

# 杂波中 MIMO 雷达恒模波形及接收机联合优化算法研究

唐 波,张 玉,李 科,高 辉

(电子工程学院,安徽合肥 230037)

**摘 要:** 为提高集中式 MIMO 雷达在强杂波中的目标检测性能,同时兼顾雷达发射机对于恒定包络波形的需求,以系统输出信杂噪比最大为优化准则,研究了 MIMO 雷达恒模多波形及接收机权值的联合优化问题.基于循环优化算法将联合优化问题分解为两个子优化步骤,并提出了基于半正定松弛及高斯随机化的恒模波形设计算法.结果表明所提算法能够在迭代过程中不断增加输出信杂噪比直至算法收敛.此外,其相比于能量约束下的最优波形性能损失很小,能够实现自适应杂波抑制并改善目标检测性能.

**关键词:** MIMO 雷达; 恒模波形设计; 接收机设计; 杂波抑制

**中图分类号:** TN959.1      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2014)09-1705-07

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.09.007

## Joint Constant-Envelope Waveform and Receiver Design for MIMO Radar in the Presence of Clutter

TANG Bo, ZHANG Yu, LI Ke, GAO Hui

(Electronic Engineering Institute, Hefei, Anhui 230037, China)

**Abstract:** Aiming to improve the detection performance of colocated multiple-input-multiple-output (MIMO) radar in the presence of strong clutter, we addressed the joint optimization problem of the waveform and receiver based on maximizing signal to clutter plus noise ratio (SCNR). Considering that practical radar systems employ constant envelope signals, we also imposed a constant envelope constraint on the waveform. During the optimizations, we divided the joint design problem into two steps, and proposed an algorithm for the design of the constant envelope waveform based on semi-definite relaxation (SDR) and Gaussian randomizations. Numerical simulations show that the proposed algorithm converges with increasing SCNR. Moreover, compared with the optimal waveform under the energy constraint, the SCNR loss is negligible. Finally, the capability of adaptive clutter suppression and improved detection performance of the proposed algorithm is clearly demonstrated.

**Key words:** MIMO radar; constant-envelope waveform design; receiver design; clutter suppression

### 1 引言

多输入多输出(MIMO)雷达是近年涌现的新概念<sup>[1~8]</sup>.通过独立发射多波形以及雷达收发站点配置(或收发阵列配置),MIMO 雷达在目标检测、可辨识性及参数估计等方面潜力巨大.基于雷达布站方式的差异,MIMO 雷达可分为分布式 MIMO 雷达<sup>[2,3]</sup>以及集中式 MIMO 雷达<sup>[1,3]</sup>两种,其中分布式 MIMO 雷达单元间相隔较远,各雷达单元相对独立的观测角度可以克服目标 RCS 闪烁导致的检测性能恶化;集中式 MIMO 雷达发射以及接收阵元间距较小,可形成更大的阵列虚拟孔径,

提高目标参数估计性能.

MIMO 雷达的性能优越性来自两个方面:雷达布站方式及波形分集能力.多波形设计是实现 MIMO 雷达波形分集的重要途径,有助于进一步挖掘 MIMO 雷达在目标检测、参数估计等方面的潜能,因此 MIMO 雷达的多波形设计是当前研究的热点<sup>[9~18]</sup>.文献[9~12]研究了基于期望方向图匹配的多波形设计问题.文献[13~15]分别以互信息、相对熵以及最小均方误差为准则,提出了白噪声及色噪声背景下的 MIMO 雷达最优波形设计算法,研究了最优波形与目标以及噪声之间的联系.为提高杂波中的检测性能,文献[16]基于输出信杂噪比研

究了杂波中的最优波形设计问题.为解决文献[16]中算法的不收敛性,文献[17]研究了发射波形以及接收机权值的联合优化设计算法.

需要指出的是,工程实际中为了能够使得雷达发射机工作在饱和状态以便发挥其最大效能,同时为避免放大器的非线性使得发射波形失真,通常要求雷达发射波形具有恒定包络.对于 MIMO 雷达,这一实际要求也不例外,而且由于 MIMO 雷达包含了多个发射机,每个发射机均可以发射互相独立的波形,因此要求每一路发射波形都能满足恒定包络特性.然而,文献[16, 17]仅考虑了对发射波形的能量约束,基于该准则设计的多波形并不具有恒定包络特性,因此文献[16, 17]中的设计方法应用于工程实际将存在局限性.尽管这一问题已经引起文献[17]的重视,然而恒模约束的非凸特性导致优化问题难以求解,文献[17]指出还有待进一步的研究.

本文以集中式 MIMO 雷达为应用背景,建立了杂波中的目标模型,并以系统输出信杂噪比最大为准则,研究了杂波中的恒模波形与接收机权值的联合优化问题.在恒模波形与接收机权值的联合优化过程中,采用了类似于文献[17]中的循环优化方法.为了解决固定权值时的恒模波形设计这一难题,本文通过研究恒模波形优化问题的等价形式,基于半正定松弛(Semi-Definite Relaxation, SDR)技术及高斯随机化方法<sup>[18, 19]</sup>(Gaussian Randomization)提出了一种波形设计算法.数值仿真分析验证了本文算法的有效性.

## 2 信号模型

考虑发射和接收均采用线性阵列天线的单基地集中式 MIMO 雷达系统,其中发射阵和接收阵分别具有  $N_T$  和  $N_R$  个阵元.对于 MIMO 雷达,每一部发射机对应一路发射天线,每个发射机独立地发射波形.将天线  $k$  的发射波形记为  $s(k)$ ,每一路波形采样后的长度记为  $L$ .在远场窄带假设下,出发角(Direction Of Departure, DOD)  $\theta$  处接收到的信号为

$$\mathbf{a}^T(\theta) \mathbf{S} \quad (1)$$

其中  $\mathbf{a}(\theta) = [e^{j2\pi d_{T,1} \sin\theta/\lambda}, \dots, e^{j2\pi d_{T,N_T} \sin\theta/\lambda}]^T \in \mathbf{C}^{N_T \times 1}$  为发射阵列导引矢量,  $d_{T,k}$  为第  $k$  个发射阵元与第 1 个发射阵元的间距,  $\lambda$  为波长,  $\mathbf{S} = [s(1), \dots, s(N_T)]^T$  为发射波形矩阵.故经目标散射后进入接收天线的信号为

$$\alpha \mathbf{b}(\theta) \mathbf{a}^T(\theta) \mathbf{S} \quad (2)$$

其中  $\mathbf{b}(\theta) = [e^{j2\pi d_{R,1} \sin\theta/\lambda}, \dots, e^{j2\pi d_{R,N_R} \sin\theta/\lambda}]^T \in \mathbf{C}^{N_R \times 1}$  为接收阵列导引矢量,  $\alpha$  为目标幅度,  $d_{R,k}$  为第  $k$  个接收阵元与第 1 个接收阵元的间距.

假设感兴趣场景中一共有  $K$  个散射点(或  $K$  个点目标),则 MIMO 雷达接收机中的信号为所有散射点回波

之和,即

$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \sum_{k=1}^K \alpha_k \mathbf{b}(\theta_k) \mathbf{a}^T(\theta_k) \mathbf{S} + \mathbf{N} \\ &= \mathbf{B}(\theta) \mathbf{A} \mathbf{A}^T(\theta) \mathbf{S} + \mathbf{N} \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\alpha_k, \theta_k$  分别为第  $k$  个散射点的幅度以及出发角,  $\mathbf{N}$  为接收机中的噪声以及干扰,  $\mathbf{A} = \text{diag}([\alpha_1, \dots, \alpha_K])$  为  $K \times K$  的对角矩阵,  $\mathbf{B}(\theta) = [\mathbf{b}(\theta_1), \dots, \mathbf{b}(\theta_K)]$ ,  $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)]$ .

将雷达回波矩阵  $\mathbf{Y}$  按列堆积成维数为  $N_R L \times 1$  的矢量  $\mathbf{y}$ , 并利用矩阵等式  $\text{vec}(\mathbf{AXB}) = (\mathbf{B}^T \otimes \mathbf{A}) \text{vec}(\mathbf{X})$ <sup>[20]</sup>, 则

$$\mathbf{y} = \text{vec}(\mathbf{Y}) = [\mathbf{I}_L \otimes (\mathbf{B}(\theta) \mathbf{A} \mathbf{A}^T(\theta))] \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (4)$$

其中  $\mathbf{s} = \text{vec}(\mathbf{S})$ ,  $\mathbf{n} = \text{vec}(\mathbf{N})$ .

在包含  $K$  个散射点的回波信号中,假设一部分为感兴趣的目标信号,不失一般性假设目标包括前  $q$  ( $q < K$ ) 个出发角,那么其余部分为杂波信号,即

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= [\mathbf{I} \otimes (\mathbf{B}_t(\theta) \mathbf{A}_t \mathbf{A}_t^T(\theta))] \mathbf{s} \\ &\quad + [\mathbf{I} \otimes (\mathbf{B}_c(\theta) \mathbf{A}_c \mathbf{A}_c^T(\theta))] \mathbf{s} + \mathbf{n} \\ &= \mathbf{H}_t \mathbf{s} + \mathbf{H}_c \mathbf{s} + \mathbf{n} \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $\mathbf{B}_t(\theta) = [\mathbf{b}(\theta_1), \dots, \mathbf{b}(\theta_q)]$ ,  $\mathbf{A}_t(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1), \dots, \mathbf{a}(\theta_q)]$ ,  $\mathbf{A}_t = \text{diag}([\alpha_1, \dots, \alpha_q])$ ,  $\mathbf{B}_c(\theta) = [\mathbf{b}(\theta_{q+1}), \dots, \mathbf{b}(\theta_K)]$ ,  $\mathbf{A}_c(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_{q+1}), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)]$ ,  $\mathbf{A}_c = \text{diag}([\alpha_{q+1}, \dots, \alpha_K])$ ,  $\mathbf{H}_t$  及  $\mathbf{H}_c$  分别为目标及杂波散射矩阵.

## 3 恒模波形及接收机联合优化

在雷达目标检测中,信杂噪比(SCNR)的大小对系统检测概率有着很大的影响,因此 SCNR 是衡量系统性能的重要指标之一.故而本文采用系统输出 SCNR 作为雷达波形设计的准则.将系统接收机采用的权值记为  $\mathbf{w}$ , 则可以将经过接收机处理后的雷达信号输出  $z$  分成两部分:

$$z = z_t + z_u = \mathbf{w}^H \mathbf{H}_t \mathbf{s} + \mathbf{w}^H (\mathbf{H}_c \mathbf{s} + \mathbf{n}) \quad (6)$$

其中  $z_t$  为目标输出信号,  $z_u$  为杂波及噪声输出信号.故而系统输出 SCNR 为

$$\text{SCNR} = \frac{\text{E}[|z_t|^2]}{\text{E}[|z_u|^2]} = \frac{\text{E}[|\mathbf{w}^H \mathbf{H}_t \mathbf{s}|^2]}{\text{E}[|\mathbf{w}^H (\mathbf{H}_c \mathbf{s} + \mathbf{n})|^2]} \quad (7)$$

假设散射点  $k$  的幅度  $\alpha_k$  为均值为 0, 方差为  $\sigma_k^2$  的随机变量,且  $\alpha_k$  相互独立.注意到

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t \mathbf{s} &= [\mathbf{I}_L \otimes (\mathbf{B}_t(\theta) \mathbf{A}_t \mathbf{A}_t^T(\theta))] \mathbf{s} \\ &= \text{vec}(\mathbf{B}_t(\theta) \mathbf{A}_t \mathbf{A}_t^T(\theta) \mathbf{S}) \\ &= [(\mathbf{S}^T \mathbf{A}_t(\theta)) \otimes \mathbf{B}_t(\theta)] \boldsymbol{\alpha}_t \end{aligned} \quad (8)$$

以及

$$\mathbf{H}_c \mathbf{s} = [\mathbf{I}_L \otimes (\mathbf{B}_c(\theta) \mathbf{A}_c \mathbf{A}_c^T(\theta))] \mathbf{s}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{vec}(\mathbf{B}_c(\theta)\mathbf{A}_c\mathbf{A}_c^T(\theta)\mathbf{S}) \\
&= [(\mathbf{S}^T\mathbf{A}_c(\theta))\otimes\mathbf{B}_c(\theta)]\boldsymbol{\alpha}_c
\end{aligned} \quad (9)$$

其中  $\boldsymbol{\alpha}_t = \text{vec}(\mathbf{A}_t)$ ,  $\boldsymbol{\alpha}_c = \text{vec}(\mathbf{A}_c)$ , 故而

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{\text{ls}} &= \mathbb{E}[\mathbf{H}_t\mathbf{s}\mathbf{s}^H\mathbf{H}_t^H] \\
&= [(\mathbf{S}^T\mathbf{A}_t(\theta))\otimes\mathbf{B}_t(\theta)]\mathbf{R}_t[(\mathbf{S}^T\mathbf{A}_t(\theta))\otimes\mathbf{B}_t(\theta)]^H
\end{aligned} \quad (10)$$

以及

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{\text{cs}} &= \mathbb{E}[\mathbf{H}_c\mathbf{s}\mathbf{s}^H\mathbf{H}_c^H] \\
&= [(\mathbf{S}^T\mathbf{A}_c(\theta))\otimes\mathbf{B}_c(\theta)]\mathbf{R}_c[(\mathbf{S}^T\mathbf{A}_c(\theta))\otimes\mathbf{B}_c(\theta)]^H
\end{aligned} \quad (11)$$

其中  $\mathbf{R}_t = \mathbb{E}[\boldsymbol{\alpha}_t\boldsymbol{\alpha}_t^H]$ ,  $\mathbf{R}_c = \mathbb{E}[\boldsymbol{\alpha}_c\boldsymbol{\alpha}_c^H]$  均为对角矩阵.

类似地, 可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{\text{tw}} &= \mathbb{E}[\mathbf{H}_t^H\mathbf{w}\mathbf{w}^H\mathbf{H}_t] = [(\mathbf{W}^T\mathbf{B}_t^*(\theta))\otimes\mathbf{A}_t^*(\theta)] \\
&\quad \cdot \mathbf{R}_t[(\mathbf{W}^T\mathbf{B}_t^*(\theta))\otimes\mathbf{A}_t^*(\theta)]^H
\end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{\text{cw}} &= \mathbb{E}[\mathbf{H}_c^H\mathbf{w}\mathbf{w}^H\mathbf{H}_c] = [(\mathbf{W}^T\mathbf{B}_c^*(\theta))\otimes\mathbf{A}_c^*(\theta)] \\
&\quad \cdot \mathbf{R}_c[(\mathbf{W}^T\mathbf{B}_c^*(\theta))\otimes(\theta)\mathbf{A}_c^*]^H
\end{aligned} \quad (13)$$

其中  $\mathbf{W}$  满足  $\mathbf{w} = \text{vec}(\mathbf{W})$ .

因此 SCNR 又可写成

$$\text{SCNR} = \frac{\mathbf{w}^H\mathbf{R}_{\text{ls}}\mathbf{w}}{\mathbf{w}^H(\mathbf{R}_{\text{cs}} + \mathbf{R}_{\text{cn}})\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{s}^H\mathbf{R}_{\text{tw}}\mathbf{s}}{\mathbf{s}^H\mathbf{R}_{\text{cw}}\mathbf{s} + \mathbf{w}^H\mathbf{R}_{\text{cn}}\mathbf{w}} \quad (14)$$

其中  $\mathbf{R}_{\text{cn}} = \mathbb{E}[\mathbf{nn}^H]$  为噪声及干扰协方差矩阵, 并假设了噪声及干扰分量与杂波独立.

由于 SCNR 同时依赖于接收机权值  $\mathbf{w}$  以及发射波形  $\mathbf{s}$ , 故而为了使得 SCNR 最大, 可以联合优化发射波形  $\mathbf{s}$  以及接收机权值  $\mathbf{w}$ . 假设已有散射点幅度的二阶统计量  $\mathbf{R}_t$  以及  $\mathbf{R}_c$  等先验信息, 则在要求每一路发射波形都具有恒定包络特性的约束下, 波形与接收机权值联合优化问题可以写成

$$\begin{aligned}
&\max_{\mathbf{w}, \mathbf{s}} \text{SCNR}(\mathbf{w}, \mathbf{s}) \\
&\text{s.t.} \quad |s(k)| = 1, k = 1, \dots, N_T L
\end{aligned} \quad (15)$$

为求解式(15)中的优化问题, 可以采用循环优化算法<sup>[17,21]</sup>, 其中迭代过程将涉及两个子优化问题: 固定  $\mathbf{w}$  时优化恒模发射波形  $\mathbf{s}$  以及波形  $\mathbf{s}$  固定时对接收机权值  $\mathbf{w}$  的优化. 以下依次求解这两个优化问题.

### 3.1 波形固定时的接收机权值优化

当发射波形  $\mathbf{s}$  已知时, 则  $\mathbf{R}_{\text{ls}}$  及  $\mathbf{R}_{\text{cs}}$  亦为已知量. 此时为了优化接收机权值, 需要求解如下无约束优化问题

$$\max_{\mathbf{w}} \frac{\mathbf{w}^H\mathbf{R}_{\text{ls}}\mathbf{w}}{\mathbf{w}^H(\mathbf{R}_{\text{cs}} + \mathbf{R}_{\text{cn}})\mathbf{w}} \quad (16)$$

式(16)是一个典型的广义瑞利商优化问题, 其最优解为

$$\mathbf{w} = \mathbf{L}_s^{-1} \mathbf{v}_{\max}(\mathbf{L}_s^{-1}\mathbf{R}_{\text{ls}}\mathbf{L}_s^{-1}) \quad (17)$$

其中  $\mathbf{L}_s = (\mathbf{R}_{\text{cs}} + \mathbf{R}_{\text{cn}})^{1/2}$ ,  $\mathbf{v}_{\max}(\mathbf{L}_s^{-1}\mathbf{R}_{\text{ls}}\mathbf{L}_s^{-1})$  为  $\mathbf{L}_s^{-1}\mathbf{R}_{\text{ls}}\mathbf{L}_s^{-1}$

最大特征值对应的特征矢量.

### 3.2 权值固定时的恒模波形优化

接下来求解当接收机权值  $\mathbf{w}$  已知时的恒模波形设计问题. 类似地  $\mathbf{R}_{\text{tw}}$  以及  $\mathbf{R}_{\text{cw}}$  为已知量, 相应的待求解优化问题为:

$$\begin{aligned}
&\max_{\mathbf{s}} \frac{\mathbf{s}^H\mathbf{R}_{\text{tw}}\mathbf{s}}{\mathbf{s}^H\mathbf{R}_{\text{cw}}\mathbf{s} + \mathbf{w}^H\mathbf{R}_{\text{cn}}\mathbf{w}} \\
&\text{s.t.} \quad |s(k)| = 1, k = 1, \dots, N_T L
\end{aligned} \quad (18)$$

对于所有满足约束的波形  $\mathbf{s}$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{s}^H\mathbf{R}_{\text{tw}}\mathbf{s}}{\mathbf{s}^H\mathbf{R}_{\text{cw}}\mathbf{s} + \mathbf{w}^H\mathbf{R}_{\text{cn}}\mathbf{w}} &= \frac{\mathbf{s}^H\mathbf{R}_{\text{tw}}\mathbf{s}}{\mathbf{s}^H\mathbf{R}_{\text{cw}}\mathbf{s} + (\mathbf{w}^H\mathbf{R}_{\text{cn}}\mathbf{w}/N_T L)\mathbf{s}^H\mathbf{s}} \\
&= \frac{\mathbf{s}^H\mathbf{R}_{\text{tw}}\mathbf{s}}{\mathbf{s}^H[\mathbf{R}_{\text{cw}} + (\mathbf{w}^H\mathbf{R}_{\text{cn}}\mathbf{w}/N_T L)\mathbf{I}]\mathbf{s}}
\end{aligned} \quad (19)$$

因此, 式(18)等价于

$$\begin{aligned}
&\max_{\mathbf{s}} \frac{\mathbf{s}^H\mathbf{R}_{\text{tw}}\mathbf{s}}{\mathbf{s}^H[\mathbf{R}_{\text{cw}} + (\mathbf{w}^H\mathbf{R}_{\text{cn}}\mathbf{w}/N_T L)\mathbf{I}]\mathbf{s}} \\
&\text{s.t.} \quad |s(k)| = 1, k = 1, \dots, N_T L
\end{aligned} \quad (20)$$

如果不考虑波形恒模约束, 即只考虑能量约束  $\mathbf{s}^H\mathbf{s} = N_T L$ , 式(20)中的最优波形设计问题同样等价于广义瑞利商优化问题的求解, 因此可以类似地找出能量约束下的波形闭式解. 当考虑恒模约束后, 式(20)变成非凸优化问题. 为了获得式(20)的最优解, 将其进一步转换成如下等价形式:

$$\begin{aligned}
&\max_{\mathbf{s}} \frac{\text{tr}[\mathbf{R}_{\text{tw}}\mathbf{s}\mathbf{s}^H]}{\text{tr}[(\mathbf{R}_{\text{cw}} + (\mathbf{w}^H\mathbf{R}_{\text{cn}}\mathbf{w}/N_T L)\mathbf{I})\mathbf{s}\mathbf{s}^H]} \\
&\text{s.t.} \quad \text{diag}(\mathbf{s}\mathbf{s}^H) = \mathbf{1}
\end{aligned} \quad (21)$$

其中此处  $\text{diag}(\cdot)$  表示取方阵的对角元素, 并用到了矩阵等式  $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$ <sup>[20]</sup>.

不难看出优化问题式(21)又与如下问题等价:

$$\begin{aligned}
&\max_{\mathbf{F}} \frac{\text{tr}[\mathbf{R}_{\text{tw}}\mathbf{F}]}{\text{tr}[(\mathbf{R}_{\text{cw}} + (\mathbf{w}^H\mathbf{R}_{\text{cn}}\mathbf{w}/N_T L)\mathbf{I})\mathbf{F}]} \\
&\text{s.t.} \quad \text{diag}(\mathbf{F}) = \mathbf{1}, \mathbf{F} > \mathbf{0}, \text{rank}(\mathbf{F}) = 1
\end{aligned} \quad (22)$$

其中  $\mathbf{F} = \mathbf{s}\mathbf{s}^H$ ,  $\text{rank}(\cdot)$  表示矩阵的秩. 当求得式(22)的最优解  $\mathbf{F}^{\text{opt}}$  时, 由于  $\mathbf{F}^{\text{opt}}$  的秩为 1, 取其第一列即可得出最优波形  $\mathbf{s}$ .

半正定松弛 (SDR) 是求解式(22)中含秩 1 约束的优化问题的有效手段之一. SDR 首先求解不带秩 1 约束的波形优化问题, 即对式(22)进行松弛处理:

$$\begin{aligned}
&\max_{\mathbf{F}} \frac{\text{tr}[\mathbf{R}_{\text{tw}}\mathbf{F}]}{\text{tr}[(\mathbf{R}_{\text{cw}} + (\mathbf{w}^H\mathbf{R}_{\text{cn}}\mathbf{w}/N_T L)\mathbf{I})\mathbf{F}]} \\
&\text{s.t.} \quad \text{diag}(\mathbf{F}) = \mathbf{1}, \mathbf{F} > \mathbf{0}
\end{aligned} \quad (23)$$

很明显式(23)的目标函数并不是  $\mathbf{F}$  的凸函数, 因此仍然不能使用内点法<sup>[19]</sup>得到其全局最优解. 然而注意到式(23)可以写作

$$\begin{aligned} & \max_{\beta, F} \beta \\ \text{s. t. } & \text{tr}\{[\mathbf{R}_{\text{tw}} - \beta(\mathbf{R}_{\text{cw}} + (\mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w} / N_T L) \mathbf{I})] \mathbf{F}\} \geq 0 \\ & \text{diag}(\mathbf{F}) = \mathbf{1}, \mathbf{F} > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (24)$$

当给定  $\beta$  时, 式(24)的第一个及第二个约束均为  $\mathbf{F}$  的线性函数, 最后一个约束为半正定约束, 因此式(24)的可行域构成了凸集, 故而式(23)是 Quasi-Convex 的<sup>[18]</sup>. 当  $\beta$  较小(例如取  $\beta$  为负数)时, 式(24)的可行域非空. 当  $\beta$  过大时(比如超出了式(24)的最优解), 很明显式(24)的可行域为空集. 因此, 在所有使得式(24)的可行域不为空集的  $\beta$  中选取最大者, 便是式(24)的目标函数最优值, 相应的可行点便是问题式(23)的最优解. 当给定  $\beta$  时, 可以采用如下方法判断式(24)的可行域是否为空集<sup>[18]</sup>:

$$\begin{aligned} & \min_{\lambda, F} \lambda \\ \text{s. t. } & \text{tr}\{[\mathbf{R}_{\text{tw}} - \beta(\mathbf{R}_{\text{cw}} + (\mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w} / N_T L) \mathbf{I})] \mathbf{F}\} + \lambda \geq 0 \\ & \text{diag}(\mathbf{F}) = \mathbf{1}, \mathbf{F} > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (25)$$

很明显式(25)为半正定规划(Semi-Definite Programming, SDP)问题, 可通过内点法求得高精度全局最优解<sup>[18]</sup>. 如果式(24)的可行域不为空, 则存在可行点  $\mathbf{F}_1$  使得

$$\text{tr}\{[\mathbf{R}_{\text{tw}} - \beta(\mathbf{R}_{\text{cw}} + (\mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w} / N_T L) \mathbf{I})] \mathbf{F}_1\} \geq 0 \quad (26)$$

因此式(25)的最优解  $\lambda^{\text{opt}}$  必然小于 0. 反之, 如果式(24)的可行域为空集, 则  $\lambda^{\text{opt}}$  必然大于 0. 故而可以通过最优解  $\lambda^{\text{opt}}$  的大小来判断当给定  $\beta$  时, 式(24)的可行域是否为空集.

由于  $\beta$  的取值区间为  $0 \leq \beta \leq \lambda_{\max}$ , 其中  $\lambda_{\max}$  为  $(\mathbf{R}_{\text{tw}}, \mathbf{R}_{\text{cw}} + (\mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w} / N_T L) \mathbf{I})$  的最大广义特征值, 并且式(24)的可行域大小随着  $\beta$  的增大而变小, 故而可以结合二分法求解式(24)的最优解:

表 1 结合二分法的最优解求解

- 
- 步骤 1** 令  $\beta^l = 0, \beta^u = \lambda_{\max}, \beta = (\beta^l + \beta^u) / 2$
- 步骤 2** 利用内点法求解式(25)的最优解  $\lambda^{\text{opt}}$ , 如果  $\lambda^{\text{opt}} < 0$ , 则表明当前  $\beta$  偏小, 令  $\beta^l = \beta, \beta^u$  不变; 反之则说明  $\beta$  偏大,  $\beta^l$  不变,  $\beta^u = \beta$ ;
- 步骤 3** 若  $|\beta^u - \beta^l| < \epsilon$ , 则算法停止, 取当前可行点作为解, 否则令  $\beta = (\beta^l + \beta^u) / 2$ , 返回步骤 2.
- 

然而, 上述方法需要求解一系列的 SDP 问题才能得到式(24)的最优解. 具体地说, 所需求解的 SDP 问题个数取决于最大广义特征值  $\lambda_{\max}$  和收敛精度  $\epsilon$ , 大约为  $\log_2(\lambda_{\max} / \epsilon)$  次, 而计算一次 SDP 问题的最优解所需的复杂度约为  $O(N_T^{3.5} L^{3.5})$ <sup>[22]</sup>. 因此当  $\lambda_{\max}$  太大或者  $\epsilon$  太小时, 算法运算量偏大. 为了解决这一问题, 引入如下

引理:

**引理 1** 考虑如下优化问题:

$$\begin{aligned} & \min_{X, t} \text{tr}[(\mathbf{R}_{\text{cw}} + (\mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w} / N_T L) \mathbf{I}) \mathbf{X}] \\ \text{s. t. } & \text{tr}[\mathbf{R}_{\text{tw}} \mathbf{X}] = 1, \text{diag}(\mathbf{X}) = t \cdot \mathbf{1}, \mathbf{X} > \mathbf{0}, t > 0 \end{aligned} \quad (27)$$

将其最优解记为  $(\mathbf{X}^{\text{opt}}, t^{\text{opt}})$ , 则式(23)的最优解可以写成  $\mathbf{F}^{\text{opt}} = \mathbf{X}^{\text{opt}} / t^{\text{opt}}$ .

**证明** 首先证明  $\mathbf{F}^{\text{opt}}$  是式(23)的可行解, 即证明  $\mathbf{F}^{\text{opt}}$  满足式(23)中的约束条件. 由于式(27)的最优解  $(\mathbf{X}^{\text{opt}}, t^{\text{opt}})$  满足以下约束条件:

$$\text{diag}(\mathbf{X}^{\text{opt}}) = t^{\text{opt}} \cdot \mathbf{1}, \mathbf{X}^{\text{opt}} > \mathbf{0}, t^{\text{opt}} > 0 \quad (28)$$

因此,

$$\text{diag}(\mathbf{F}^{\text{opt}}) = \text{diag}(\mathbf{X}^{\text{opt}} / t^{\text{opt}}) = \mathbf{1}, \mathbf{F}^{\text{opt}} = \mathbf{X}^{\text{opt}} / t^{\text{opt}} > \mathbf{0} \quad (29)$$

故而  $\mathbf{F}^{\text{opt}}$  是式(23)的可行解. 接下来证明  $\mathbf{F}^{\text{opt}}$  的最优性. 对于式(23)的任意可行解  $\mathbf{F}$ , 记

$$\text{tr}[\mathbf{R}_{\text{tw}} \mathbf{F}] = a \quad (30)$$

注意到

$$\text{tr}[\mathbf{R}_{\text{tw}} (\mathbf{F} / a)] = 1, \text{diag}(\mathbf{F} / a) = \mathbf{1} / a \quad (31)$$

并且  $\mathbf{R}_{\text{tw}}$  以及  $\mathbf{F}$  均为正定矩阵, 因此  $a > 0, \mathbf{F} / a$  亦为半正定矩阵, 故  $(\mathbf{F} / a, 1/a)$  为式(27)的可行解. 考虑到  $(\mathbf{X}^{\text{opt}}, t^{\text{opt}})$  对于式(27)的最优性, 因此

$$\begin{aligned} & \text{tr}[(\mathbf{R}_{\text{cw}} + (\mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w} / N_R L) \mathbf{I}) \mathbf{F} / a] \\ & \geq \text{tr}[(\mathbf{R}_{\text{cw}} + (\mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w} / N_R L) \mathbf{I}) \mathbf{X}^{\text{opt}}] \end{aligned} \quad (32)$$

利用  $\text{tr}[\mathbf{R}_{\text{tw}} (\mathbf{F} / a)] = 1$  以及  $\text{tr}[\mathbf{R}_{\text{tw}} \mathbf{X}^{\text{opt}}] = 1$ , 故而

$$\begin{aligned} & \frac{\text{tr}[\mathbf{R}_{\text{tw}} \mathbf{F}]}{\text{tr}[(\mathbf{R}_{\text{cw}} + (\mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w} / N_R L) \mathbf{I}) \mathbf{F}]} \\ & \leq \frac{\text{tr}[\mathbf{R}_{\text{tw}} \mathbf{F}^{\text{opt}}]}{\text{tr}[(\mathbf{R}_{\text{cw}} + (\mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w} / N_R L) \mathbf{I}) \mathbf{F}^{\text{opt}}]} \end{aligned} \quad (33)$$

因此,  $\mathbf{F}^{\text{opt}}$  亦是式(23)的最优解, 证毕.

利用引理 1, 并注意式(27)也属于 SDP 问题, 因此仅需求解一次 SDP 问题便可得出式(23)的全局最优解, 相比于二分法极大地降低了运算量. 当获得式(23)的全局最优解后, 可采用高斯随机化方法获得式(20)中恒模波形设计结果, 具体流程见表 2.

表 2 基于高斯随机化的恒模波形设计

- 
- 步骤 1** 给定高斯随机化的次数  $N_g$  以及式(23)的最优解  $\mathbf{F}^{\text{opt}}$ .
- 步骤 2** 依次产生均值为  $\mathbf{0}$ , 协方差矩阵为  $\mathbf{F}^{\text{opt}}$  的高斯随机矢量  $\mathbf{f}_k, k = 1, \dots, N_g$ , 取  $s_k = \exp(j \angle \mathbf{f}_k)$  保证波形恒定包络, 并以  $s_k$  计算式(20)中的目标函数值  $\text{Obj}_k$ .
- 步骤 3** 恒模波形设计结果  $s^{\text{opt}}$  取使得  $\text{Obj}_k$  最大的  $s_k$ .
- 

接下来简要说明本文算法的收敛性. 将第  $k$  次迭代过程中的得到的恒模波形记为  $\mathbf{s}^{(k)}$ , 接收机权值记为  $\mathbf{w}^{(k)}$ . 根据迭代优化过程, 可以有

$$\begin{aligned} \text{SCNR}(\mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{s}^{(k)}) &\leq \text{SCNR}(\mathbf{w}^{(k+1)}, \mathbf{s}^{(k)}) \\ &\leq \text{SCNR}(\mathbf{w}^{(k+1)}, \mathbf{s}^{(k+1)}) \end{aligned} \quad (34)$$

其中第一个不等号是由于接收机权值  $\mathbf{w}^{(k+1)}$  对于  $\mathbf{s}^{(k)}$  的最优性而导致的, 而第二个不等号是因为  $\mathbf{s}^{(k+1)}$  对于  $\mathbf{w}^{(k+1)}$  的最优性而导致的. 因此在迭代过程中, 系统的输出信杂噪比是非递减的, 故而本文联合优化算法至少能够收敛至局部最优点.

综上, 杂波中的 MIMO 雷达恒模发射波形及接收机联合优化算法可以总结如表 3.

表 3 恒模发射波形及接收机联合优化算法

<b>步骤 1</b>	$k=0$ , 初始化雷达发射波形 $\mathbf{s}^{(k)}$ (例如随机产生或者使用已有正交波形), 接收机权值取 $\mathbf{w}^{(k)} = \mathbf{s}^{(k)}$ . 利用式 (14) 计算系统输出信杂噪比 $\text{SCNR}^{(k)}$ .
<b>步骤 2</b>	$k=k+1$ , (a) 固定 $\mathbf{s}^{(k-1)}$ , 利用式 (17) 更新接收机权值 $\mathbf{w}^{(k)}$ ; (b) 固定 $\mathbf{w}^{(k)}$ , 求解式 (23) 中的优化问题, 得到最优解 $\mathbf{F}^{\text{opt}}$ , 并利用表 2 设计恒模波形 $\mathbf{s}^{(k)}$ ; (c) 利用 $\mathbf{w}^{(k)}$ 及 $\mathbf{s}^{(k)}$ , 计算经过本次迭代后的系统输出信杂噪比 $\text{SCNR}^{(k)}$ ;
<b>步骤 3</b>	若 $ \text{SCNR}^{(k)} - \text{SCNR}^{(k-1)}  < \epsilon$ , 则认为算法已经收敛, 停止迭代, 以当前的 $\mathbf{s}^{(k)}$ 及 $\mathbf{w}^{(k)}$ 作为波形设计结果及接收机最优权值; 否则返回步骤 2.

## 4 数值仿真分析

仿真中发射及接收阵元数分别为  $N_T = 4$  及  $N_R = 4$ , 接收阵元间距为半波长, 发射阵元间距为  $1/2 \times N_R = 2$  倍波长, 且各个发射波形编码长度为  $L = 20$ ; 目标角度为  $10^\circ$ , 功率为 10dB; 杂波均匀分布于  $-40^\circ$  至  $-35^\circ$ , 且杂波功率为 60dB. 系统采用随机编码的波形作为迭代初始值, 采用 Sedumi 工具箱<sup>[23]</sup>求解式 (23) 中的优化问题, 当系统的 SCNR 相对变化大小不超过  $1 \times 10^{-3}$  时认为算法已经收敛, 停止迭代.

图 1 给出了在波形优化过程中 SCNR 随着迭代次数的变化曲线. 为便于比较, 给出了基于能量约束的优化波形的 SCNR. 与此同时, 为分析接收机权值和波形优化对于 SCNR 的影响, 图中给出了每执行一次步骤 2 (a) 及步骤 2 (b) 迭代后的信杂噪比, 其中当迭代次数为  $(k+0.5)$  时 ( $k$  为整数), 代表执行步骤 2 (a), 即波形固定时优化接收机权值; 当迭代次数为整数时, 代表执行步骤 2 (b), 即接收机权值固定时优化波形. 从图 1 可以看出, 恒模约束下的优化波形及接收机权值对应的 SCNR 随着迭代次数的增加不断提升, 从而验证了式 (34) 中的分析. 且同样使用最优接收机抑制杂波的情况下, 优化后的恒模波形的 SCNR 可以比随机编码波形 (对应于图中起始点) 增加 5dB 以上, 且仅需要优化一次波形就可以将 SCNR 提升 3dB 以上, 经过 4 次迭代后就能将

SCNR 提升 4dB 以上. 此外, 由于恒模约束是一个比能量约束强得多的约束条件, 因此可以看出与能量约束下的最优波形相比, 恒模约束下的最优波形 SCNR 存在一定损失, 但是迭代收敛时其 SCNR 损失不超过 0.5dB, 这一损失是可以接受的.

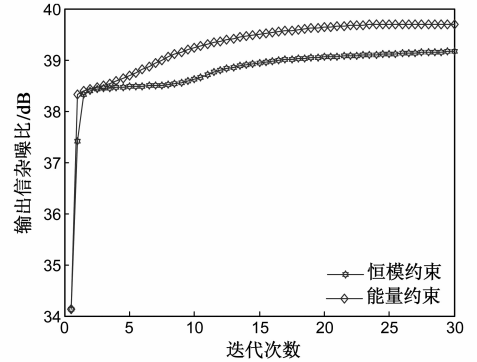


图 1 输出信杂噪比随着迭代次数的变化曲线

图 2 给出了迭代收敛时能量约束及恒模约束下波形设计结果的实部以及虚部分布情况. 可以看出能量约束设计的波形部分取值落在单位圆内, 也有部分取值落在单位圆外, 不具备恒定包络特性; 而恒模约束下的最优波形取值均落在单位圆上, 这就表明基于本文算法优化后的波形满足了波形设计的约束条件, 有利于应用于工程实际.

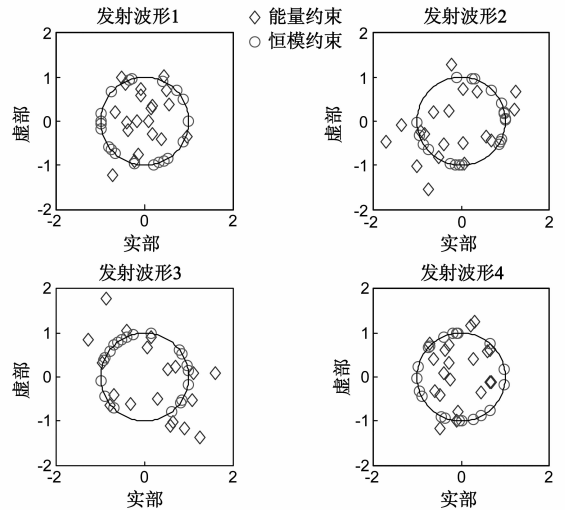


图 2 优化后的波形实部及虚部分布图

图 3 给出了优化后的波形以及权值在不同角度上的方向图响应曲线, 其中方向图响应的定义为

$$\text{BeamPattern}(\theta) = \mathbf{w}_{\text{opt}}^H [\mathbf{I}_L \otimes (\mathbf{b}(\theta) \mathbf{a}^T(\theta))] \mathbf{s}_{\text{opt}} \quad (35)$$

可以看出恒模约束及能量约束下的优化波形具有相似的方向图响应特性: 联合优化后的波形及接收机权值在目标角度 ( $10^\circ$ ) 的响应最强, 在杂波处 ( $-40^\circ$  至  $-35^\circ$ ) 形成了很深的零点, 因此本文算法设计的波形及接收机权值能够有效地抑制杂波, 提高目标检测性能.

最后,图 4 给出了恒模及能量约束下的最优波形 SCNR 随着杂波功率的变化曲线.本图将杂波功率从 10dB 变化至 60dB,其余仿真条件与图 1 相同.可以看出:当杂波功率从 10dB 变化至 60dB 时,SCNR 的变化不超过 1.4dB.此外,当杂波功率小于 25dB 时,恒模约束下的波形设计结果与能量约束下的波形设计结果具有几乎相同的性能.因此,本文算法设计的恒模波形对输入杂波功率并不敏感,能够根据杂波功率的强度自适应地调整杂波方向上的方向图零点深度,故而实现了杂波的自适应抑制.

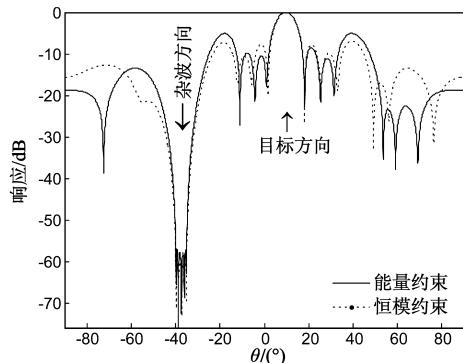


图3 优化后的波形及权值的方向图响应

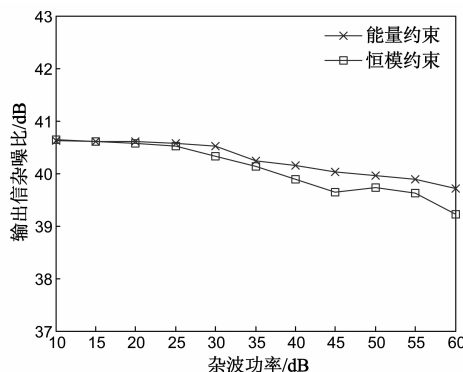


图4 输出信杂噪比随着杂波功率的变化曲线

## 5 结论

为提高强杂波背景中的集中式 MIMO 雷达检测性能,同时兼顾实际工程约束,研究了 MIMO 雷达恒模发射波形及接收机的联合优化问题.将联合优化问题分解为两个子优化问题,基于半正定松弛技术解决了其中的恒模波形优化问题,并利用循环优化算法迭代求解.结果表明,恒模约束下的最优波形设计算法可很快收敛,相比于能量约束下的最优波形性能损失较小;优化后的波形和接收机权值使得目标响应不变的同时,能根据杂波强度在其角度形成深零点,实现了自适应杂波抑制,改善了强杂波背景中的目标检测性能.

考虑到联合优化中矩阵特征向量计算以及 SDP 问

题求解对系统计算能力要求较高,故当发射天线数较多及波形长度较长时,相应的大规模优化算法研究是下一步的工作重点.

## 参考文献

- [1] Li Jian, Stoica P. MIMO radar with colocated antennas[J]. IEEE Signal Process Mag, 2007, 24(5): 106 – 114.
- [2] Haimovich A M, Blum R S, et al. MIMO radar with widely separated antennas[J]. IEEE Signal Process Mag, 2008, 25(1): 116 – 129.
- [3] Li Jian, Stoica P. MIMO Radar Signal Processing[M]. New York: John Wiley & Sons, 2008.
- [4] 何子述, 韩春林, 刘波. MIMO 雷达概念及其技术特点分析[J]. 电子学报, 2005, 33(12A): 143 – 147.  
He Zi-shu, Han Chun-lin, Liu Bo. MIMO radar and its technical characteristic analysis[J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(12A): 143 – 147. (in Chinese)
- [5] 晁淑媛, 陈伯孝, 戴奉周. 非均匀杂波 MIMO 雷达检测[J]. 电子学报, 2011, 39(3): 626 – 635.  
Chao Shu-yuan, Chen Bai-xiao, Dai Feng-zhou. MIMO radar detection in nonhomogeneous clutter[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(3): 626 – 635. (in Chinese)
- [6] 戴喜增, 许稼, 等. MIMO-VSAR 及其一种优化的阵列配置[J]. 电子学报, 2008, 36(12): 2394 – 2399.  
Dai Xi-zeng, Xu Jia, et al. MIMO-VSAR and a kind of optimized array configuration[J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(12): 2394 – 2399. (in Chinese)
- [7] 关键, 黄勇, 何友. MIMO 阵列雷达检测器的性能分析[J]. 电子学报, 2010, 38(9): 2107 – 2111.  
Guan Jian, Huang Yong, He You. Performance analysis of the detector for MIMO array radar[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(9): 2107 – 2111. (in Chinese)
- [8] 夏威, 何子述. APES 算法在 MIMO 雷达参数估计中的稳健性研究[J]. 电子学报, 2008, 36(9): 1804 – 1809.  
Xia Wei, He Zi-shu. On the robustness of the APES algorithm in the parameter estimation of MIMO radars[J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(9): 1804 – 1809. (in Chinese)
- [9] Fuhrmann D R, et al. Transmit beamforming for MIMO radar systems using signal cross-correlation [J]. IEEE Trans Aerospace Electron Syst, 2008, 44(1): 171 – 186.
- [10] Stoica P, Li Jian, et al. On probing signal design for MIMO radar[J]. IEEE Trans Signal Process, 2007, 55(8): 4151 – 4161.
- [11] Stoica P, Li Jian, Zhu Xumin. Waveform synthesis for diversity-based transmit beampattern design[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2008, 56(6): 2593 – 2598.
- [12] 蒋敏, 黄建国, 韩晶. MIMO 阵列恒定包络波形设计[J]. 电子学报, 2011, 39(9): 2194 – 2199.

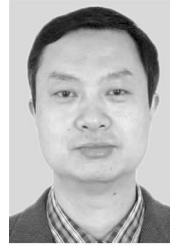
Jiang Min, Huang Jian-guo, Han Jing. Constant envelope waveform design for MIMO array[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(9): 2194 – 2199. (in Chinese)

- [13] Yang Y, Blum R S, He Z, et al. MIMO radar waveform design via alternating projection[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2010, 58(3): 1440 – 1445.
- [14] Tang B, Tang J, Peng Y. MIMO radar waveform design in colored noise based on information theory[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2010, 58(9): 4684 – 4697.
- [15] Tang B, Tang J, Peng Y. Waveform optimization for MIMO radar in colored noise; Further results for estimation-oriented criteria[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2012, 60(3): 1517 – 1522.
- [16] Friedlander B. Waveform design for MIMO radars[J]. IEEE Trans Aero Electron Syst, 2007, 43(3): 1227 – 1238.
- [17] Chen C Y, Vaidyanathan P P. MIMO radar waveform optimization with prior information of the extended target and clutter[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2009, 57(9): 3533 – 3544.
- [18] Boyd S, Vandenberghe L. Convex Optimization[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.
- [19] Luo Zhi-Quan, MaWing-Kin, et al. Semidefinite relaxation of quadratic optimization problems [J]. IEEE Signal Process Mag, 2010, 27(3): 20 – 34.
- [20] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.
- [21] Stoica P, Selen Y. Cyclic minimizers, majorization techniques, and the expectation-maximization algorithm: a refresher[J]. IEEE Signal Process Mag, 2004, 21(1): 112 – 114.
- [22] Vandenberghe L, Boyd S. Semidefinite programming [J]. SIAM Review, 1996, 38(1): 49 – 95.
- [23] Sturm J. Using Sedumi 1.02, A Matlab toolbox for optimization over symmetric cones [J]. Optimization Methods and Software, 1999, 11 – 12: 625 – 653.

## 作者简介



唐 波 男, 1985 年 8 月生于江西临川, 2006 年和 2011 年于清华大学电子工程系获工学学士和工学博士学位, 现为电子工程学院讲师. 研究兴趣主要包括自适应阵列信号处理、雷达波形设计等, 主持了国家自然科学基金、安徽省自然科学基金等多项科研项目, 在 IEEE Trans signal processing 等国内外刊物发表论文 30 余篇, 其中被 SCI 检索 10 余篇, EI 检索 20 余篇, 并获省部级科技进步三等奖 2 项. E-mail: tangbo06@gmail.com



张 玉 男, 1962 年 10 月生于安徽芜湖, 1989 年毕业于电子工程学院获工学硕士学位, 现为电子工程学院教授, 研究兴趣主要包括雷达信号处理、通信信号处理等. E-mail: ZY\_66582@163.com



李 科 男, 1984 年 11 月出生于安徽合肥, 2010 年毕业于上海大学获工学硕士学位, 现为电子工程学院教员, 研究兴趣主要为信号处理. E-mail: bsb\_like@163.com



高 辉 男, 1975 年 4 月出生于安徽寿县, 2007 年毕业于安徽工程大学获工学硕士学位, 现为电子工程学院讲师, 研究兴趣主要为信号处理. E-mail: pangtough@163.com