤波问题.STF 具有 EKF 的计算精度低及需要计算雅克比矩阵等理论局限性,为此,许多学者做了大量工作,应用 STF 的理论框架,分别利用 UKF、CDKF 等代替 EKF,建立相应的强跟踪滤波器,有效地改善了 STF 的性能<sup>[12~15]</sup>.

针对 STF 的理论局限性及系统不良测量造成的滤波影响,本文提出了一种强跟踪自适应 SRCKF. 为了避免系统不良测量导致滤波性能下降,构建自适应 SRCKF;以 STF 作为滤波器的基本理论框架,利用自适应 SRCKF 代替 EKF 建立强跟踪自适应 SRCKF. 该算法在系统存在模型不确定性及不良测量时具有良好的滤波性能. 以船舶半实物仿真系统的试验验证所建算法的有效性.

## 2 强跟踪滤波器

考虑如下带加性噪声的非线性离散系统:

$$\mathbf{x}_{k+1} = f_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = h_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{v}_{k+1} \quad (2)$$

其中,  $f_k$  为非线性状态函数,  $h_{k+1}$  为非线性测量函数,  $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$  与  $\mathbf{z}_k \in \mathbf{R}^m$  分别为系统状态向量和观测向量;系统噪声  $\mathbf{w}_k$  和测量噪声  $\mathbf{v}_k$  是相互独立的高斯白噪声,且  $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}_k)$  和  $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_k)$ ;  $\mathbf{x}_0 \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{P}_0)$  为系统初始状态且与  $\mathbf{w}_k$ 、 $\mathbf{v}_k$  互不相关.

### 2.1 强跟踪滤波器原理

为了改善 EKF 在系统模型不确定时的性能,利用衰减记忆滤波思想,对其状态预测误差协方差阵引入渐消因子,从而实时调整滤波增益阵,强迫滤波残差序列保持相互正交,使得强跟踪滤波器保持对系统实际状态的跟踪.

STF 的基本方程为<sup>[11]</sup>:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = f_k(\hat{\mathbf{x}}_k) \quad (3)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \lambda_{k+1} \Phi_{k+1|k} \mathbf{P}_k \Phi_{k+1|k}^T + \mathbf{Q}_k \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} = h_{k+1}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}) \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1}(\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}) \quad (6)$$

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{H}_{k+1}^T (\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k} \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1})^{-1} \quad (7)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1}) \mathbf{P}_{k+1|k} \quad (8)$$

其中  $\lambda_{k+1}$  为渐消因子,  $\mathbf{I}_{n \times n}$  为  $n$  阶单位阵,且有:

$$\Phi_{k+1|k} = \left. \frac{\partial f_k(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k = \hat{\mathbf{x}}_k} \quad (9)$$

$$\mathbf{H}_{k+1} = \left. \frac{\partial h_{k+1}(\mathbf{x}_{k+1})}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} \right|_{\mathbf{x}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}} \quad (10)$$

为了提高算法的实时性,通常采用次优算法计算渐消因子. 设  $\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}$  为理论输出残差序列,则渐消因子  $\lambda_{k+1}$  的计算为<sup>[11]</sup>:

$$\lambda_{k+1} = \begin{cases} C_{k+1}, & C_{k+1} > 1 \\ 1, & C_{k+1} \leq 1 \end{cases} \quad (11)$$

$$C_{k+1} = \text{tr}[\mathbf{N}_{k+1}] / \text{tr}[\mathbf{M}_{k+1}] \quad (12)$$

$$\mathbf{N}_{k+1} = \mathbf{V}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{Q}_k \mathbf{H}_{k+1}^T - \mathbf{R}_{k+1} \quad (13)$$

$$\mathbf{M}_{k+1} = \mathbf{H}_{k+1} \Phi_{k+1|k} \mathbf{P}_k \Phi_{k+1|k}^T \mathbf{H}_{k+1}^T \quad (14)$$

其中  $\text{tr}(\cdot)$  为矩阵求迹的运算;  $\mathbf{V}_{k+1}$  为实际输出残差序列的协方差阵,在实际中  $\mathbf{V}_{k+1}$  是未知的,可由下式进行估算:

$$\mathbf{V}_{k+1} = \begin{cases} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T, & k=0 \\ \frac{\rho \mathbf{V}_k + \mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_{k+1}^T}{1 + \rho}, & k \geq 1 \end{cases} \quad (15)$$

其中,  $0.95 \leq \rho \leq 0.995$  为遗忘因子,通常取  $\rho = 0.95$ .

### 2.2 强跟踪滤波器渐消因子的等价表述

STF 是基于输出残差序列正交性原理的改进 EKF,与 EKF 类似,STF 存在着计算精度低、求解雅克比矩阵等理论局限性. 为了改善 STF 的性能,可将 STF 理论框架与相应的滤波算法相结合,建立改进型强跟踪滤波器. 为此,需要研究 STF 渐消因子的等价表述,即不利用测量函数的泰勒级数展开式计算渐消因子的方法.

假设引入渐消因子之前的状态预测误差协方差阵为  $\mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)}$ 、新息协方差阵为  $\mathbf{P}_{z,k+1}^{(l)}$ 、互协方差阵为  $\mathbf{P}_{xz,k+1}^{(l)}$ ,则式(13)式(14)分别有如下的等价表述<sup>[14]</sup>:

$$\mathbf{N}_{k+1} = \mathbf{V}_{k+1} - \mathbf{R}_{k+1} - [\mathbf{P}_{z,k+1}^{(l)}]^T \times [(\mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)})^{-1}]^T \mathbf{Q}_k [(\mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)})^{-1}]^{-1} \mathbf{P}_{z,k+1}^{(l)} \quad (16)$$

$$\mathbf{M}_{k+1} = \mathbf{P}_{z,k+1}^{(l)} - \mathbf{V}_{k+1} + \mathbf{N}_{k+1} \quad (17)$$

具体推导过程参见文献[14]. 由此实现渐消因子等价表述,可构建改进型强跟踪滤波器.

## 3 自适应平方根容积卡尔曼滤波

### 3.1 平方根容积卡尔曼滤波

为了保证 CKF 误差协方差阵的对称性和正(半)定性,从而提高数值精度和滤波稳定性,在滤波过程中引入误差协方差阵的平方根,构成 SRCKF 算法.

一般 QR 分解算法表示为  $\mathbf{S} = \text{TriA}(\mathbf{A})$ ,其中  $\mathbf{S}$  为下三角矩阵;矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{S}$  的关系如下:假设  $\mathbf{R}$  是  $\mathbf{A}^T$  的 QR 分解所得上三角矩阵,则  $\mathbf{S} = \mathbf{R}^T$ . 根据文献[5],具体 SRCKF 算法如下:

#### 3.1.1 时间更新

假设已知系统在  $k$  时刻的后验密度函数为  $p(\mathbf{x}_k | D_k) = \mathcal{N}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k})$ ,有:

(1)分解状态估计误差协方差阵:

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{S}_{k|k} \mathbf{S}_{k|k}^T \quad (18)$$

(2)构造容积点并经非线性状态方程传播:

$$\mathbf{X}_{i,k|k} = \mathbf{S}_{k|k} \boldsymbol{\xi}_i + \hat{\mathbf{x}}_{k|k}, i = 1, 2, \dots, m \quad (19)$$

$$\mathbf{X}_{i,k+1|k}^* = f_k(\mathbf{X}_{i,k|k}), i = 1, 2, \dots, m \quad (20)$$

其中  $\mathbf{X}_{i,k|k}$ ,  $\mathbf{X}_{i,k+1|k}^*$  是容积点,  $m = 2n$ , 且有  $\boldsymbol{\xi}_i = \sqrt{m/2} \times [1]_i, [1]_i$  是点集[1]的第  $i$  列.

(3)计算状态预测值:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{X}_{i,k+1|k}^* \quad (21)$$

(4) 计算预测误差协方差阵平方根系数:

$$\mathbf{S}_{k+1|k} = \text{Tri}([\mathbf{X}_{k+1|k}^*, \mathbf{S}_{Q,k}]) \quad (22)$$

其中  $\mathbf{Q}_k = \mathbf{S}_{Q,k} \mathbf{S}_{Q,k}^T$ ,  $\mathbf{S}_{Q,k}$  表示  $\mathbf{Q}_k$  的平方根系数, 加权中心矩阵为:

$$\mathbf{X}_{k+1|k}^* = \frac{1}{\sqrt{m}} [\mathbf{X}_{1,k+1|k}^* - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathbf{X}_{2,k+1|k}^* - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \dots, \mathbf{X}_{m,k+1|k}^* - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}] \quad (23)$$

### 3.1.2 测量更新

(1) 构造容积点并经观测方程传播:

$$\mathbf{X}_{i,k+1|k} = \mathbf{S}_{k+1|k} \boldsymbol{\xi}_i + \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, i = 1, 2, \dots, m \quad (24)$$

$$\mathbf{Y}_{i,k+1|k} = h_{k+1}(\mathbf{X}_{i,k+1|k}), i = 1, 2, \dots, m \quad (25)$$

其中  $\mathbf{X}_{i,k+1|k}$ ,  $\mathbf{Y}_{i,k+1|k}$  是相应的容积点.

(2) 计算观测量预测值:

$$\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{Y}_{i,k+1|k} \quad (26)$$

(3) 计算新息协方差阵平方根系数:

$$\mathbf{S}_{zz,k+1|k} = \text{Tri}([\mathbf{Y}_{k+1|k}, \mathbf{S}_{R,k+1}]) \quad (27)$$

其中  $\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{S}_{R,k+1} \mathbf{S}_{R,k+1}^T$ ,  $\mathbf{S}_{R,k+1}$  表示  $\mathbf{R}_{k+1}$  的平方根系数, 加权的中心矩阵为:

$$\mathbf{Y}_{k+1|k} = \frac{1}{\sqrt{m}} [\mathbf{Y}_{1,k+1|k} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}, \mathbf{Y}_{2,k+1|k} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}, \dots, \mathbf{Y}_{m,k+1|k} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}] \quad (28)$$

(4) 计算新息协方差阵  $\mathbf{P}_{zz,k+1|k}$  和观测量自协方差阵  $\mathbf{P}_{z,k+1|k}$ :

$$\mathbf{P}_{zz,k+1|k} = \mathbf{S}_{zz,k+1|k} \mathbf{S}_{zz,k+1|k}^T \quad (29)$$

$$\mathbf{P}_{z,k+1|k} = \mathbf{P}_{zz,k+1|k} - \mathbf{R}_{k+1} \quad (30)$$

(5) 计算互协方差阵:

$$\mathbf{P}_{xz,k+1|k} = \mathbf{X}_{k+1|k} \mathbf{Y}_{k+1|k}^T \quad (31)$$

其中加权中心矩阵为:

$$\mathbf{X}_{k+1|k} = \frac{1}{\sqrt{m}} [\mathbf{X}_{1,k+1|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \mathbf{X}_{2,k+1|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \dots, \mathbf{X}_{m,k+1|k} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}] \quad (32)$$

(6) 计算滤波增益阵并进行状态估计:

$$\mathbf{K}_{k+1} = (\mathbf{P}_{xz,k+1|k} / \mathbf{S}_{zz,k+1|k}^T) / \mathbf{S}_{zz,k+1|k} \quad (33)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}) \quad (34)$$

(7) 计算估计误差协方差阵平方根系数:

$$\mathbf{S}_{k+1|k+1} = \text{Tri}([\mathbf{X}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{Y}_{k+1|k}, \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{S}_{R,k+1}]) \quad (35)$$

## 3.2 自适应 SRCKF

SRCKF 算法对测量条件的变化非常敏感, 系统的不良测量会导致滤波性能下降甚至滤波故障. 本文根据新息协方差匹配原理, 建立带测量噪声比例系数的自适应 SRCKF, 使其对系统的不良测量具有鲁棒性.

测量正常时, 系统运行 SRCKF, 此时滤波新息协方差阵的实际值与理论值相匹配<sup>[9]</sup>, 有:

$$\mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_{k+1}^T = \mathbf{P}_{z,k+1|k+1} = \mathbf{P}_{z,k+1|k} + \mathbf{R}_{k+1} \quad (36)$$

其中  $\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}$  为滤波新息.

当系统出现不良测量时, 式(36)不再成立, 此时引入一个自适应系数  $\mu_{k+1}$ , 使得式(36)重新满足新息协方差匹配, 即:

$$\mathbf{P}_{z,k+1|k+1} = \mathbf{P}_{z,k+1|k} + \mu_{k+1} \mathbf{R}_{k+1} \quad (37)$$

这样, 式(27)的新息协方差阵平方根系数变为:

$$\mathbf{S}_{zz,k+1|k+1} = \text{Tri}([\mathbf{Y}_{k+1|k+1}, \sqrt{\mu_{k+1}} \mathbf{S}_{R,k+1}]) \quad (38)$$

式(35)的估计误差协方差阵平方根系数也变为:

$$\mathbf{S}_{k+1|k+1} = \text{Tri}([\mathbf{X}_{k+1|k+1} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{Y}_{k+1|k+1}, \mathbf{K}_{k+1} \sqrt{\mu_{k+1}} \mathbf{S}_{R,k+1}]) \quad (39)$$

由式(38)和式(39)参与 SRCKF 的测量更新, 由此构成自适应 SRCKF 算法.

为了计算自适应系数  $\mu_{k+1}$ , 由式(36)和式(37)可得:

$$\begin{aligned} \text{tr}[\mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_{k+1}^T] &= \text{tr}[\mathbf{P}_{z,k+1|k+1} + \mu_{k+1} \mathbf{R}_{k+1}] \\ &= \text{tr}[\mathbf{P}_{z,k+1|k}] + \mu_{k+1} \text{tr}[\mathbf{R}_{k+1}] \end{aligned} \quad (40)$$

其中  $\text{tr}(\cdot)$  表示求矩阵迹的算子.

考虑到关系式  $\text{tr}[\mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_{k+1}^T] = \mathbf{e}_{k+1}^T \mathbf{e}_{k+1}$ , 由式(40)得到自适应系数  $\mu_{k+1}$ :

$$\mu_{k+1} = (\mathbf{e}_{k+1}^T \mathbf{e}_{k+1} - \text{tr}[\mathbf{P}_{z,k+1|k}]) / \text{tr}[\mathbf{R}_{k+1}] \quad (41)$$

## 3.3 切换选择

只有系统存在不良测量时, 才运行自适应 SRCKF, 在其他情况下, 系统最优地运行标准 SRCKF, 为此, 需要建立切换规则, 根据测量数据质量选择最优的子系统滤波算法. 传感器子系统滤波结构如图 1 所示.

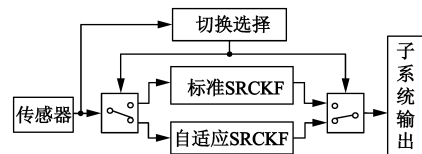


图1 传感器子系统滤波算法框图

为了建立切换规则, 引入两元选择,  $\gamma_0$ : 选择 SRCKF;  $\gamma_1$ : 选择自适应 SRCKF.

测量数据质量检测由下列统计函数实现:

$$\beta_{k+1} = \mathbf{e}_{k+1}^T [\mathbf{P}_{z,k+1|k+1}]^{-1} \mathbf{e}_{k+1} \quad (42)$$

其中, 统计函数  $\beta_{k+1}$  服从自由度为  $\rho$  的  $\chi^2$  分布, 即  $\beta_k \sim \chi^2(\rho)$ ,  $\rho$  为新息向量的维数.

如果选择测量数据质量控制精度为  $\delta$ , 则:

$$P\{\chi^2 > \chi_{\delta, M}^2\} = \delta; 0 < \delta < 1 \quad (43)$$

由此可以确定数据质量检测的阈值  $\chi_{\delta, M}^2$ , 从而进行测量数据的质量检测.

这样, 自适应 SRCKF 和标准 SRCKF 的切换判据为:

$$\gamma_0: \beta_k \leq \chi_{\delta, M}^2, \forall k; \gamma_1: \beta_k > \chi_{\delta, M}^2, \exists k$$

## 4 强跟踪自适应 SRCKF

为了克服 STF 的理论局限性及不良测量所引起的滤波问题,本文根据 STF 渐消因子的等价表述及自适应 SRCKF,建立强跟踪自适应 SRCKF 算法.基于由式(1)和式(2)所确定的非线性系统,强跟踪自适应 SRCKF 算法如下:

已知系统在  $k$  时刻的状态估计  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  和  $\mathbf{S}_{k|k}$ , 估计系统在  $k+1$  时刻的状态.

### 4.1 时间更新

(1)由式(19)~式(22)分别求系统状态预测值  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$  和预测误差协方差阵平方根系数  $\mathbf{S}_{k+1|k}$ ;

(2)计算预测误差协方差阵  $\mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)}$ :

$$\mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)} = \mathbf{S}_{k+1|k} \mathbf{S}_{k+1|k}^T \quad (44)$$

### 4.2 计算渐消因子

(1)构造容积点并通过观测方程传播:

$$\boldsymbol{\alpha}_{i,k+1|k}^{(l)} = \mathbf{S}_{k+1|k} \boldsymbol{\xi}_i + \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} \quad (45)$$

$$\boldsymbol{\chi}_{i,k+1|k}^{(l)} = h_{k+1}(\boldsymbol{\alpha}_{i,k+1|k}^{(l)}) \quad (46)$$

(2)计算观测量的预测值:

$$\hat{z}_{k+1|k} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} \boldsymbol{\chi}_{i,k+1|k}^{(l)} \quad (47)$$

(3)计算新息协方差阵平方根系数:

$$\mathbf{S}_{zz,k+1|k} = \text{Tria}([\mathbf{Z}_{k+1|k}, \mathbf{S}_{R,k+1}]) \quad (48)$$

其中  $\mathbf{R}_{k+1} = \mathbf{S}_{R,k+1} \mathbf{S}_{R,k+1}^T$ ,  $\mathbf{S}_{R,k+1}$  表示  $\mathbf{R}_{k+1}$  的平方根系数,且加权中心矩阵  $\mathbf{Z}_{k+1|k}$  为:

$$\mathbf{Z}_{k+1|k} = \frac{1}{\sqrt{m}} [\boldsymbol{\chi}_{1,k+1|k}^{(l)} - \hat{z}_{k+1|k}, \boldsymbol{\chi}_{2,k+1|k}^{(l)} - \hat{z}_{k+1|k}, \dots, \boldsymbol{\chi}_{m,k+1|k}^{(l)} - \hat{z}_{k+1|k}] \quad (49)$$

则新息协方差阵为:

$$\mathbf{P}_{zz,k+1|k}^{(l)} = \mathbf{S}_{zz,k+1|k} \mathbf{S}_{zz,k+1|k}^T \quad (50)$$

(4)计算互协方差阵:

$$\mathbf{P}_{xz,k+1|k}^{(l)} = \mathbf{X}_{k+1|k} \mathbf{Z}_{k+1|k}^T \quad (51)$$

其中加权中心矩阵  $\mathbf{X}_{k+1|k}$  为:

$$\mathbf{X}_{k+1|k} = \frac{1}{\sqrt{m}} [\boldsymbol{\alpha}_{1,k+1|k}^{(l)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \boldsymbol{\alpha}_{2,k+1|k}^{(l)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{m,k+1|k}^{(l)} - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}] \quad (52)$$

(5)由式(44)、式(50)、式(51)、式(11)~式(17)计算渐消因子  $\lambda_{k+1}$ ;

(6)为了使滤波器具有强跟踪滤波性能,对状态预测误差协方差阵  $\mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)}$  引入渐消因子  $\lambda_{k+1}$ ,与式(4)比较可知引入渐消因子后预测误差协方差阵为:

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \lambda_{k+1} (\mathbf{P}_{k+1|k}^{(l)} - \mathbf{Q}) + \mathbf{Q} \quad (53)$$

### 4.3 测量更新

(1)分解预测误差协方差阵:

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{S}_{k+1|k} \mathbf{S}_{k+1|k}^T \quad (54)$$

由式(24)~式(32)计算新息协方差阵平方根系数  $\mathbf{S}_{zz,k+1|k}$  和互协方差阵  $\mathbf{P}_{xz,k+1|k}$ .

(2)获得新的测量  $z_{k+1}$  后,由式(42)计算测量数据质量函数,根据切换判据进行标准 SRCKF 与自适应 SRCKF 的选择.

(3)如果选择自适应 SRCKF,则由式(29)、式(30)和式(41)计算自适应系数  $\mu_{k+1}$ ,利用式(38)、式(39)、式(33)~式(35)进行滤波测量更新,至此完成强跟踪自适应 SRCKF 滤波.

(4)如果选择标准 SRCKF,则利用式(33)~式(35)进行滤波测量更新,实现强跟踪 SRCKF.

由上述分析可知,通过采用自适应 SRCKF 代替 EKF,强跟踪自适应 SRCKF 不仅克服了 STF 的理论局限性,而且具有自适应 SRCKF 对系统不良测量的鲁棒性,改善了滤波性能.

## 5 算法仿真分析

本文以动力定位船 GPS 测量系统为研究对象,利用船舶半实物仿真系统的试验数据,对所建算法进行仿真分析.

船舶半实物仿真系统由实验平台、传感器、测量数据处理与控制系统组成,按照给定的船舶仿真模型模拟船舶的六自由度运动.船舶半实物仿真试验系统安装有三个 GPS 及其他传感器,如图 2 所示.



图2 仿真试验系统

### 5.1 动力定位船运动模型及数据准备

#### 5.1.1 系统运动模型

动力定位船具有低速、弱机动的特点,速度的轻微变化可以由一个连续时间的零均值白噪声表示,由此可以建立连续白噪声加速度运动模型<sup>[16]</sup>.采样周期为  $T$  时的仿真系统模型:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (55)$$

其中:向量  $\mathbf{x} = [x, y, \phi, u, v, r]^T$ , 其各元素分别为船舶北向、东向坐标、船向角及对应的速度,  $\mathbf{I}_{3 \times 3}$  为三阶单位阵,  $\mathbf{0}_{3 \times 3}$  为三阶零阵,  $\mathbf{w}(k)$  为过程噪声矩阵, 其协方差阵为:

$\mathbf{Q} = \text{diag}[0.2, 0.2, 0.01, 0.001, 0.001, 0]$ , 且有

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} T \cos \phi & -T \sin \phi & 0 \\ T \sin \phi & T \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix}$$

若观测量为  $\mathbf{z} = [x, y]^T$ , 则观测方程为:

$$\mathbf{z}_i(k+1) = \mathbf{h}\mathbf{x}_i(k+1) + \mathbf{v}_i(k+1) \quad (56)$$

其中:  $i$  表示传感器数量,  $\mathbf{h} = [\mathbf{I}_{2 \times 2}, \mathbf{0}_{2 \times 4}]$ ,  $\mathbf{v}_i(k)$  是传感器  $i$  的测量噪声矩阵, 且其协方差矩阵为  $\mathbf{R}_i = \text{diag}[0.4, 0.4]$ , 根据 GPS 的实际采样周期  $T = 0.1\text{s}$  进行仿真.

### 5.1.2 仿真数据准备

根据仿真试验系统 GPS 的测量值, 选择东经  $126.67^\circ$ 、北纬  $45.77^\circ$  为原点, 建立局部北东坐标系. 选取比较完整的一组 GPS 测量数据进行 UTM 正解, 即由大地球面坐标求解 UTM 投影平面坐标, 考虑坐标原点, 得到局部北东坐标系下 GPS 测量数据 data-1, 以此作为原始测量数据. 由实测数据, 初始状态为:

$$\mathbf{x}(0) = [513.92, 2749.4, 0, 68]^T$$

$$\mathbf{p}(0) = \text{diag}([1, 1, 1, 0.5])$$

由于实测数据突变型故障不明显, 不失一般性, 对数据 data-1 的第 15、25、35、40、50、60、70 及 80 时刻测量值加入偏差  $[0.3, 0.3]^T$ , 由此构成一类不良测量数据 data-2.

动力定位船的系统模型不确定性原因有多种, 在此只考虑船的机动加速度所引起的与式(55)有差别的运动模型, 以此对所建强跟踪滤波算法进行仿真. 为了设置系统模型的不确定性, 将式(55)变形为:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} a \times \mathbf{I}_{3 \times 3} & b \times \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & a \times \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (57)$$

其中  $a, b$  分别为系数, 系统模型正常时二者均为 1, 通过设置不同的系数可以模拟船舶加速机动所引起的系统模型的不确定性, 不妨将系数  $a, b$  分别设置为 1.1 和 1.2, 此时考虑了动力定位船的机动加速度, 以此得到一种变化的系统模型. 这仅仅用来仿真验证所建滤波算法是合适的, 但是如果用于船舶运动控制则需要进一步严格分析.

### 5.2 强跟踪自适应 SRCKF 的仿真分析

为了评估所建立的强跟踪自适应 SRCKF 算法, 设置系统不良测量及变化的系统模型两种情况对强跟踪 EKF 和强跟踪自适应 SRCKF 进行仿真分析, 两种算法分别记为算法 1、算法 2, 其仿真结果分别用虚线、粗实

线与加号的组合表示.

在系统只存在不良测量时, 利用 data-2 对两种算法进行仿真, 选取船的北向坐标状态估计及其估计误差为研究对象, 仿真结果分别如图 3 和图 4 所示.

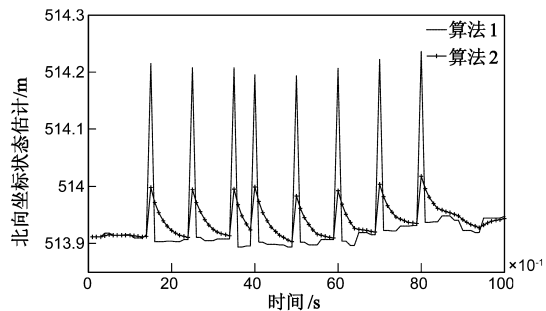


图3 北向坐标状态估计

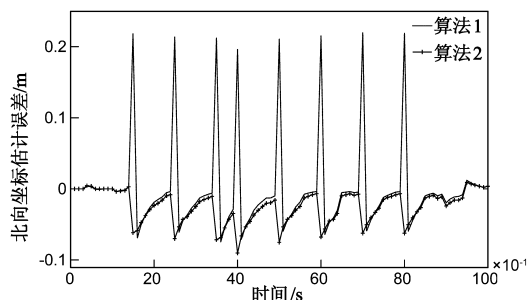


图4 北向坐标估计误差

由仿真结果可知, 在系统存在不良测量时, 强跟踪自适应 SRCKF 具有良好的鲁棒性, 状态估计有较小的变化; 而强跟踪 EKF 对系统的不良测量非常敏感, 在系统的不良测量时刻, 其状态估计突变较大, 存在较大的估计误差, 使得其滤波性能下降甚至发散.

在系统同时存在不良测量与模型不确定性时, 利用 data-2 及变化的系统模型对强跟踪 EKF 与强跟踪自适应 SRCKF 进行仿真分析, 选择船的东向坐标状态估计及估计误差为研究对象, 仿真结果如图 5 和图 6 所示.

由仿真结果可知, 在系统同时存在不良测量及系统模型不确定性时, 强跟踪自适应 SRCKF 与强跟踪 EKF 相比具有良好的鲁棒性; 这是由于强跟踪自适应 SRCKF 不仅具有强跟踪滤波对系统模型不确定性的鲁棒性, 而且具有自适应 SRCKF 对系统不良测量的鲁棒性及数值稳定性; 而基于 EKF 的强跟踪滤波器对系统的不良测量非常敏感, 对此不具有鲁棒性.

## 6 结论

针对强跟踪 EKF 的理论局限性及在系统不良测量时滤波性能下降问题, 本文建立了一种强跟踪自适应 SRCKF 滤波算法, 以 STF 作为滤波器的基本理论框架, 采用自适应 SRCKF 代替强跟踪滤波器的 EKF, 三阶球

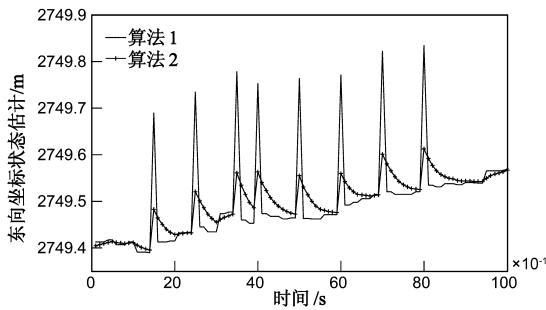


图5 东向坐标状态估计

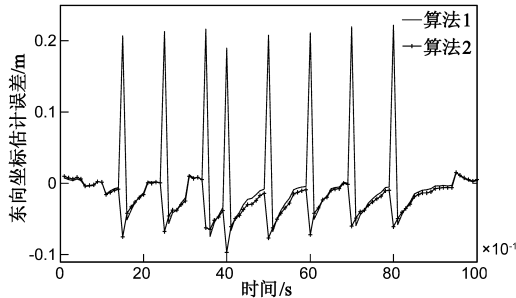


图6 东向坐标估计误差

面径向容积准则代替 STF 中的雅克比矩阵计算. 仿真结果表明, 强跟踪自适应 SRCKF 不仅具有自适应 SRCKF 对不良测量的鲁棒性及数值稳定性, 而且兼顾了 STF 关于系统模型不确定时鲁棒性强的特点, 该算法在系统同时存在模型不确定性及不良测量时具有良好的滤波性能.

#### 参考文献

- [1] Wang X X, Liang Y, Pan Q, et al. A gaussian approximation recursive filter for nonlinear systems with correlated noises[J]. Automatica, 2012, 48(9): 2290 – 2297.
- [2] 商临峰, 杨小军, 邢科义. 局域跟踪的测速雷达网量测融合弹道解算[J]. 电子学报, 2013, 41(3): 615 – 618.  
SHANG Lin-feng, YANG Xiao-jun, XING Ke-yi. Trajectory estimation based on measurements fusion for local doppler radar networks[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(3): 615 – 618. (in Chinese)
- [3] 伍宗伟, 姚敏立, 马红光, 等. 稀疏网格平方根求积非线性滤波器[J]. 电子学报, 2012, 40(7): 1298 – 1303.  
WU Zong-wei, YAO Min-li, MA Hong-guang, et al. Sparse-grid square-root quadrature nonlinear filter[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(7): 1298 – 1303. (in Chinese)
- [4] 夏楠, 邱天爽, 李景春, 等. 一种卡尔曼滤波与粒子滤波相结合的非线性滤波算法[J]. 电子学报, 2013, 41(1): 148 – 152.  
XIA Nan, QIU Tian-shuang, LI Jing-chun, et al. A nonlinear filtering algorithm combining the Kalman filter and the particle filter[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(1): 148 – 152. (in

Chinese)

- [5] Arasaratnam I, Haykin S. Cubature Kalman filters[J]. IEEE Trans Automatic Control, 2009, 54(6): 1254 – 1269.
- [6] Ge Q B, Xu D X, Wen C L. Cubature information filters with correlated noises and their applications in decentralized fusion[J]. Signal Processing, 2014, 94(1): 434 – 444.
- [7] 王品, 谢维信, 刘宗香, 等. 一种非线性 GM – PHD 滤波新方法[J]. 电子学报, 2012, 40(8): 1597 – 1602.  
WANG Pin, XIE Wei-xin, LIU Zong-xiang, et al. A novel gaussian mixture PHD filter for nonlinear models[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(8): 1597 – 1602. (in Chinese)
- [8] 刘宗香, 谢维信, 王品, 等. 一种具有信息保持能力的 GM – PHD 滤波器[J]. 电子学报, 2013, 41(8): 1603 – 1608.  
LIU Zong-xiang, XIE Wei-xin, WANG Pin, et al. A Gaussian mixture PHD filter with the capability of information hold[J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(8): 1603 – 1608. (in Chinese)
- [9] Soken H E, Hajiyeve C. Pico satellite attitude estimation via robust unscented Kalman filter in the presence of measurement faults[J]. ISA Transactions, 2010, 49(3): 249 – 256.
- [10] 徐树生, 林孝工. 基于鲁棒 CKF 的多传感器数据混合融合算法[J]. 电机与控制学报, 2013, 17(2): 90 – 97.  
XU Shu-sheng, LIN Xiao-gong. Multisensor all information fusion algorithm based on robust CKF[J]. Electric Machines and Control, 2013, 17(2): 90 – 97. (in Chinese)
- [11] ZHOU D H, XI Y G, ZHANG Z J. A suboptimal multiple extended Kalman filter[J]. Chinese J of Automation, 1992, 4(2): 145 – 152.
- [12] 文韬, 葛泉波. 未建模系统基于观测值的实时分块 Kalman 滤波估计方法研究[J]. 电子学报, 2012, 40(10): 1958 – 1964.  
WEN Tao, GE Quan-bo. Research on real time block Kalman filtering estimation methods for the un-modeled system based on output measurements[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(10): 1958 – 1964. (in Chinese)
- [13] 刘望生, 李亚安, 王明环. 复合 K 噪声下机动目标跟踪自适应 UPF 算法[J]. 电子学报, 2012, 40(6): 1240 – 1245.  
LIU Wang-sheng, LI Ya-an, WANG Ming-huan. An adaptive UPF algorithm for tracking maneuvering target in compound K noise environment[J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(6): 1240 – 1245. (in Chinese)
- [14] 王小旭, 赵琳, 薛红香. 强跟踪 CDKF 及其在组合导航中的应用[J]. 控制与决策, 2010, 25(12): 1837 – 1842.  
WANG Xiao-xu, ZHAO Lin, XUE Hong-xiang. Strong tracking CDKF and application for integrated navigation[J]. Control and Decision, 2010, 25(12): 1837 – 1843. (in Chinese)
- [15] 徐树生, 林孝工, 赵大威, 等. 强跟踪 SRCKF 及其在船舶动力定位中的应用[J]. 仪器仪表学报, 2013, 34(6): 1266 – 1272.

XU Shu-sheng, LIN Xiao-gong, ZHAO Da-wei, et al. Strong tracking SRCKF and its application in vessel dynamic positioning[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2013, 34 (6): 1266 – 1272. (in Chinese)

- [16] 徐树生. 船舶动力定位系统多传感器信息融合方法研究[D]. 黑龙江哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2013.

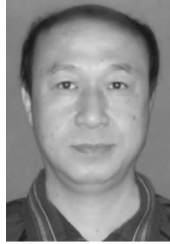
XU Shu-shing. Research on the multi-sensor information fusion methods of vessel dynamic positioning system [D]. Harbin, Heilongjiang: Harbin Engineering University, 2013. (in Chinese)

#### 作者简介



**徐树生** 男, 1966年4月出生于山东淄博. 2013年在哈尔滨工程大学获工学博士学位. 现为青岛农业大学机电工程学院副教授, 主要研究方向为水下机器人、信号处理、多传感器数据融合等.

E-mail: xuss0319@163.com



**林孝工** 男, 1962年出生于黑龙江齐齐哈尔. 哈尔滨工程大学自动化学院教授、博士生导师. 主要研究方向为船舶动力定位系统、多传感器数据融合等.



**李新飞** 男, 1982年4月出生于安徽蒙城. 2012年在哈尔滨工程大学获工学博士学位. 现为哈尔滨工程大学自动化学院讲师, 主要研究方向为水下机器人控制与导航等.